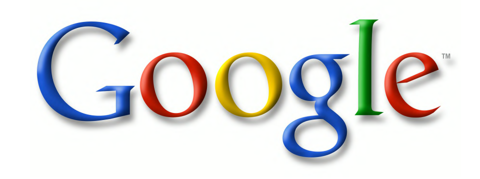






ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS AKADEMIENS

FÖRHANDLINGAR.

FEMTIONDEFJERDE ÅRGÅNGEN.

54 År 1897.

STOCKHOLM, 1898.
Kungl. Boktryckeriet, P. A. Norstedt & Söner.

ÖFVERSIGT

AF

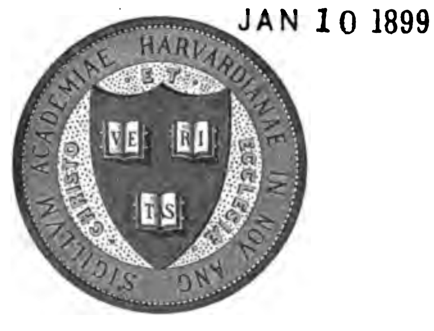
KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS

FÖRHANDLINGAR.

FEMTIONDEFJERDE ÅRGÅNGEN.

1897.

STOCKHOLM, 1897, 1898.
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER.


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

INNEHÅLL.

Utförliga uppsatser äro betecknade med en asterisk.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 1.

Onsdagen den 13 Januari.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot Professor CARL ARENDT ÅNGSTRÖM samt utländska ledamöterne Civilingeniören ALFRED NOBEL och Professorn vid universitetet i Berlin EMIL HEINRICH DU BOIS-REYMOND med döden afgått.

Anmäldes, att från Kongl. Ecklesiastik Departementet blifvit till Riksmuseum öfverlemnad en af Apothekaren H. J. ERNST på Island såsom gåfva öfversänd samling af Isländska mineralier.

Från Kongl. Landtbruks Akademien hade ingått meddelande derom, att denna Akademi utsett till Letterstedtsk stipendiat för utrikes resor Adjunkten vid Ultuna Landtbruksinstitut ERNST PETTERSSON, med uppgift att i Danmark, Tyskland, Schweiz och Frankrike egna sig åt studier i mejerihandtering och bakteriologi.

Berättelserna om resor, som blifvit utförda med understöd af Akademien, hade blifvit afgifna:

af Amanuensen Dr B. SALIN, som i egenskap af Letterstedtsk stipendiat under resor i Norge, Danmark, Finland, Ryss-

land, Tyskland, Schweiz, Frankrike, Belgien, Holland, England, Skotland och Irland vid dervarande museer och samlingar studerat ej mindre de arkeologiska förhållandena närmast före och efter Kristi födelse än äfven de ornamentala företeelserna under olika tider;

af Docenten R. SERNANDER, som i Herjeådalen undersökt trädgränsens förlopp och postglaciala förskjutningar;

af Med. Kandidaten E. HOLMGREN, som vid Kristinebergs zoologiska station idkat biologiska studier särskildt öfver hudnervernas förhållande hos skilda grupper af krustaceer;

af Amanuensen H. DAHLSTEDT, som inom Femsjö socken i Småland och inom Bohuslän idkat hieraciologiska studier;

af Dr K. P. E. STENSTRÖM, som i Jemtlands fjelltrakter egnat sig åt botaniska och särskildt hieraciologiska forskningar;

af Dr J. ERIKSON, som på Öland fortsatt sina föregående undersökningar af dess alvarvegetation;

af Kandidaten ASTRID CLEVE, som i Lule lappmarks fjelltrakter idkat biologiska fanerogamstudier och undersökningar öfver alpina diatomaceer;

af Kandidaten E. HEMMENDORFF, som på Öland anställt fysiognomiska och utvecklingshistoriska undersökningar af dess alvarvegetation.

Herr MONTELIUS redogjorde för innehållet af Dr SALINS ofvannämnda reseberättelse.

Herr WITTROCK framlade de nyutkomna 26—29 delarne af exsiccatverket: »Algæ aquæ dulcis exsiccatæ» och redogjorde för deras innehåll.

Herr ÅNGSTRÖM förevisade och beskref en af honom konstruerad transportabel apparat för absoluta bestämningar af solstrålningens styrka, hvilken apparat han användt på olika höjder öfver hafvet under två af honom utförda expeditioner till Teneriffa.

Herr NILSON meddelade en uppsats af Docenten W. PALMÆR: »Ueber das Verhältniss zwischen Inversionsgeschwindigkeit und Stärke der verdünnten Säuren».

För införande i Akademiens Handlingar antogs en afhandling af Professor H. H. HILDEBRANDSSON med titel: »Quelques recherches sur les centres d'action de l'atmosphère».

För Bihanget till Handlingarne antogos följande afhandlingar: 1:o) »Die Variation des Perigons bei Orchis maculata», af Lektorn C. LINDMAN; 2:o) »Studier öfver några slägten af alggruppen Confervales Borzi», af Dr K. BOHLIN; 3:o) »Säugethiere aus Kamerun, West-Afrika», af Dr Y. SJÖSTEDT; 4:o) »Die Lebermoose der ersten Regnellschen Expedition», af Dr F. STEPHANI; 5:o) »Eine Methode die Störungen der Planeten in Bahnen beliebiger Excentricität und Neigung gruppenweise zu berechnen. II» af Dr K. G. OLSSON.

I Öfversigten skulle intagas följande inlemnade uppsatser: 1:o) Förutnämnda uppsats af Docenten W. PALMÆR; 2:o) »Bidrag till en monografi öfver Sveriges Sphæropsideer. I», af studeranden T. VESTERGREN.

Efter i föreskrifven ordning afgifvet förslag från Filosofiska Fakulteten vid universitetet i Upsala utsåg Akademien Docenten i kemi vid samma universitet Dr WILHELM PALMÆR till innehafvare af det Berzeliska stipendiet.

Den Edlundska belöningen tillerkändes Docenten K. BOHLIN för hans från trycket utkomna arbete: »Formeln und Tafeln zur gruppenweise Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten».

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Upsala. *Universitets-Biblioteket.*
Zoologiska studier. Festskrift WILHELM LILLJEBORG tillegnad på hans åttionde födelsedag af svenska zoologer. Ups. 1896. 4:o.

Berlin. *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 41 (1896): H. 2—3. 8:o.

Bruxelles. *Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Annuaire. Année 63 (1897). 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 30: N:o 2. 1896. 8:o.
Annual report. 1895/96. 8:o.
Edinburgh. *R. Physical society.*
Proceedings. Vol. 13: P. 2 (1895/96). 8:o.
's-Gravenhage. *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
KOPS, J., & VAN EEDEN, F. W., Flora Batava. Afl. 315—316. 1896. 4:o.
Kjöbenhavn. *Dansk geologisk Forening.*
Meddelelser. N:r 3. 1896. 8:o.
Kristiania. *Kommittén for den Norske Nordhavs-Expedition.*
Den norske Nordhavs-Expedition. 23. 1896. 4:o.
London. *Nautical almanac office.*
The Nautical almanac for 1900. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 69—70 (1896): 12. 8:o.
— *Royal society.*
Report of the proceedings at the international conference on a catalogue of scientific literature held in London, July 14—17, 1896. 8:o.
Montevideo.
HONORÉ, CH., Loi du rayonnement solaire. 1896. 4:o.
— *Museo nacional.*
Anales. 7. 1896. 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 2 (1896): 11. 8:o.
New York. *Microscopical society.*
Journal. Vol. 12 (1896): 4. 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 10 (1896): Fasc. 6. 8:o.
Roma. *Ministero della pubblica isteruzione.*
GALILEI, G., Opere. Vol. 6. Firenze 1896. 8:o.
Würzburg. *Physik.-Med. Gesellschaft.*
Verhandlungen. N. F. Bd 30: N:o 6—8. 1896. 8:o.
Sitzungs-Berichte. 1896: N:o 1—5. 8:o.

Af utgifvarne:
Svenska jägarförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 34 (1896): H. 4. 8:o.
MITSCHERLICH, E., Gesammelte Schriften, hrsg. v. A. Mitscherlich. Berl. 1896. 8:o.

Af författarne:
BLOMSTRAND, C. W., Zur Diazofrage. Lpz 1896. 8:o.
THÉEL, HJ., Remarks on the activity of Amoeboid cells in the Echinoderms. Ups. 1896. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 1.
Stockholm.

Ueber das Verhältniss zwischen Inversionsgeschwindigkeit und Stärke der verdünnten Säuren.

Von WILH. PALMÆR.

[Mitgetheilt den 13. Januar 1897 von L. F. NILSON.]

Als Inhaber des *Beskow'schen* Stipendiums habe ich während der ersten Hälfte dieses Jahres im physischen Institut der Hochschule zu Stockholm die vorliegende Arbeit ausgeführt. Dem Vorsteher des Institutes, Herrn Prof. Dr. S. ARRHENIUS, sage ich hier meinen Dank sowohl für die Anregung zu dieser Untersuchung wie für seine Unterstützung während des Fortgangs derselben.

Beim Studium der Inversion des Rohrzuckers durch verschiedene Säuren bei wechselnder Konzentration hatte man zwar im Grossen und Ganzen einen Parallelismus zwischen Inversionsgeschwindigkeit und Konzentration der Wasserstoffjonen, wie sie sich aus den Bestimmungen der elektrischen Leitfähigkeit ergiebt, gefunden, aber es bestand keine Proportionalität. Die Inversionsgeschwindigkeit nahm bei steigender Konzentration schneller zu als es der Vermehrung der Wasserstoffjonen entsprach. ARRHENIUS[1]) betrachtet diese Erscheinung als einen speziellen Fall der allgemeinen Regel, wonach die katalytische

[1]) Zeitschr. phys. Chemie 4, 244 (1889).

Wirksamkeit der Wasserstoffjonen durch Gegenwart anderer Jonen verstärkt wird. Hierdurch werden die Änderungen der Inversionsgeschwindigkeiten bis zu einer gewissen Grenze der Verdünnung verständlich, dann treten aber Abweichungen zu Tage. Da z. B. die Inversionsgeschwindigkeit der 0,01-normalen Salzsäure etwa 10 % niedriger gefunden wurde, als man sie aus der Geschwindigkeit bei 0,1-normaler Säure unter blosser Berüchsichtigung der Änderung der Jonenkonzentration berechnen würde, so erklärt sich dies eben durch das oben Angeführte; hiernach möchte man erwarten, dass bei 0,001-normaler Säure, wo $^9/_{10}$ der in 0,01-normaler Säure befindlichen Jonen weggenommen sind, die Geschwindigkeit eine Erniedrigung von nur 1 % erleiden würde. In der That sind aber die Erniedrigungen viel grösser. So fand ARRHENIUS [1]) bei + 52,5° und 0,002-normaler Bromwasserstoffsäure die Inversionsgeschwindigkeit $6{,}12 \cdot 10^{-7}$ woraus für 0,0005-normale Säure die Geschwindigkeit $1{,}53 \cdot 10^{-7}$ berechnet wird; statt dessen wurde aber $1{,}34 \cdot 10^{-7}$ gefunden, ein Werth, der dem berechneten mit 12 % untergeht. Man hat diese Erscheinung auf experimentelle Fehlerquellen zurückgeführt, namentlich auf die Neutralisation eines Theiles der Säure durch Auflösen von Alkalien aus dem Glase. Bei Berechnungen haben die experimentell gefundenen Werthe keine Berücksichtigung gefunden, sondern man hat die Geschwindigkeiten sowohl bei der Inversion wie bei übrigen Reaktionen einfach der Jonenkonzentration proportional gesetzt. Es war nun meine Aufgabe die experimentellen Fehler nach Vermögen wegzuschaffen und nachzusehen, ob die Inversionsgeschwindigkeiten dann nach der Theorie ausfielen oder nicht.

TREVOR hat zwar einige Versuche über diesen Gegenstand gemacht und dabei gefunden, dass die Inversionsgeschwindigkeit der 0,005 bis 0,0003-normalen Salzsäure proportional der Jonenkonzentration ist. [2]) Die Versuche von TREVOR wurden theils in Glasröhren, theils in Silberrörchen ausgeführt; da sie aber

[1]) Zeitschr. phys. Chemie 4, 239 (1889).
[2]) Zeitschr. phys. Chemie 10, 330 (1892).

nur wenige sind und zum Theil unter sehr schwierigen Versuchsbedingungen ausgeführt worden sind, indem die Versuchszeit bis zu 5 Minuten herunterging, schien aber eine mehr eingehende Prüfung nothwendig.

1. Zur Theorie der Inversion.

Bevor ich meine Versuche beschreibe, möchte ich in der Kürze einige Rechnungen besprechen, die ich ausgeführt habe, um zu erfahren, inwieweit eine genauere Methode der Berechnung als die gewöhnliche die Daten der Versuche zum besseren Recht kommen liesse. Bei der Berechnung des Inversionvorganges:

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \rightleftarrows \underset{\text{Dextrose}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\text{Lävulose}}{C_6H_{12}O_6}$$

wird zuerst allgemein angenommen, dass die Reaktion in der Richtung von rechts nach links mit einer verschwindend kleinen Geschwindigkeit verläuft. In der That fehlt auch zur Zeit jeder Grund, dieser Geschwindigkeit eine endliche Grösse zu ertheilen. Eine experimentelle Prüfung scheint jedoch nicht ausgeschlossen — man könnte Lösungen von Dextrose und Lävulose vermischen und beobachten, ob die Mischung die berechnete Linksdrehung zeigte oder, eventuell nach einiger Zeit, eine schwächere.

Ohne Rücksicht hierauf bekommt man somit die bekannten Gleichungen einer bimolekularen Reaktion:

$$dx = \varrho_b (a - x)(W - x)\, dt \tag{1 a}$$

$$\varrho_b = \frac{1}{(a - W)\, t} \ln \frac{(a - x)\, W}{(W - x)\, a} \tag{1 b}$$

wo ϱ_b den Geschwindigkeitskoefficienten, a und W die anfänglichen Konzentrationen des Rohrzuckers und des Wassers, x die zur Zeit t umgesetzte Menge der zwei Molekülgattungen bezeichnen. Für gewöhnlich wird aber nun des weiteren angenommen, dass die Änderung der Konzentration des Wassers vernachlässlich

ist, und man bekommt die Formel für monomolekulare Reaktionen:

$$dx = \varrho_m (a - x)\, dt \tag{2 a}$$

$$\varrho_m = \frac{1}{t} ln \frac{a}{a - x} \tag{2 b}$$

wo ϱ_m somit den Geschwindigkeitskoeffizienten bedeutet, den man aus den Daten der Versuche erhält, wenn man die Zuckerinversion als eine monomolekulare Reaktion betrachtet.

Ich habe den Einfluss dieser Ungenauigkeit auf die verschiedenen Werthe des ϱ_m berechnet, die man einerseits während des Laufes einer Versuchsserie, andererseits bei wechselnder Anfangskonzentration der Zuckerlösungen erhält. Wir werden demnächst den ersteren Einfluss berechnen.

Ich benutzte stets eine Lösung, die 100 gr. Zucker im Liter enthielt. Aus einer Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Lösung berechnete ich, dass im Liter 934 gr. Wasser sich befanden. Die Lösung war somit in Bezug auf das Zucker 0,292-normal und in Bezug auf das Wasser 51,9-normal. Zur vollständigen Inversion wurden somit 0,292 Grammoleküle oder 0,56 % der ganzen Menge Wasser gebraucht, also eine nicht ganz unerhebliche Menge. Ich berechnete nun das Verhältniss der Grössen ϱ_b und ϱ_0, wobei ϱ_b den nach Formel (1 *b*) berechneten Geschwindigkeitkoeffizienten darstellt, ϱ_0 aber den Koeffizienten, den man erhält, wenn in (1 *b*) $\frac{W}{W - x} = 1$ gesetzt wird. Bei verschiedenen Stufen der Inversion nimmt dies Verhältniss verschiedene Werthe an:

Invertierter Theil des Zuckers.	ϱ_0/ϱ_b	Abweichung in %.
0,1	1,0055	0,55
0,3	1,0049	0,49
0,5	1,0042	0,42
0,7	1,0032	0,32
0,9	1,0022	0,22

Die bei meinen Beobachtungen umgesetzten Zuckermengen lagen sämmtlich zwischen 0,3 und 0,9. Die nach gewöhnlicher Art berechneten Koeffizienten fielen somit 0,49 bis 0,22 % zu hoch aus. Da es mir eigentlich nur darauf ankam, unter einander vergleichbare Werthe der Koeffizienten zu erhalten, so fällt nur die Differenz dieser Abweichungen, somit 0,49—0,22 = 0,27 % in Betracht. Mit anderen Worten, ein Koeffizient, der berechnet wurde aus einer Beobachtung, bei der 0,9 des Zuckers umgesetzt waren, sollte um 0,27 % erhöht werden, um mit einem Koeffizienten vergleichbar zu werden, der aus einer Beobachtung bei umgesetzter Zuckermenge = 0,3 erhalten wurde. Eine solche Korrektion kommt bei meinen Versuchen, die ziemlich einfach angeordnet waren und eigentlich nur relativ richtige Werthe bezweckten, kaum in Betracht, weshalb ich sie versäumt habe. Hierzu kommt noch, dass der Verbrauch von Wasser durch eine Kontraktion während der Inversion zum Theil kompensiert wird; diese beträgt bei einer 25 %-igen Zuckerlösung 0,538 % des anfänglichen Volumes.[1] Hieraus berechnet sich für eine 9,7 %-ige Lösung wie die meinige eine Kontraktion von 0,21 %. Bei sehr genauen Messungen dagegen müssen diese Verhältnisse berücksichtigt werden.

Wir wollen nun die Geschwindigkeiten bei wechselnder Anfangskonzentration der Zuckerlösung betrachten. Wir können die Berechnung bequem und mit hinreichender Genauigkeit folgendermassen ausführen. Nehmen wir an, dass in Formel (1 a) x gegen W verschwindend klein sei, dann bekommen wir

$$dx = W\varrho_b (a - x)\, dt\,. \tag{3}$$

Vergleichen wir die Formeln (2 a) und (3), dann bekommen wir

$$\varrho_m = W\varrho_b.$$

Der Koeffizient, den man erhält, wenn man die Reaktion als monomolekular betrachtet (ϱ_m) ist somit gleich dem richtigen

[1]) TOLLENS, Kohlenhydrate, Seite 132 (Breslau 1888).

Koeffizienten (ϱ_b), multipliziert mit der molekularen Konzentration des Wassers (W). Ohne Rücksicht auf die kleinen Veränderungen, welche die Konzentration des Wassers während des Fortgangs des Versuches erleidet, und deren Werth wir oben festgestellt haben, giebt uns die folgende kleine Tabelle der molekularen Konzentration des Wassers in Zuckerlösungen von verschiedenen Procentgehalten genügenden Aufschluss über die Änderungen des ϱ_m. Die Tabelle ist mit Hülfe der bekannten spezifischen Gewichte der Zuckerlösungen berechnet.

Prozentgehalt der Zuckerlösung.	W.
4	54,18
10	52,01
20	48,16
30	43,94
40	39,3

Macht man somit einerseits einen Versuch mit 4-prozentiger, anderseits mit 40-prozentiger Zuckerlösung, jedesmal aber die Versuche nach Formel (2 *b*) berechnet, so kann man nicht konstante Werthe des Geschwindigkeitskoeffizienten erwarten, sondern sollte bei 40-prozentiger Lösung einen Werth, der im Verhältniss 39,3 : 54,18 oder 0,725 mal kleiner ist, erhalten.

Ostwald,[1] Spohr[2] u. A. haben die Inversion in verschieden konzentrierten Lösungen vorgenommen, die Resultate wie üblich nach Formel (2 *b*) berechnet und eine starke Änderung des Koeffizienten konstatiert, aber gerade in entgegengesetzter Richtung gegen die obige Rechnung, indem der Koeffizient bei wachsender Konzentration des Zuckers zunahm. So fand z. B. Ostwald (l. c.), dass die Koeffizienten bei 40- und 4-prozentiger Lösung im Verhältniss 58,32 : 38,29 oder 1,523 : 1 zu einander standen. Die gefundene Geschwindigkeit bei 40-prozentiger Lösung ist somit 1,523 : 0,725 oder 2,10 mal grösser als die berechnete.

---

[1] Journ. f. prakt. Chemie N. F. 31, 315 (1885).
[2] Journ. f. prakt. Chemie N. F. 33, 265 (1886).

Man hat somit mit viel grösseren Abweichungen zu thun, als man bisher angenommen hat.

Die Ursache dieser Abweichung bleibt noch dunkel. SPOHR (l. c.) erklärt die Sache dadurch, dass in den stärkeren Zuckerlösungen wenig Wasser vorhanden ist und dadurch die Säure konzentrierter und demzufolge die Inversion beschleunigt wird. Nach der elektrolytischen Dissociationstheorie muss aber gerade das Entgegengesetzte eintreten, denn durch Zusatz von Zucker wird die Dissociation der Säure, wenn auch nur wenig, zurückgedrängt. Zur Begründung seiner Ansicht stellte SPOHR einige Versuche an, deren Princip durch das folgende Citat erläutert wird: (l. c. Seite 267) »Je zwei Versuche wurden mit 4 Grm., 2 Grm. und 1 Grm. Zucker angestellt, welche zunächst in 10 Ccm. Wasser gelöst und nach erfolgter Lösung mit je 10 Ccm. $^1/_5$ normaler Bromwasserstoffsäure versetzt, zur Inversion bei 25° angestellt u. s. w.» Er erhält so konstante Werthe des Koeffizienten. Gegen diese Versuche können einige Einwände erhoben werden. Erstens ist bei denselben der Zuckergehalt nur im Verhältniss 1 : 4 (50 bis 200 Grm. im Liter) variiert worden, während bei den übrigen Versuchen derselbe etwa im Verhältniss 1 : 17 (2 bis 30 %) wechselte. Zweitens war die Säure bei den Controlversuchen nur 0,1-normal gegen 0,5-normal in den übrigen. Drittens erhält man natürlich durch Zusatz von 4 Grm. Zucker ein grösseres Volum als durch nur 1 Grm. und somit wird in der That die Säure schwächer sein.

Die Änderung der spezifischen Drehungen des Rohrzuckers und Invertzuckers mit der Konzentration hat nach OSTWALD[1]) keine Bedeutung bei der Berechnung der Inversionsversuche, weil bei denselben der Wassergehalt der Lösung fast konstant ist.

Wenn bei allen Versuchen dieselbe Zuckerkonzentration verwendet wird und dieselbe nicht etwa 100 Gr. pro Liter überschreitet, ist somit die Formel (2 *b*) zulässlich. Dieselbe lässt sich bekanntlich in die Formel

---

[1]) Journ. f. prakt. Ch. N. F., 29, 389 (1884).

$$\varrho = \frac{1}{t} ln \frac{\alpha_0 + \alpha'_0}{\alpha + \alpha'_0} \tag{4}$$

transformieren. Es bedeuten hier:

t die Zeit in Minuten von der ersten Probenahme gerechnet;

α_0 den anfänglichen Drehungswinkel;

α'_0 den Winkel nach vollendeter Inversion;

α den nach t Minuten beobachteten Drehungswinkel;

ln den natürlichen Logarithmus.

2. Die Versuchsmethode.

Die von mir benutzte Anordnung der Versuche war in der Hauptsache mit der von OSTWALD und Anderen benutzten übereinstimmend, so dass von einer näheren Beschreibung abgesehen werden kann.[1]) Ich benutzte somit einen grossen Wasserthermostaten, der mit Rührer nach OSTWALD, Thermoregulator, Thermometer und einem Netzboden zum Aufstellen der Flaschen versehen war. Der Thermostat wurde mit einem aus zwei Theilen zusammengesetzten Kupferdeckel bedeckt, um die Verdampfung des Wassers zu verhindern; es war dies viel reinlicher als das Wasser mit Paraffin zu überschichten. Die vorgewärmten, sterilisierten Lösungen von Zucker und Säure wurden in der Versuchsflasche vermischt, die Flasche durch einen mittelst Schnüre festgehaltenen Korkpfropfen geschlossen, nach einiger Zeit wurde eine Probe genommen, um den Anfangswinkel zu erhalten, und dann wurden zu passenden Zeiten noch vier Proben genommen, so dass im Ganzen vier einzelne Werthe des Geschwindigkeitskoeffizienten aus jeder Versuchsserie erhalten wurden. Da die Gefässe 100 cm^3 fassten und zur Polarisation jedesmal 17 cm^3 gebraucht wurden, konnten mehrere Proben nicht genommen werden. Zur Abkühlung der Proben im Polarimeterrohre benutzte ich Wasserleitungswasser, das im raschen

---

[1]) Vgl. z. B. OSTWALD, Journ. f. prakt. Chemie N. F. 29, 388 (1884) und 31, 308 (1885).

Strome das Glasröhrchen umspülte. Die Temperatur des Wassers variierte während eines Versuches nimmer mehr als 0,1°; bei verschiedenen Zeiten wechselte sie doch etwas. Wie die bezügliche Korrektur leicht und bequem angebracht wurde, werde ich unten zeigen.

Das Polarisationsinstrument bestand aus einem LAURENT-schen Halbschattenapparat mittlerer Grösse. Dasselbe war mit einer gewöhnlichen und einer Decimaltheilung versehen; ich benutzte die letztere, weil sie für die Rechnung etwas bequemer war. 1 Theilstrich entsprach 12,98 Minuten. Mit dem Nonius wurden Zehntel Theilstriche abgelesen, somit etwa 1,3 Minuten. Das Polarimeterrohr war 2 dm. lang.

Die zu den Versuchen gewählte Säure war Salzsäure in 6 Konzentrationen zwischen 0,1- und 0,001-normal. Die Lösungen enthielten stets fast genau 10 Gramme Rohrzucker in 100 cm^3.

Ueber verschiedene Details der Anordnung, die während der Untersuchung geändert wurden, werde ich an den betreffenden Stellen berichten. Hier mögen nur einige allgemeine Beobachtungen Platz finden.

Der ausserordentliche Einfluss der Temperaturvariationen auf den Geschwindigkeitskoeffizienten ist genügend bekannt. Ich benutzte ein Thermometer von GEISSLER, das in $^1/_{10}$ Grade getheilt war und dessen Angaben für Nullpunkt und herausragenden Faden korrigiert wurden. Die Temperatur war bei den meisten Versuchen etwa + 48°. Um zu beurtheilen, ob die Umrührung genügend kräftig sei, beobachtete ich das Thermometer durch ein Fernrohr. Ich sah dann dass bei zu langsamem Gang des Rührers das Thermometer schnelle Variationen der Temperatur anzeigte. Z. B. während 5 Minuten, da eine Ablesung für jede zehnte Sekunde geschah, variierte die Temperatur zwischen 48,20° und 48,30°. Es musste dies auf ungenügende Mischung des Thermostatenwassers beruhen, denn wenn mit Hülfe einer besonderen Flamme die Umlaufgeschwindigkeit des Propellers bis auf 3 Touren pro Minute gesteigert wurde,

wurden die Oscillationen, die man bei Ablesungen jede zehnte Sekunde während 5 Minuten beobachtete, auf 0,03° bis 0,05° beschränkt. Eine grössere Umlaufgeschwindigkeit konnte durch eine Flamme nicht erreicht werden. Es ergiebt sich aus dem Angeführten, dass man sich nicht mit einem einzelnen Fernrohrablesung begnügen durfte; vielmehr wurden bei bestimmter Zeit die Temperaturen während 5 Minuten von 10 zu 10 Sekunden notiert, das Mittel genommen und als die richtige Temperatur betrachtet. Solche Bestimmungen wurden von Zeit zu Zeit wiederholt. Zur Ermittlung der mittleren Temperatur während eines Versuches, wurde ein Diagramm über die Beobachtungen angefertigt und benutzt. Die mittlere Temperatur stieg von Tag zu Tag ein wenig, was von dem Verdampfen des Wassers herrührte, wodurch der Abstand von der heissen Bodenschicht zur kälteren Flächenschicht etwas vermindert wurde. Es wäre leicht ein konstantes Niveau anzuordnen.

Ich beobachtete, dass etwa 45 Minuten erforderlich waren bis 100 cm³ Wasser von + 15°, in einem dünnen Glaskolben aufbewahrt und im Thermostaten gesetzt, die Temperatur + 48° des Thermostatenwassers auf 0,01° genau angenommen hatte. Auch beobachtete ich dass wenn aus einem solchen, genügend vorgewärmten Kolben, 100 cm³ in einer Pipette aufgesogen, welche auf dem Deckel des Thermostaten vorgewärmt worden war, einige Sekunden in der Pipette gehalten und dann wieder in den Kolben gelassen wurden, so fiel die Temperatur um etwa 3°, und es dauerte 20 bis 25 Minuten, bis die Flüssigkeit wiederum die Temperatur des Thermostaten auf 0,01° genau angenommen hatte. Diese Ergebnisse sind bei dem Mischen der Flüssigkeiten berücksichtigt worden, so dass die erste Probe nicht zu früh genommen wurde; eine Folge derselben ist dass bei 0,1-normaler Säure der Anfangswinkel klein wird.

Um die Frage zu beantworten, wie viel die Inversion während der Zeit zwischen Probenahme und Ablesung der Drehungswinkel (nach 10′) vorschritt, beobachtete ich den Gang der Abkühlung im Polarimeterrohre und berechnete die jeder Temperatur

entsprechende Reaktionsgeschwindigkeit nach der Formel von ARRHENIUS:[1])

$$\varrho_{T_1} = \varrho_{T_0} \cdot e^{12\,810 \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0 \cdot T_1}} \tag{5}$$

wobei ϱ_{T_1} und ϱ_{T_0} die Inversionsgeschwindigkeiten bei den absoluten Temperaturen T_1 und T_0 bezeichnen und e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Eine kleine Tabelle zeigt das Resultat; die Inversionsgeschwindigkeit bei + 48° ist = 100 gesetzt.

Zeit nach der Probenahme.	Temperatur der Probe.	ϱ.
0′	+ 48°	100
1′	+ 27°	6,1
2′	+ 19°	1,8
3′	+ 18°	1,6
4′	+ 17,2°	1,4
5′ u. s. w.	+ 17,0°	1,4

Die Werthe von ϱ wurden in einer Kurve aufgetragen und mit deren Hülfe die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit während der fraglichen 10 Minuten zu 5 % des bei + 48° beobachteten geschätzt. Die Inversion während der Zeit des Abkühlens entspricht somit die Inversion während 0,5 Minuten bei + 48° und die beobachtete Drehung entspricht einer Zeit von 30″ nach der Probenahme. Da dasselbe sich bei allen Probenahmen wiederholt, so wird kein konstanter Fehler eingeführt, sondern nur ein zufälliger, welcher von den verschiedenen zur Probenahme und Abkühlung erforderlichen Zeiten herrührt. Bei 0,1-normaler Salzsäure, wobei nur 15′ zwischen jeder Beobachtung verfliessen, kann der Fehler von einiger Bedeutung sein; bei 0,01- bis 0,001-normaler Säure kommt er gar nicht in Betracht.

Unter den vier zu beobachtenden Elementen der Formel (4), d. h. t, α_0, α'_0 und α, werde über α'_0 ein Wort gesagt. Dasselbe bezeichnet die Drehung nach vollendeter Inversion und wurde aus bekannten Daten berechnet, wie unten näher erörtert

[1]) Zeitschr. phys. Chemie 4, 227 (1889).

werden soll. Oben ist schon angedeutet, dass die Temperatur des Kühlwassers bei den verschiedenen Beobachtungen um zwei oder drei zehntel Grad schwanken kann. Hierfür wird eine Korrektion einfach dadurch angebracht, dass dem α'_0 ein etwas verschiedener Werth je nach der fraglichen Temperatur ertheilt wurde. Der Einfluss der Temperatur auf die Drehung des Invertzuckers ist ja völlig bekannt, während die Drehung des Rohrzuckers durch die Temperatur fast gar nich beeinflusst wird. Wir kommen in der fünften Abtheilung auf diese Berechnungen zurück.

3. Die Fehlerquellen.

Die ersten Versuche. Bei den ersten Versuchen ging ich von der Annahme aus, dass die Hauptursache zu dem schnellen Abnehmen des Geschwindigkeitskoeffizienten bei grösseren Verdünnungen als etwa 0,01-normal die theilweise Neutralisation der Säure durch das Glas sei. Prof. ARRHENIUS theilte mir mit, dass er bei seinen eingangs erwähnten Versuchen gewöhnliche, einfache Glasfläschchen benutzte. Ich versuchte daher mit Kölbchen aus Jenaglas, die übrigens schon voraus zu ähnlichen Versuchen gedient hatten und somit sehr resistent sein dürften.[1]) Der Zucker war eine als sehr rein bezeichnete Handelswaare, aus losen, 3—4 mm. grossen Kryställchen bestehend, die schwach gelblich waren. Seine Drehung sowohl vor wie nach Inversion gab völlige Reinheit an. Ich bereitete eine durch Aufkochen und Zusatz von Aseptikum sterilisirte Lösung von 200 Gram Zucker im Liter, brachte 50 cm^3 derselben in ein Kölbchen aus Jenaglas, wonach 50 cm^3 desgleichen vorgewärmter 0,2-, 0,02- oder 0,002-normaler Salzsäure hinzugefügt und der Verlauf der Inversion wie gewöhnlich beobachtet wurde. Die Temperatur war beinahe konstant + 41,90°. Die kleinen Temperaturschwankungen wurden beobachtet und die mittlere Tem-

[1]) Vgl. z. B. ARRHENIUS Zeitschr. phys. Ch. 4, 288 (1889) und TREVOR, dieselbe Zeitschr. 10, 324 (1892).

peratur berechnet. Sodann wurden alle Versuche mit Hilfe der Formel von ARRHENIUS auf + 41,90° bezogen. Die zu einer Versuchsserie erforderliche Zeit war bei 0,1-, 0,01- und 0,001-normaler Säure bezw. etwa 3, 30 und 300 Stunden; dieser Verlauf war unnöthig langsam, woher später eine höhere Temperatur gewählt wurde. Das Resultat der Versuchsreihen enthält die folgende Tabelle, worin

T = Temperatur des Thermostaten;

n = Normalität der Säure;

ϱ = Inversionsgeschwindigkeit;

Δ = die Differenz zweier nach einander stehenden Werthe von $\frac{\varrho}{n} \cdot 10^4$;

% = diese Differenz ausgedrückt in Prozenten des höheren Werthes von $\frac{\varrho}{n} \cdot 10^4$.

$T = + 41,90°$.

n.	ϱ.	$\frac{\varrho}{n} \cdot 10^4$.	Δ.	%.
0,1	$373 \cdot 10^{-5}$	373	—	—
0,01	$337 \cdot 10^{-6}$	337	36	9,7
0,001	$220 \cdot 10^{-7}$	220	117	35

Aus der Tabelle ergiebt es sich, dass der Werth von ϱ für 0,001-normale Säure mit nicht weniger als 35 % dem Werthe untersteigt, den man aus ϱ für 0,01-normale Säure berechnet hatte. Es ist dies eine weit grössere Differenz als die oben Seite 6 angeführte von 12 %, welche ARRHENIUS gefunden hatte. Es leuchtet somit ein, dass andere Fehlerquellen als das Glas vorhanden waren, und ich musste nach mehreren Ursachen der Neutralisation suchen, wobei ich hinter einander die Einwirkung des Zuckers, des Wassers und der Gefässwände untersuchte.

Der Zucker. Ich untersuchte zuerst ob der verwendete Zucker durch einen Kalk- oder Kaligehalt die Inversionsgeschwindigkeit vermindern könnte. Es ist hierfür durchaus nicht

nöthig, dass freies Alkali vorhanden sei, sondern es genügt, wenn es an Kohlensäure oder eine organische Säure gebunden vorkommt. Mit Salzsäure entsteht dann Chlorcalcium und eine sehr schwach dissociierte Säure, die viel langsamer als Salzsäure invertiert. In der That reagirte eine Lösung von 200 Grm. Zucker im Liter (somit doppelt so stark als die Versuchsflüssigkeit) gar nicht auf Phenolphtalein, obwohl 0,0001-normale Natronlauge in 1 dm. Schicht noch deutliche Rosafarbe annahm. Ich ging daher zur Aschenanalyse über. Die beobachtete Abweichung in der Geschwindigkeit war 35 %; in 100 cm^3 0,001-normaler Säure haben wir 3,6 mg. Chlorwasserstoff und zur Neutralisation eines Drittels davon sind 0,9 mg. Kalk erforderlich. Dies entspricht aber nur 0,01 % von den verwendeten 10 Gr. Zucker.

Bei der Einäscherung musste Glühen womöglich vermieden werden, damit kein Verlust an Alkali stattfinden könnte; ausserdem konnte die Verbrennung nicht in bewegter Luft vor sich gehen, weil alsdann die Asche weggeführt wurde. Ich schlug daher den folgenden Weg ein. 10 gr. Zucker wurden in einer geräumigen Platinschale erhitzt, zuerst auf dem Asbestteller und dann vorsichtig über einer hin und her bewegten, freien Flamme, bis keine brennbaren Dämpfe mehr entwichen. Glühen wurde vermieden. Die rückständige, schwarze Glanzkohle, deren Gewicht 2—3 gr. betrug, wurde pulverisiert und in ein Platinschiffchen gebracht. Dasselbe wurde in ein schwer schmelzbares Glasrohr im Verbrennungsofen gesetzt und Sauerstoff übergeleitet; das Schiffchen wurde nicht zum Glühen erhitzt, wohl aber der vordere Theil des Glasrohres, so dass der Sauerstoff möglichst heiss zur Kohle gelangte. So gelingt die Verbrennung sicher und schnell.

Ich untersuchte drei Zuckersorten:

		Mgr.	%.
		Asche aus 10 grm. Zucker.	
I.	Handelswaare: lose Kryställchen	6,6	0,066
II.	Saccharose von Kahlbaum	0,6	0,006
III.	Ungefärbten Hutzucker, Marke »Tanto« .	0,2	0,002

Die Probe I war der zu den ersten Versuchen verwendete Zucker. Er enthielt somit eine nicht unerhebliche Menge Asche, die alkalisch war, sich unter Aufbrausen zum grossen Theil in Salzsäure löste und in der ausser Kieselsäure und Eisenoxyd noch *Kalk* und *Kali* (letzteres spektroskopisch) nachgewiesen wurden.

Die Probe II bestand aus völlig weisser, chemisch reiner Saccharose von *Kahlbaum*, die zu allen folgenden Versuchen verwendet wurde. Die Asche löste sich nicht merklich in Salzsäure und bestand wesentlich aus Kieselsäure. Diese Saccharose war somit als genügend rein anzusehen. Die Feuchtigkeit derselben wurde auch untersucht; der Zucker verlor im Exsiccator nur etwa 0,02 % an Gewicht.

Die Probe III zeigt, dass auch Handelszucker mit genügend geringem Aschengehalt bezogen werden kann. Die Probe bestand aus einem nicht gefärbten und daher schwach gelblichen Hutzucker, der in Apotheken Verwendung findet; die Probe war aus dem Inneren des Stückes genommen und somit von Staub ganz frei. Ein wenig Staub auf den Stückchen des *Kahlbaumschen* Präparates kann leicht den ein bischen höheren Aschengehalt desselben erklären. Wegen seiner rein weissen, auch nicht bläulichen Farbe wurde die *Kahlbaumsche* Saccharose vorgezogen und mag zu ähnlichen Versuchen empfohlen werden.

Die Resultate der Aschenanalysen wurden bestätigt durch einige Beobachtungen der elektrischen Leitfähigkeiten der reinen und der mit Zucker vermischten Säuren. Die Bestimmungen wurden in bekannter Weise nach KOHLRAUSCHS Methode ausgeführt. Ich untersuchte zuerst eine Mischung von 5 cm^3 z. B. 0,2-normale Säure und 5 cm^3 Wasser und dann 5 cm^3 Säure und 5 cm^3 Zuckerlösung mit 200 Grm. Zucker im Liter. Die Leitfähigkeiten des Wassers und der mit dem gleichen Volume Wasser verdünnten Zuckerlösung wurden bestimmt und Korrektionen angebracht. Die Leitfähigkeit des Wassers betrug etwa $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ Quecksilbereinheiten.

Die unten stehenden Leitfähigkeiten sind in einem willkürlichem Maasse angegeben. Versuchstemperatur + 20°.

I. Handelswaare. Lose Kryställchen.

n.	Leitvermögen. Säure rein.	Leitvermögen. Säure + Zucker.	Verminderung in %.
0,1	324	272	16,0
0,01	34,2	28,2	17,5
0,001	3,75	2,44	34,8

II. Kahlbaums Saccharose.

n.	Leitvermögen. Säure rein.	Leitvermögen. Säure + Zucker.	Verminderung in %.
0,1	265	221,9	16,3
0,01	28,1	23,77	15,4
0,005	14,00	11,86	15,3
0,001	2,703	2,301	14,9

Ein Blick auf die Ziffern zeigt, dass bei KAHLBAUMS Saccharose die prozentuale Verminderung bei allen Verdünnungen 15—16 % ausmacht, und somit wesentlich auf gesteigerte innere Reibung (und ein wenig verminderte Dissociation) beruht, keineswegs aber durch entstandenes, schlechter leitendes Kalk- oder Alkalisalz hervorgerufen wird, denn in solchem Falle sollte die Verminderung bei 0,001-normaler Säure grösser sein. Die letztgenannte Wirkung tritt aber deutlich zu Tage beim unreinen Handelszucker, wobei die Verminderung der Leitfähigkeit bei 0,001-normaler Säure mehr als doppelt so gross ist.

Ich stellte nun einige Versuchsreihen mit der reinen Saccharose statt des Handelszuckers an, aber unter sonst gleichen Bedingungen. Die Resultate einiger Versuchsreihen werden angeführt. Sie gelten für die Temperatur + 48,18°.

n.	$\varrho \cdot 10^6$.	
0,01	1757	
0,001	157,2	Mittel: $155,1 \cdot 10^{-6}$
0,001	153,1	

Aus ϱ für $n = 0{,}01$ berechnet sich ϱ für $n = 0{,}001$ zu $175{,}7 \cdot 10^{-6}$. Die Verminderung beträgt 11,7 % statt der früher beobachteten von 35 %. Durch Verwendung reinen Zuckers ist somit zwar viel aber nicht Alles gewonnen. Die bleibende Differenz ist von derselben Grösse, wie sie ARRHENIUS fand, d. h. 12 %.

Das Wasser. In dem destillierten Wasser konnte, ausser den aus dem Gefässe gelösten Bestandtheilen, nur Ammon eine schädliche Wirkung ausüben. Auf Ammon wurde mit NESSLERS Reagens geprüft. Ich nahm zwei gleiche Cylinder, goss in den einen 50 cm³ des Wassers nebst 2 cm³ vom Reagens, in den zweiten 25 cm³ einer bekannten Ammonlösung nebst 2 cm³ vom Reagens. Wenn die Ammonlösung $\frac{1}{240000}$ normal war, konnte kein bestimmter Unterschied der Färbung mehr wahrgenommen werden und somit musste der totale Ammongehalt der beiden Lösungen gleich sein. Da der im zweiten Cylinder absichtlich zugesetzte Ammoniak die Hälfte der im ersten Cylinder befindlichen Ammoniakmenge gerade kompensirte, so musste das benutzte Wasser selbst eben eine $\frac{1}{240000}$ normale Ammonlösung darstellen. Dadurch konnte aber nur 0,4 % der 0,001-normalen Säure neutralisiert werden, und somit wurden die Abweichungen nicht erklärt. Nach FRESENIUS [1]) soll man 0,0025 mg. Ammon in 50 cm³ Wasser d. h. in $\frac{1}{340000}$ normaler Lösung noch gut bestimmen können.

Die Gefässe. Es blieb nun als Ursache zur Neutralisation der Säuren aus den Glasgefässen gelöstes Alkali zurück. Dieser Einfluss ist in den Seite 20 angeführten Ziffern bemerkbar. Das zu den dort erwähnten Versuchen benutzte Wasser war ein Paar Wochen in einer Damejeanne aus grünem Glas aufbewahrt worden und darauf hatten die daraus bereiteten Zucker- und Säurelösungen vierzehn Tage in gewöhnlichen Reagensflaschen gestanden. Der Fehler tritt auch zu Tage, wenn man den Seite 20 angeführten Mittelwerth für 0,001-normale Säure:

$$\varrho = 155{,}1 \cdot 10^{-6}$$

mit dem endgültigen Werth, den wir anticipieren können, vergleicht:

$$\varrho = 183 \cdot 10^{-6}.$$

Die Verminderung beträgt etwa 15 %. Um den Fehler zu vermeiden, musste ich Wasser benutzen, das nie in Berührung mit

[1]) Quant. Analyse, Sechste Aufl. II, 175.

Glas gekommen war. Ich liess daher das Wasser direkt aus dem zinnernen Kühlrohre des Destillationsapparates in einer verzinnten Kupferflasche aufsammeln. Es liegt grosses Gewicht darauf, dass reinstes Zinn zur Verzinnung verwendet wird, denn sonst gehen schnell nachweisbare Mengen Bleihydrat in Lösung. Ich konnte nicht völlig über diese Schwierigkeit hinkommen. Sechs Tage in der Kupferflasche aufbewahrtes Wasser blieb nach Zusatz von Schwefelwasserstoffwasser nicht mehr völlig farblos, sondern zeigte, mit frischem Wasser verglichen, eine dunkle Nuance. Im Liter befand sich 0,0019 gr. feste Substanz; schätzt man das Bleioxyd zu $^2/_3$ davon, so würde dies einer 0,00001-normalen Lösung von Bleioxyd entsprechen. Demzufolge wurde das Wasser zu den Versuchen stets möglichst frisch verwendet; mit Schwefelwasserstoff durfte es nicht die geringste dunkle Nuance geben. Ein Liter desselben Wassers, einige Stunden im Glas aufbewahrt, lieferte 0,0008 gr. Rückstand. Das Leitvermögen betrug, wie schon erwähnt, etwa $3 \cdot 10^{-10}$ Quecksilbereinheiten.

Des weiteren nahm ich die Inversion in Platingefässen vor und benutzte hierzu drei flaschenförmige Vorlagen zu Flusssäuredestillationsapparaten. Es schien von einigem Interesse zu sein einen Parallelversuch im Platingefäss und Jenakölbchen anzustellen, um zu erfahren, ob der Hauptfehler in der Aufbewahrung des Wassers in Gefässen aus gewöhnlichem Glase läge oder ob auch vom Jenaglase während der Inversion beachtungswerthe Mengen gelöst würden. In der That kann man aus KOHLRAUSCHS Versuchen [1]) schliessen, dass aus Jenaglas nicht grosse, aber doch merkbare Mengen gelöst werden. Derselbe fand nämlich, dass unter sonst gleichen Bedingungen aus Jenaer Gerätheglas dreimal weniger gelöst wurde als aus bestem Flaschenglase und zwanzigmal weniger als aus schlechtem Glase. Ausserdem wird aus Jenaglas hauptsächlich Kieselsäure gelöst. Der Versuch bestätigte diese Auseinandersetzungen. Zwei parallele Versuchsreihen mit 0,001-normaler Säure, wovon die eine in Jenakölbchen,

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Ges. 26, 3000 (1893).

die andere in Platingefäss (unten vollständig wiedergegeben) ausgeführt wurde, ergeben bei + 48,18°

	$\varrho \cdot 10^6$.
Jenaglas . . .	178,9
Platin	183,0

Die Verminderung beträgt 2,2 %, ist somit nicht gross aber doch deutlich.

Birotation. Seite 15 ist erwähnt worden, dass die Inversionsgeschwindigkeit bei + 18° nur 1,6 % von der bei + 48° ausmacht und dass somit die im Polarimeterrohre während einiger Minuten stattfindende Inversion keine nennenswerthe Grösse erreicht, besonders bei den grösseren Verdünnungen der Säure. Um eine genaue Bestimmung der Drehung zu erhalten, machte ich daher in aller Ruhe eine grössere Anzahl Ablesungen, bemerkte aber dann, besonders bei 0,001-normaler Säure, dass der Winkel keineswegs konstant war, sondern eine stetige Verschiebung nach der Richtung fortgesetzter Inversion erlitt. Mit der Zeit wurde jedoch ein konstanter Werth erreicht. Ich fand bald, dass die Ursache der Erscheinung eine Birotation des gebildeten Invertzuckers war, und zwar so dass der Invertzucker allmählich stärkere Linksdrehung annahm. Wie aus der untenstehenden Tabelle deutlich hervorgeht, blieb nämlich die Erscheinung aus sowohl in der ersten Probe, wo noch keine bemerkenswerthe Mengen Invertzucker entstanden waren, wie auch in der ganz vollständig invertierten Lösung. TOLLENS fand, dass gleich konzentrirte Lösungen von Dextrose und Lävulose ihre Drehungen änderten von bezw. 105° bis 52,60° und — 104° bis — 92,09°. Die Änderung bei der Dextrose ist somit bei Weitem grösser wie bei der Lävulose. Nimmt man an, dass im Rohrzucker die Dextrose, eventuell auch der Lävulose, in der gewöhnlichen, festen Form sich vorfindet, so steht die gefundene Erscheinung, dass die Rechtsdrehung abnimmt, hiermit in Einklang.

Ich theile hier eine Beobachtungsreihe mit, die bei der Inversion mit 0,001-normaler Säure gemacht wurde. Es stehen in

der ersten horizontalen Zeile die Zeiten, wo die Proben genommen wurden, und in der ersten vertikalen die Zeiten, wonach die Ablesungen vorgenommen wurden. In der vertikalen Reihe mit Rubrik ∞ steht eine Beobachtung bei vollständiger Inversion. In der horizontalen Reihe mit Rubrik ∞ stehen die Endwerthe. Bei diesen ist der Fortlauf der Inversion im Polarimeterrohre berüchsichtigt worden; die diesbezügliche Korrektion betrug einige hunderttel Theilstriche. Ausserdem sind einige Beobachtungen, die nach mehr als 4 Stunden gemacht wurden, berüchsichtigt worden. Die Zeilen Δ_{10-20} und $\Delta_{10-\infty}$ enthalten die Differenzen zwischen den Drehungen nach bezw. 10, 20 und ∞ Minuten.

	0′.	2700′.	5490′.	8460′.	11250′.	∞.
10′	+ 61,41	+ 31,32	+ 12,20	— 0,5	— 6,98	— 17,65
20′	+ 61,42	+ 30,84	+ 11,16	— 1,61	— 8,17	— 17,71
30′	—	+ 30.72	+ 10,84	— 1,68	— 8,38	— 17,65
60′	—	+ 30,68	+ 10,70	— 1,95	— 8,70	— 17,68
120′	—	+ 30,51	+ 10,66	— 1,97	—	—
240′	—	+ 30,41	+ 10,59	—	— 8,75	—
∞′	—	+ 30,47	+ 10,60	— 1,97	— 8,75	—
Δ_{10-20}	—	0,48	1,04	1,11	1,24	—
$\Delta_{10-\infty}$	—	0,85	1,60	1,47	1,82	—

Zu dieser Tabelle werden einige Bemerkungen gefügt. Die Birotation erwies sich in stärkeren Säurelösungen schwächer als in den verdünnteren, und in 0,1-normaler Säure war sie kaum mehr bemerkbar. Die Änderungen von 10 bis 20 Minuten waren bei verschiedenen Normalitäten der Säuren und gleicher Anfangsdrehung etwa folgende:

Normalität.	0,001.	0,002.	0,005.	0,01.
Δ_{10-20}	1,11	0,91	0,56	0,29

Es stimmt dies mit den Angaben von Trey,[1]) Levy,[2]) u. A. wonach die Birotation durch Säuren beschleunigt wird. Die Erscheinung lässt sich somit am besten bei 0,001-normaler Säure studiren, und dies noch deswegen, dass dabei die fortgesetzte Inversion im Polarimeterrohre die kleinste Bedeutung hat. Um bei den übrigen Konzentrationen der Säuren die Korrektion für

[1]) Zeitschr. phys. Chemie 17, 301 (1895).
[2]) » » » 18, 193 (1895).

die Birotation anzubringen, berechnete ich zuerst das Verhältniss $\Delta_{10-\infty} : \Delta_{10-20}$ aus obiger Tabelle; es ergab sich zu bezw.

1,77 1,54 1,32 1,47

Mittel: 1,52.

Die Übereinstimmung der einzelnen Werthe ist nicht besonders gut, was auf unsichere Beobachtungszeiten zurückzuführen ist. Die Übereinstimmung mag aber hinreichend sein. Ich beobachtete bei den übrigen Säuren die Drehung nach 10′ und 20′ und zog vom letzteren Werthe die halbe Differenz ab, indem ich den Korrektionsfaktor = 1,5 statt = 1,52 setzte.

4. Die entscheidenden Versuche.

Nach allen Vorbereitungen können wir nun zu den schliesslichen Versuchen übergehen. Dieselben wurden mit gehöriger Beachtung der gemachten Erfahrungen über den Einfluss des Zuckers, des Wassers, der Gefässe und der Birotation angeordnet.

Somit wurde zu allen diesen Versuchen die Saccharose von KAHLBAUM angewendet, deren Reinheit oben Seite 19 aufgewiesen ist.

Das Wasser war frisch destilliert und in einer verzinnten Kupferflasche aufbewahrt worden. Bei der Bereitung der Lösungen ging ich von der Annahme aus, das bei 0,1-normaler Salzsäure nur ein unmerklicher Bruchtheil durch Alkali aus dem Glase neutralisiert werden könnte. Ich benutzte frisch bereitete, in Glasgefäss aufbewahrte $^1/_5$-normale Salzsäure. Die Versuche mit 0,1-normaler Salzsäure konnten, nach obiger Annahme, in Kölbchen von Jenaglas vorgenommen werden und auch die dazu gehörige Zuckerlösung in Glasgefässen bereitet werden. Bei den übrigen Versuchen wurde eine passende Menge der fünftelnormalen Säure abgewogen und im Platingefäss mit Zucker und Wasser vermischt. Es leuchtet ein, dass wenn ein kleiner Bruchtheil der fünftelnormalen Säure durch das Glas neutralisiert worden ist, ein gleicher, aber kein grösserer Bruchtheil der mehr verdünnten Säuren ebenfalls neutralisiert wird.

Als Beispiel nehme ich die Bereitung der Versuchsflüssigkeit für 0,005-normale Säure. In eine Platinflasche wurden neben ein Antiseptikum nach einander gebracht:

2,507 gr. $^1/_5$-normaler Salzsäure,
91,0 » Wasser,
10,00 » Zucker.

Die Säure und das Wasser wurden in der Flasche gewogen, der Zucker aber besonders gewogen und dann eingeschüttelt. Aus obigen Daten sollte nun berechnet werden, wie viele Gramme Zucker auf 100 cm^3 Lösung kämen, ebenso die Normalität der Säure. Für den erstgenannten Zweck bestimmte ich das spezifische Gewicht einer Zuckerlösung, die in 100 cm^3 eben 10,00 gr. Zucker enthielt und fand dasselbe gleich 1,0344 bei + 26°, bezogen auf Wasser von + 4°. Hieraus wird berechnet, dass 10,00 gr. Zucker + 93,44 gr. Wasser bei + 26° eben 100 cm^3 ausmachen. Mit Hilfe dieser Ziffern und mit Kenntniss des Wassergehaltes der $^1/_5$-normalen Salzsäure (spez. Gew. = 1,0027) kann, unter Annahme dass bei so kleinen Differenzen Proportionalität stattfindet, leicht berechnet werden, wie viele Gramme Zucker sich in 100 cm^3 obiger Säurelösung befindet. Nach Reduction der Wägungen auf den leeren Raum berechnet man, dass die fragliche Lösung 9,997 gr. Zucker auf 100 cm^3 enthält und 0,004996-normal in Bezug auf die Salzsäure ist. Statt dieser Zahlen können natürlich ohne Bedenken bezw. 10,00 gr. und 0,005-normal gesetzt werden; nicht immer gelang es aber so genau die gewünschte Konzentration zu treffen, weil man beim Abwägen des Wassers keine Pipette benutzen durfte, sondern auf Manipulieren mit einer Platinschale hingewiesen war.

Mit Hilfe der Bestimmungen von KOHLRAUSCH [1]) berechnen wir die Konzentrationen der Wasserstoffjonen. In der untenstehenden Tabelle steht unter *n* die Normalität der Säure, unter $\mu \cdot 10^8$ die molekulare Leitfähigkeit mit 10^8 multipliziert, woraus sich der Dissociationsgrad berechnet. Die mit einem Sterne be-

---

1) Wied. Ann. N. F. 26, 196 (1885).

zeichneten Werthe sind von KOHLRAUSCH angegeben, die übrigen interpoliert worden:

n.	$\mu \cdot 10^8$.	Dissociationsgrad.
0,001	3455*	1,000
0,002	3455*	1,000
0,005	3444	0,9968
0,006	3438*	0,9951
0,007	3432	0,9933
0,01	3416*	0,9887
0,1	3244*	0,9389

Durch Multiplikation der betreffenden Säurekonzentrationen mit dem Dissociationsgrade sind die in den folgenden Tabellen angegebenen Konzentrationen der Wasserstoffjonen berechnet.

Ich werde nun die einzelnen Rubriken der untenstehenden Tabellen besprechen.

α_0 ist die Drehung der ersten Probe, welche etwa 45′ nach der Einsetzung der Flaschen genommen wurde. Bei 0,1-normaler Säure wurden, um diese Zeit zu vermindern, Zuckerlösung und Säure getrennt vorgewärmt; da aber trotzdem nach den Erörterungen Seite 14 etwa 20′ nach der Mischung bis zur ersten Probenahme gewartet werden musste, so ist bei dieser Konzentration der Säure α_0 klein.

Unter *a*, *b*, *c*, *d* stehen die einzelnen Beobachtungen in jeder Versuchsreihe.

t bezeichnet die Temperatur der im Polarimeterrohre abgekühlten Probe.

α'_0 ist die Drehung nach vollendeter Inversion. Da die Saccharose von KAHLBAUM als rein erkannt war und auch richtige Drehung beim Auflösen in Wasser zeigte, so habe ich die ziemlich langwierige und wegen Veränderlichkeit der Zuckerlösung immer schwierige direkte Bestimmung der Enddrehung vermieden, und mit Hilfe der sehr genauen Untersuchungen von GUBBE[1]) dieselbe berechnet. Der Gang der Rechnung ist der folgende. Zuerst wird mit Hilfe der Formel

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Ges. 18, 2207 (1885).

$$[\alpha]_D^{20} = -(19,657 + 0,03611\,c)$$

wo c = Gramme Invertzucker auf 100 cm³ Lösung, die spezifische Drehung der Zuckerlösung bei + 20° berechnet. c wird erhalten durch Multiplikation der Rohrzuckermenge in 100 cm³ mit $\frac{360}{342} = \frac{20}{19}$. Hierdurch wird somit die Änderung der spezifischen Drehung mit der Konzentration berücksichtigt. Den Einfluss der Temperatur giebt die Formel:

$$[\alpha]_D^{t} = [\alpha]_D^{20} + 0,3041\,(t - 20) + 0,00165\,(t - 20)^2$$

wo t die Temperatur im Polarimeterrohre ist.

Dann folgt die Einwirkung der Säure. GUBBE hat nachgewiesen, dass Salzsäure die spezifische Drehung des Invertzuckers beeinflusst, indem dieselbe durch Anwesenheit der Säure erhöht wird. Er giebt seine Resultate in einer ziemlich unbequemen Art wieder, indem er die Drehungen für verschiedene Säuremengen, S, angiebt, wo S das auf 100 gr. Wasser + 10 gr. Invertzucker, somit auf $110 + S$ gr. Lösung kommende Säuregewicht ist. Da indes das spezifische Gewicht der Lösungen angegeben worden ist, so kann man die Normalität der Säurelösungen berechnen. Ich habe auf diese Weise die Angaben von GUBBE umgerechnet; es mag hier genügen anzuführen, dass durch 0,1-normale Salzsäure die spezifische Drehung um 0,63 % erhöht wird und dass bei den in Frage stehenden niedrigen Konzentrationen die Erhöhung der Normalität proportional ist. Ich habe dieselbe bis zu 0,007-normaler Säure, wo sie 0,04 % beträgt, berücksichtigt. Bezeichnen wir die auch für die Einwirkung der Säure korrigierte spezifische Drehung mit

$$[\alpha]_D^{t,s},$$

dann wird die Drehung α'_0 berechnet nach der Formel:

$$\alpha'_0 = \frac{[\alpha]_D^{t,s} \cdot l \cdot c \cdot 4,621}{100} - 0,27$$

wo l = Länge des Polarimeterrohres in dm., also 2;
c = Gramme Invertzucker in 100 cm³;

4,621 = ein Faktor, der die gewöhnlichen Kreisgrade zu Skalentheilen des von mir benutzten Polarisationsapparates überführt;

— 0,27 = ein Term, durch welchen der Nullpunkt des Apparates berücksichtigt wird; derselbe lag bei wassergefülltem Rohre bei + 0,27 Skalentheile.

α_{10} und α_{20} in den Tabellen bezeichnen die bezw. 10 und 20 Minuten nach der Probenahme beobachteten Drehungswinkel. α_∞ ist der mit Rücksicht auf die Birotation aus α_{10} und α_{20} berechnete, schliessliche Drehungswinkel. Über die Berechnung ist oben bei »Birotation» gesprochen. Bei 0,1-normaler Säure kommt keine Birotation vor, und daher wird nur ein Drehungswinkel, α, beobachtet. Die angeführten Winkel sind in der Regel das Mittel aus zehn Ablesungen.

T bezeichnet die mittlere Temperatur im Thermostaten. Über die Art der Berechnung derselben vgl. Seite 14.

Die *Zeiten*, die von der ersten Probe verflossen, sind in Minuten angegeben.

ϱ ist die nach Formel (4) berechnete Inversionsgeschwindigkeit bei der Temperatur T.

$\varrho + 48,18°$ — giebt der mit Hilfe von ARRHENIUS' Formel berechnete Inversionsgeschwindigkeit bei + 48,18° an. Die Temperatur + 48,18° wurde gewählt, weil von den Versuchstemperaturen gleich viele über wie unter dieser Temperatur lagen. Nur bei der ersten und zweiten Versuchsreihe mit 0,1-normaler Säure weicht die Versuchstemperatur T mit mehr als 0,1° von + 48,18° ab. Nach der ARRHENIUS'schen Formel ändert sich bei dieser Temperatur der Koeffizient ϱ mit 1,25 % für 0,1°, 2,52 % für 0,2° und 3,80 % für 0,3°, somit bei so kleinen Differenzen der Temperaturdifferenz proportional.

Die Versuche mit 0,1-normaler Säure waren die schwierigsten, weil hier die Versuchszeit ziemlich kurz war. Da aber andererseits die Versuche mit 0,001-normaler Säure über 8 Tage ausgedehnt werden mussten, so konnte nicht leicht eine bessere Temperatur gewählt werden.

I.

Normalität der Säure = 0,1.

» » Wasserstoffjonen = 0,0939.

Zucker auf 100 cm³ Lösung = 10,00 gr.

Gefäss: Glas.

Erste Versuchsreihe.

$\alpha_0 = + 24{,}06.$

	a	b	c
t	÷ 13,1°	+ 13,1°	+ 13,1°
α'_0	— 21,32	— 21,32	— 21,32
α	+ 9,34	— 0,69	— 7,10
T	+ 48,27°	+ 48,27°	+ 48,27°
Zeit	20′	40′	60′
$\varrho \cdot 10^5$	1960	1971	1934
$\varrho \cdot 10^5 + 48{,}18°$	1939	1949	1913

Mittel: $\varrho = 0{,}01934$.

Zweite Versuchsreihe.

$\alpha_0 = + 28{,}18.$

	a	b	c	d
t	+ 13,2°	+ 13,2°	+ 13,1°	+ 13,2°
α'_0	— 21,30	— 21,30	— 21,32	— 21,30
α	+ 6,42	— 2,64	— 7,01	— 10,42
T	+ 47,94°	+ 47,94°	+ 47,94°	+ 47,94°
Zeit	30′	51′	66′	81′
$\varrho \cdot 10^5$	1931	1912	1896	1870
$\varrho \cdot 10^5 + 48{,}18°$	1990	1970	1954	1927

Mittel: $\varrho = 0{,}01980$.

Dritte Versuchreihe.

$\alpha_0 = + 8{,}45.$

	a	b	c
t	+ 18,5°	+ 18,5°	+ 18,5°
α'_0	— 19,80	— 19,80	— 19,80
α	+ 1,37	— 3,22	— 7,17
T	+ 48,18°	+ 48,18°	+ 48,18°
Zeit	14,8′	27,8′	41,3′
$\varrho \cdot 10^5$	1949	1917	1949
$\varrho \cdot 10^5 + 48{,}18°$	1949	1917	1949

Mittel: $\varrho = 0{,}01938$.

Mittel der drei Versuchsreihen: $\varrho = 0{,}01951$ bei + 48,18°.

II.

Normalität der Säure = 0,00995.

» » Wasserstoffjonen = 0,00984.

Zucker auf 100 cm³ Lösung = 9,99 gr.

Gefäss: Platin.

$\alpha_0 = + 53,85.$

	a	*b*	*c*	*d*
t	+ 18,3°	+ 18,3°	+ 18,4°	+ 18,4°
α'_0	— 19,71	— 19,71	— 19,68	— 19,68
α_{10}	+ 25,87	+ 14,72	+ 8,07	+ 7,18
α_{20}	+ 25,81	+ 14,54	+ 7,77	+ 6,89
α_∞	+ 25,81	+ 14,47	+ 7,65	+ 6,77
T	+ 48,20°	+ 48,20°	+ 48,20°	+ 48,20°
Zeit	260′	417′	538′	558′
$\varrho \cdot 10^6$	1843	1836	1838	1831
$\varrho \cdot 10^6 + 48,18°$	1839	1832	1834	1827

Mittel: $\varrho = 0,001833$ bei + 48,18°.

III.

Normalität der Säure = 0,00704.

» » Wasserstoffjonen = 0,00699.

Zucker auf 100 cm³ Lösung = 10,026 gr.

Gefäss: Platin.

$\alpha_0 = + 51,19.$

	a	*b*	*c*	*d*
t	+ 18,3°	+ 18,3°	+ 18,3°	+ 18,5°
α'_0	— 19,78	— 19,78	— 19,78	— 19,72
α_{10}	+ 33,55	+ 29,28	+ 3,08	— 2,66
α_{20}	+ 33,40	+ 29,08	+ 2,98	— 2,88
α_∞	+ 33,35	+ 29,00	+ 2,87	— 2,90
T	+ 48,20°	+ 48,20°	+ 48,20°	+ 48,20°
Zeit	219′	285′	885′	1110′
$\varrho \cdot 10^6$	1322	1316	1291	1296
$\varrho \cdot 10^6 + 48,18°$	1319	1313	1288	1293

Mittel: $\varrho = 0,001303$ bei + 48,18°.

IV.

Normalität der Säure = 0,00500.

» » Wasserstoffjonen = 0,00498.

Zucker auf 100 cm[3] Lösung = 10,00 gr.

Gefäss: Platin.

$\alpha_0 = + 58,38.$

	a	b	c	d
t	+ 18,8°	+ 18,8°	+ 18,5°	+ 18,8°
α'_0	— 19,72	— 19,72	— 19,66	— 19,72
α_{10}	+ 33,87	+ 9,76	+ 0,07	— 2,57
α_{20}	+ 33,24	+ 9,21	— 0,49	— 3,21
α_{∞}	+ 33,19	+ 8,95	— 0,77	— 3,58
T	+ 48,20°	+ 48,20°	+ 48,20°	+ 48,20°
Zeit	420′	1085′	1525′	1697′
$\varrho \cdot 10^7$	9271	9236	9302	9273
$\varrho \cdot 10^7 + 48,18°$	9248	9213	9279	9250

Mittel: $\varrho = 0,0009248$ bei + 48,18°.

V.

Normalität der Säure = 0,002057.

» » Wasserstoffjonen = 0,002057.

Zucker auf 100 cm[3] Lösung = 9,972 gr.

Gefäss: Platin.

$\alpha_0 = + 60,52.$

	a	b	c	d
t	+ 17,8°	+ 17,8°	+ 17,8°	+ 17,8°
α'_0	— 19,81	— 19,81	— 19,81	— 19,81
α_{10}	+ 7,0	+ 4,85	— 1,07	— 3,45
α_{20}	+ 6,11	+ 4,14	— 1,98	— 4,73
α_{∞}	+ 5,41[1])	+ 3,84	— 2,48	— 5,37
T	+ 48,19°	+ 48,19°	+ 48,18°	+ 48,18°
Zeit	3040′	3200′	4080′	4515′
$\varrho \cdot 10^7$	3811	3821	3752	3799
$\varrho \cdot 10^7 + 48,18°$	3806	3817	3752	3799

Mittel: $\varrho = 0,0003798$ bei + 48,18°.

[1]) Nach 2h 30′ direkt beobachtet.

VI.

Normalität der Säure = 0,000989.
» » Wasserstoffjonen = 0,000989.
Zucker auf 100 cm³ Lösung = 9,986 gr.
Gefäss: Platin.

$\alpha_0 = + 61{,}41.$

	a	b	c	d
t	+ 18,1°	+ 18,1°	+ 18,2°	+ 18,8°
α'_0	— 19,75	— 19,75	— 19,72	— 19,69
α_{10}	+ 31,33	+ 11,77	— 0,6	— 7,90
α_{20}	+ 30,75	+ 10,75	— 1,88	— 9,06
α_{∞}	+ 30,46	+ 10,24	— 2,44	— 9,64
T	+ 48,09°	+ 48,13°	+ 48,15°	+ 48,16°
Zeit	2700′	5490′	8460′	11250′
$\varrho \cdot 10^7$	1779	1813	1828	1856
$\varrho \cdot 10^7 + 48{,}18°$	1799	1825	1835	1861

Mittel: $\varrho = 0{,}0001830$ bei + 48,18°.

5. Die Resultate.

In der untenstehenden Tabelle habe ich die Konzentrationen der Säuren (n_S) und der Wasserstoffjonen (n_H), die Inversionsgeschwindigkeiten (ϱ) und die Quotienten ϱ/n_H zusammengestellt

n_S	n_H	ϱ	ϱ/n_H
0,1	0,0939	0,01951	0,2078
0,00995	0,00984	0,001833	0,1863
0,00704	0,00699	0,001303	0,1863
0,00500	0,00498	0,0009248	0,1857
0,002057	0,002057	0,0003793	0,1844
0,00989	0,00989	0,0001830	0,1851

Diese Ziffern sagen uns, dass ϱ/n_H von 0,1- bis 0,01-normaler Säure mit 10,3 % abnimmt; danach bleibt das betreffende

Verhältniss beinahe konstant. Man sollte erwarten, dass es von 0,01- bis 0,001-normaler Säure mit etwa 1 % sinken würde; in der That ist eine Abnahme von der richtigen Grössenordnung vorhanden, obwie der letzte Werth des Quotienten ϱ/n_H ein wenig zu hoch ausgefallen ist, was auf einen kleinen Versuchsfehler unzweifelhaft beruht. Im Ganzen hat aber die Theorie eine vollständige Bestätigung gefunden.

Der Grund, dass die Versuche nicht auf noch grössere Verdünnungen ausgedehnt wurden, lag darin, dass für solche noch grössere Garantien für die Reinheit des Zuckers und des Wassers nothwendig erschienen.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 1.
Stockholm.

Bidrag till en monografi öfver Sveriges Sphæropsideer.

I.

Sphæropsideæ et Melanconieæ novæ in Suecia collectæ.

Af Tycho Vestergren.

[Meddeladt den 13 Januari 1897 genom Th. M. Fries.]

Under den tid, jag varit sysselsatt med studiet af den svenska svampfloran, har jag ägnat min uppmärksamhet äfven åt afdelningen *Sphæropsideæ* bland *fungi inferiores*. Sphæropsideerna, till hvilka närmast sluta sig de på öfvergången till *hyfomyceterna* stående *melanconieerna*, som jag dock här för bekvämlighetens skull sammanför med de förstnämnda, utgöra, som bekant, det conidiebildande stadium af ascomyceterna, som kallas *pyknid*- eller *spermogonie*-stadiet. Att med säkerhet uppvisa sambandet mellan sphæropsideen och den tillhörande ascomyceten är dock i de flesta fall synnerligen svårt. Ascomyceternas conidie-stadier uppträda oftast till både tid och rum skilda från ascus-generationen, mera sällan samtidigt med ascus-stadiet från samma mycel, såsom däremot ofta är fallet hos lafvarna. Att blott genom direkt iakttagelse i naturen med säkerhet komma till visshet om de olika stadiernas samhörighet är därför i de flesta fall omöjligt. Att, såsom i synnerhet Fuckel gjort, ofta endast på grund af att man träffar en ascomycet och en sphæropsidé samtidigt på samma värdväxt sluta sig till samhörigheten mellan

dem är alltför osäkert, och man kan i detta fall på sin höjd uttala en gissning. Den säkraste metoden är att genom kulturer söka förmå det ena stadiet af svampen att öfvergå till det andra. Sphæropsideerna kunna dock på detta sätt i likhet med hyfomyceterna endast sällan förmås att bilda ascus-stadiet; däremot har man något oftare lyckats att genom utsådd af ascosporer framkalla ett conidie-stadium, som dock vanligen blir en hyfomycet.

För närvarande måste därför spermogonie-stadierna beskrifvas såsom självständiga svampar, sphæropsideerna, till dess samhörigheten med deras respektive ascus-stadier blir påvisad, på samma sätt som æcidie-stadiet af en urediné, hvars utveckling i öfrigt är okänd, *ad interim* plägar uppställas som egen art. Men liksom en del uredineer för alltid synas ha stannat på æcidie- eller uredo-stadiet — blifvit »reducerade» — eller endast mycket sällan utveckla teleutospor-generationen, så måste man antaga, att en måhända ej så obetydlig del af ascomyceterna antingen helt och hållet förlorat sitt ascus-stadium eller endast undantagsvis utbilda detta. Såsom exempel på, att vissa ascomyceter endast sällan utbilda ascus-generationen, vill jag här blott påminna om det allbekanta förhållandet med *Sphærotheca pannosa* (WALLR.) LÉV., hvars conidie-stadium, *Oidium leucoconium* FR., är en allmän skadeparasit på odlade roser, men hvars ascus-stadium sällan finnes utbildadt. Sphæropsideen *Psilospora Quercus* RABH. förekommer ytterst allmänt på barken af unga ekgrenar, under det att ascus-stadiet, *Dichæna quercina* FR., endast ett par gånger blifvit anträffadt.

Allt sedan ELIAS FRIES' dagar har man i vårt land föga uppmärksammat Sphæropsideernas talrika grupp. I de samlingar af micromyceter, som jag gjort, har jag påträffat många i vårt land ej förut observerade former liksom äfven en del för vetenskapen nya. Jag vill för denna gång inskränka mig till att offentliggöra beskrifningarna på dessa senare, i hopp om att i en framtid äfven bli i tillfälle att göra en sammanställning af det viktigaste bland de öfriga.

En del af nedan beskrifna former har jag sändt till professor P. A. SACCARDO i Padua, och är jag honom tacksam för de råd och upplysningar, han i anledning däraf godhetsfullt lämnat mig. — Vid uppställningen följer jag SACCARDOS system i Sylloge Fungorum vol. III. —

Sphærioideæ hyalosporæ.

1. **Phyllosticta Phlogis** n. sp.

Maculis amphigenis, exarescentibus, sordide albidis, brunneo-cinctis, sæpe marginalibus, ± rotundatis, 5—10 mm. in diam.; peritheciis erumpentibus, epiphyllis, sparsis, sphæroideis, minutis, 60—100 μ in diam., membranaceis, papillatis, nigris, contextu distincte parenchymatico, fuligineo; sporulis 4—6 × 3 μ, cylindraceo-ovoideis, interdum ellipsoideis, utrinque rotundatis, sæpe biguttulatis, continuis, hyalinis; basidiis obscuris. — Hab. in foliis vivis *Phlogis Drummondii* horti botanici Upsaliensis auctumno. —

2. **Phoma Alchemillæ** n. sp.

Maculis nullis; peritheciis epiphyllis, rarius hypophyllis, sparsis, globoso-applanatis, 0,4—0,5 mm. in diam., epidermide velatis, papilla distinctissima prominulis, demum collabescendo subpatellatis, membranaceis, nigris, textura indistincte parenchymatica; sporulis cylindraceis, utrinque guttula majuscula præditis rotundatisque, 5—6 × 1,5 μ, continuis, hyalinis, basidiis filiformibus, rectis, ad 20 μ longis, hyalinis, simplicibus, eguttulatis suffultis. — Hab. in foliis petiolisque marcescentibus *Alchemillæ vulgaris* Sunnersta prope Upsaliam Sveciæ. —

3. **Phoma Arctostaphyli** n. sp.

Peritheciis in pagina superiore foliorum sparsis vel subgregariis, interdum secundum nervos seriatim dispositis, non maculicolis, hemisphærico-rotundatis, 0,3—0,4 mm. in diam., duriusculis, atris, diu epidermide atrata tectis, demum ea lacerata

vertice prominulis, poro pertusis, textura opaca, indistincta; sporulis 8—11 × 2 μ, cylindraceis, utrinque abrupte rotundatis, 2—3-guttulatis, hyalinis, continuis; basidiis filiformibus, simplicibus, hyalinis, 7—9 μ longis. — Hab. in pagina superiore foliorum putrescentium *Arctostaphyli Uvæ-ursi* prope oppidum Visby insulæ Gotland vere. —

4. **Phoma berberidicola** n. sp.

Peritheciis dense sparsis, punctiformibus, sphæroideis, 90—150 μ in diam., epidermide velatis, mox erumpenti-subsuperficialibus, ostiolo papilliformi coronatis, membranaceis, nigris, textura atrofusca, distincte parenchymatica; mycelio ex hyphis sub epidermide vage repentibus, castaneo-brunneis, dense septatis, c. 6 μ latis, valde ramosis, anastomosantibus composito; sporulis 5—7 × 3—4 μ, ovoideis vel subellipsoideis, utrinque rotundatis, continuis, eguttulatis, hyalinis; basidiis non manifestis. — Hab. in ramulis vivis *Berberidis vulgaris* Sunnersta prope Upsaliam auctumno. — A *Phoma empetrifoliæ* BRUN., cui quam maxime affinis, sporulis latioribus cet. diversa. —

5. **Phoma Dioscoreæ** n. sp.

Maculis nullis; peritheciis amphigenis, sparsissimis, sæpe nervis appositis, atris, glabris, basi innatis, hemisphærico-applanatis, 150—200 μ in diam., ostiolo obscuro, membranaceis, contextu parenchymatico, fusco; sporulis 4—5 × 2 μ, cylindraceo-ellipsoideis, utrinque rotundatis, continuis, hyalinis, haud manifeste 3—4-concatenatis; basidiis nullis vel indistinctis. — Hab. in foliis mortuis dejectis *Dioscoreæ quinquelobæ* Upsala in horto botanico auctumno. —

6. **Aposphæria cruenta** n. sp.

Mycelio maculas intense sanguineas, ± late effusas per hyphas eseptatas, numerosas, longas, 3 μ latas formante; peritheciis in maculis sparsis, nudo oculo subinconspicuis, superficialibus, sphæroideis, 90—125 μ in diam., apice poro minuto pertusis,

subcarbonaceis, contextu solidiusculo, membranaceo, obscuro, atro-brunneo; sporulis minutissimis, numerosis, cylindraceo-oblongis, 3—4 × 0,75 μ, vel sphæroideis, 3 μ in diam., hyalinis, continuis, eguttulatis; basidiis nullis. — In superficie truncorum *Betularum* Eriks Torstäder par. Bro Gotlandiæ æstate. Trunci videntur mycelio velut sanguine foedati. Species egregia, pulchra. —

7. **Placosphæria Cerastii** n. sp.

Stromatibus sparsis, caulicolis, rarius foliicolis, basi innatis, elliptico-oblongis, convexulis, 0,5—1 mm. longis, 0,3—0,5 mm. latis, coriaceo-membranaceis, textura opaca, indistincta, intus pallidis, obscure locellatis (?); sporulis bacillaribus, rectis, 3—4 × 0,75—1 μ, utrinque guttulatis, hyalinis, continuis, basidiis filiformibus, continuis, rectis, hyalinis vel basi luteolis, 15—20 × 1 μ suffultis. — A *Placosphæria Stellariæ* (LIB.) SACC., sporulis multoties minoribus plane diversa. — Hab. in caulibus, rarius foliis *Cerastii tomentosi* Upsala in horto botanico æstate. — Species, quamquam locelli distincti non observati, tamen sine dubio huic generi adscribenda; cfr. *Placosph. Onobrychidis* (DC.) SACC., *Pl. Stellariæ* (LIB.) SACC. cet. —

Sphærioideæ phæosporæ.

8. **Sphæropsis suspecta** n. sp.

Peritheciis sparsis, peridermio atronitido subclipeiformiter tectis, demum subprominulis, 250—300 μ in diam., nigris, apice poro pertusis, contextu membranaceo, parenchymatico, versus lumen perithecii indistinctiore; sporulis ± irregulariter ovoideo-ellipsoideis, 12—14 × 7—8 μ, vel subglobosis, 9—10 μ in diam., semper continuis, fuscis, sæpissime guttula majuscula in medio posita; basidiis rectis, simplicibus, 6—8 × 2 μ, hyalinis, continuis. — Hab. in ramulis corticatis, mortuis *Corni sanguineæ* horti botanici Upsaliensis. — *Diplodiæ mamillanæ* (FR.) SACC., quæ simul aderat, habitu similis, sed minor; sporulis perfecte continuis, minoribus nec non contextu peritheciorum interiore indistincto a specie illa bene differt. —

9. **Coniothyrium truncisedum** n. sp.

Peritheciis secus ligni fibras ± distincte seriatis, præcipue rimas occupantibus, subsuperficialibus, basi leviter innatis, sphæroideo-applanatis, atris, 150 μ in diam., apice papillatis, subcarbonaceis, textura indistincte parenchymatica, subimpellucida; sporulis ovoideis vel subcylindraceis, utrinque rotundatis, luteolis, continuis, subinde utrinque guttula minima præditis, 4—7 × 3 μ; basidiis non manifestis. — Hab. ad truncum *Quercus* Lojstahed Gotlandiæ, æstate. —

Sphærioideæ phæodidymæ.

10. **Diplodia Aristolochiæ-Siphonis** n. sp.

Peritheciis in maculis dealbatis, fuscocinctis, sæpe indistinctis densiuscule sparsis, sphæroideis, 250—360 μ in diam., peridermio innatis, diu epidermide nigrescente tectis, demum per lacinias ejus arcte adhærentes ± prominulis; ostiolo papilliformi coronatis, membranaceis, nigris, textura indistincte parenchymatica, obscure fusca; sporulis cylindricis vel subovatis, 18—26 × 9—11 μ, didymis, ad septum non vel leviter constrictis, utrinque rotundatis, castaneo-brunneis, eguttulatis, basidiis hyalinis, 10—12 × 2,5 μ, continuis, rectis, eguttulatis suffultis. — Hab. in sarmentis mortuis *Aristolochiæ Siphonis* horti botanici Upsaliensis vere. —

11. **Botryodiplodia Cratægi** n. sp.

Peritheciis 6—10 in stromate corticali, valseiformi, radiatim vel in circulo dispositis, demum corticem pustulatim elevatam perforantibus, sphæroideo-subconicis, demum collapsis, 0,4—0,5 mm. in diam., membranaceis, nigris, ± distincte parenchymatice contextis, ostiolis longiusculis, demum deciduis; sporulis 13—14 × 5—6 μ, cylindraceis, utrinque rotundatis, medio 1-septatis, non constrictis, subfuligineis, eguttulatis. — Hab. in ramis mortuis corticatis *Cratægi* ad Slottskällan Upsaliæ. — Habitus *Valsæ* cujusdam. —

Sphærioideæ hyalodidymæ.

12. **Ascochyta Telephii** n. sp.

Maculis amphigenis, ampliusculis, ad 1 cm. in diam., rotundatis irregularibusve, margine atro vel atropurpureo ± distincto, latiusculo cinctis; peritheciis amphigenis, præcipue in pagina superiore insidentibus, sparsis, nudo oculo ægre conspicuis, matrice innatis, epidermide diu velatis, membranaceis, nigris, apice poro pertusis, 75—100 μ in diam.; sporulis 9—12 × 4—5 μ, cylindricis, medio 1-septatis, non constrictis, eguttulatis, hyalinis; basidiis non observatis. — Hab. in foliis vivis *Sedi Telephii* ad villam Skogsbo, Södertelje Sudermanniæ, æstate. —

Sphærioideæ phæophragmiæ.

13. **Cryptostictis ludibunda** n. sp.

Peritheciis completis, epidermide arcte adhærente subclipeiformiter tectis, punctiformibus, atris, nitidissimis, 250 μ in diam., vix papillatis, textura obscura, impellucida, subcoriacea; sporulis 3-septatis, ad septa leviter constrictis, luteo-fuligineis, cylindraceo-oblongis, rectis, 12—14 × 5—6 μ, utrinque sub apice cilio hyalino recto vel curvulo, 9—10 μ longo, 0,5 μ lato, facile secedente præditis; basidiis filiformibus, varia longitudine, sæpissime 15—40 × 1,5 μ longis, continuis, hyalinis. — Hab. in sarmentis mortuis, corticatis *Rubi occidentalis* horti botanici Upsaliensis vere. — Ob cilia facile secedentia cave ad *Hendersoniam* ducere. *Hendersonia platypus* ELL. & EVERH. maculis albis, sporulis oblongo-ellipsoideis nec non ciliis nullis divergit. —

Sphærioideæ hyalophragmiæ.

14. **Stagonospora Pulsatillæ** n. sp.

Peritheciis primo epidermide tectis, mox ea elevata liberis, facile secedentibus, perfecte sphæroideis, sparsis, 250—300 μ in

diam., membranaceis, nigris, ostiolo elongato, cylindrico, apice obtruncato, textura distincte parenchymatica, fusca vel castaneo-brunnea, cellulis angulatis, sæpissime quadraticis; hyphis longiusculis, rectis, in longitudinem caulis procurrentibus, dense et regulariter septatis, 4—5 μ latis, fuligineis; sporulis 15—22 × 2,5 μ, cylindraceis, utrinque subobtruncatis, rectis, 3-septatis, eguttulatis, in massa expulsis; basidiis non visis. — Hab. in caulibus siccis *Pulsatillæ pratensis* Duss par. Bro Gotlandiæ, æstate. — A *Stagonospora Anemones* PAT. peritheciis sporulisque minoribus satis diversa. —

Sphærioideæ dictyosporæ.

15. **Camarosporium dissimile** n. sp.

Peritheciis punctiformibus, sparsis, epidermide velatis, mox ostiolo papilliformi ± prominentibus, sphæroideis, 0,1—0,2 mm. in diam., membranaceis, nigris, textura parenchymatica, fuliginea; sporulis ellipsoideo-oblongis, utrinque rotundatis, rectis, densiuscule 7—9-septatis, septo longitudinali divisis, obscure fuscis, 20—23 × 9,5 μ, basidiis filiformibus, rectis, 10—12 × 2,5—3 μ, hyalinis suffultis. — Hab. in ramulis aridis *Symphoricarpi racemosi* Flustret Upsaliæ. — A *Camarosp. Symphoricarpi* KARST. notis allatis bene differt. —

Sphærioideæ scolecosporæ.

16. **Rhabdospora Helianthemi** n. sp.

Peritheciis in foliorum pagina superiore sparsis vel 2—3 connatis, non maculicolis, erumpentibus, basi semper innatis, hemisphæricis, demum collapsis, 0,2—0,3 mm. in diam., membranaceis, nigris, papilla majuscula coronatis, contextu indistinctiore parenchymatica; sporulis rectis, teretifusoideis, utrinque acutatis, 40—60 × 2—2,5 μ, hyalinis, 7—10-guttulatis, basidiis minutissimis, ad 4 μ longis fultis. — Hab. in foliis putrescentibus dejectis *Helianthemi* sp. in horto Upsaliensi, auctumno. —

17. **Rhabdospora Hyperici** n. sp.

Peritheciis in partibus inferioribus caulium sparsis, epidermide decidua liberis, majusculis, rotundatis, 0,5—0,7 mm. in diam., vel sæpe ellipsoideo-subcylindraceis, c. 1 mm. longis, 0,5 mm. latis, apice ostiolo cylindraceo, subelongato, facile deciduo coronatis, subcarbonaceis, atris, textura parenchymatica, laxiuscula, distincta, fusca, cellulis majusculis, c. 10 μ in diam.; hyphis fuscis, rectiusculis, parce septatis, c. 4 μ in diam.; sporulis teretifusoideis, utrinque attenuatis, rectis vel subrectis, continuis vel medio 1-septatis, eguttulatis, hyalinis, 40—55 × 1,5—2 μ; basidiis non manifestis. — Hab. in partibus crassiusculis, inferioribus, epidermide sæpe liberatis caulium aridorum *Hyperici perforati* Eriks par. Bro Gotlandiæ, æstate.

Leptostromaceæ.

18. **Labridium** nov. gen. *Leptostromacearum* (etym: *labrum*, ob peritheciorum formam).

Perithecia dimidiata, hysterioideo-rimosa, demum hiantia, membranaceo-carbonacea, nigra; sporulæ pluriseptatæ, coloratæ (brunneæ), utrinque 1-ciliatæ, basidiis filiformibus fultæ. — Sistit *Leptostromacearum* novam sectionem »phæophragmias». — A. *Discosia* differt peritheciorum forma, sporulis coloratis. Ob perithecia demum latiuscule hiantia ad *Excipulaceas* videtur paullulum vergere.

Labridium hians n. sp.

Peritheciis in caulibus dealbatis sparsis, ± elongatis, ellipsoideo-oblongis vel fusoideis, hysterioideis, rima longitudinali, initio angustissima, demum ± latiuscule aperta dimidiatis, $^1/_2$—$^2/_3$ mm. longis, $^1/_3$—$^1/_2$ mm. latis, membranaceo-carbonaceis, nigris, textura solidiuscule, sed non manifeste parenchymatica,

subimpellucida, atrofusca, cellulis rotundatis, minutis, diam. c. 3 μ; sporulis oblongis, inæquilateralibus vel subcurvulis, 3-septatis, ad septa typice constrictis, e hyalino castaneobrunneis, utrinque sub apice cilio hyalino, ad 9 μ longo præditis, 11—14 × 4—5 μ (sine ciliis), loculis ultimis pallidiusculis, rotundatis, minoribus; basidiis simplicibus, longitudine varia (ad 20 μ), hyalinis, continuis. — Hab. in caulibus exsiccatis *Potentillæ reptantis* in par. Lokrume Gotlandiæ, æstate. —

19. **Melophia glandicola** n. sp.

Peritheciis non maculicolis, dense sparsis, interdum ± connatis, subcircularibus, scutiformibus, convexis, basi applanatis, varia magnitudine, ½—1 mm. in diam., carbonaceis, astomis, textura non parenchymatica (?), opaca, impellucida; sporulis filiformibus, utrinque obtusiusculis, 35—50 × 1,5—2,5 μ, continuis, hyalinis, 2—3 in basidio communi, minutissimo, 3 μ longo confertis, facile secedentibus. — Hab. in glandibus *Quercus* Ytlings par. Bro Gotlandiæ, æstate. —

20. **Leptostromella? umbellata** n. sp.

Peritheciis in longitudinem ramulorum decorticatorum secus fibrillas ligni seriatis vel sparsis, superficialibus, sed basi innatis, elongatis, tereti-fusoideis, hysterioideo-dimidiatis, rima longitudinali distinctissima exaratis, 1—3 mm. longis, 0,3—0,5 mm. latis, carbonaceis, nigris, textura fusca, parenchymatica; sporulis filiformibus, valde arcuatis, 17—25 × 1 μ, continuis, eguttulatis, hyalinis; basidiis sporulis similibus, sed rectis, 20—30 μ longis, 6—8 basi connatis, ex basidio primario communi, crasso, 7 × 3 μ oriundis. — Hab. in ramulis decorticatis *Populi tremulæ* dejectis Qvie par. Bro Gotlandiæ. — Species egregia, ob basidia deorsum crassa, continua, sursum umbelliformiter ramosa forte novi generis typus. —

Excipulaceæ.

21. **Sporonema strobilinum** DESM. ***Sp. ramulorum** n. subsp.

Peritheciis per rimam longitudinalem corticis prorumpentibus, initio clausis, astomis, sphæroideis, rugosiusculis, 0,5—0,7 mm. in diam., mox valvulis 4—5 ± distinctis late patellariformiter apertis, 1—1½ mm. in diam., coriaceis, nigris, textura grosse parenchymatica, olivaceo-fuliginea, cellulis 9—13 μ in diam.; hyphis fuligineis, parce septatis; sporulis fusoideis, utrinque rotundatis, 11—16 × 3—5 μ, continuis, eguttulatis, hyalinis, basidiis obscuris. — Hab. in ramulis mortuis *Pini silvestris* in regione Upsaliensi vere. — Præcipue sporulis latioribus differt a typo (qui sporulas 2½ μ latas habet). —

Melanconieæ.

22. **Coryneum thyicolum** n. sp.

Acervulis sparsissimis, subcutaneis, punctiformibus, applanatis, nigris, c. 250 μ in diam., conidiis fusoideo-oblongis, 3-septatis, ad septa non constrictis, fuscis, utrinque papilla conica, 3 μ longa, acutiuscula, perfecte hyalina ornatis, non ciliatis, 28—34 × 9—11 μ; basidiis e strato parenchymatico parum distincto surrectis, filiformibus, parce guttulatis, hyalinis, longitudine valde variis, 15—80 × 2 μ. — Hab. in foliis aridis *Thujæ occidentalis* horti botanici Upsaliensis hieme haud rarum. — Species perpulchra, ob conidia papilligera facile distinguenda. Ob setula plane deficientia a *Pestalozziæ* speciebus thyicolis diversissima. —

23. **Pestalozzia effusa** n. sp.

Acervulis diu subcutaneis, demum erumpentibus, ± ellipsoideis, varia magnitudine, sæpissime 0,4—0,8 μ longis, 0,3 μ latis, convexulis, obsoletis collapsis et late diffusis, maculis nullis;

conidiis oblongis, 3-septatis, ad septa leviter constrictis, (11—) 14—17 × 6—7 μ, fuligineis, eguttulatis, apice setula una 2—3-ramosa vel setulis 3 simplicibus, filiformibus, hyalinis ornatis; pedicellis 15—22 × 1,5 μ, simplicibus, continuis, hyalinis. — Hab. in peridermio ramorum vivorum *Loniceræ coeruleæ* horti Upsaliensis vere. —

24. **Phragmotrichum Spirææ.** n. sp.

Acervulis sparsis vel paucis aggregato-connatis, primo peridermio totis tectis, dein eo laciniatim fisso prorumpentibus, demum subsuperficialibus, lenticularibus vel subsphæroideis, 0,2—0,3 mm. in diam., atris; conidiis oblongis, utrinque rotundatis, in catenulas longas connexis, 5—7-septato-muriformibus, septo longitudinali divisis, ad septa transversa leviter constrictis, flavidobrunneis, 19—30 × 8—10 μ. — Hab. in ramulis mortuis *Spirææ* sp. lignosæ horti botanici Upsaliensis vere. —

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 2.

Onsdagen den 10 Februari.

INNEHÅLL:

Med anledning af från Kongl. Ecklesiastik Departementet erhållen remiss å en ansökan af den hydrografiska kommissionen om statsunderstöd för deltagande i årets konst- och industriutställning i Stockholm med föremål beträffande Sveriges hydrografiska undersökningar, afgåfvo Hrr. SMITT och HASSELBERG infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Anmäldes, att Filos. Doktor M. FLODERUS hade afgifvit berättelse om den resa, som han med understöd af Akademien under sistlidne sommar utfört till Kristinebergs zoologiska station för undersökning af ascidiemantelns byggnad och utveckling.

Anmäldes, att framlidne Medicine Doktorn CONRAD HAHN uti efterlemnadt testamente förordnat, att af hans qvarlåtenskap en summa af 20,000 kronor skulle tillfalla Akademien.

Hr THÉEL dels meddelade en uppsats af studeranden E. NORDENSKIÖLD med titel: »Några iakttagelser rörande våra van-

liga sötvattensmolluskers lif under vintern», samt redogjorde för den sammas innehåll, och dels refererade innehållet af ofvannämnde reseberättelse af Dr FLODERUS.

Hr WITTROCK redogjorde för innehållet dels af en af Professor KJELLMAN för offentliggörande inlemnad afhandling med titel: »Japanska arter af slägtet Porphyra», och dels af följande berättelser öfver resor, som med understöd af Akademien blifvit utförda: 1:o) af Filos. Kandidaten ASTRID CLEVE, som i Lule lappmarks fjelltrakter idkat biologiska fanerogamstudier och anställt undersökningar öfver alpina diatomaceer; 2:o) af Amanuensen H. DAHLSTEDT, som inom Femsjö socken i Småland och i Bohuslän idkat hieraciologiska studier; 3:o) af Docenten R. SERNANDER, som i Herjedalen undersökt trädgränsens förlopp och postglaciala förskjutningar.

Hr RETZIUS refererade innehållet af en af Med. Kandidaten E. HOLMGREN afgifven berättelse öfver den af honom med understöd af Akademien utförda resa till Kristinebergs zoologiska station för idkande af biologiska studier, särskildt öfver hudnervernas förhållande hos skilda grupper af krustaceer.

På tillstyrkan af komiterade antogos till offentliggörande i Akademiens skrifter följande afhandlingar och uppsatser, nämligen dels i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) Ofvannämnda afhandling af Professor KJELLMAN, 2:o) »Ueber Grenzwerthe für Reihenquotienten» af Docenten T. BRODÉN, 3:o) Reptilien aus Kamerun, West-Afrika» af Filos. Doktor Y. SJÖSTEDT;

och dels i Öfversigten: 1:o) »Sur l'influence de la réfraction et de l'aberration sur les mesures photogrammétriques des étoiles», af Filos. Kandidaten Ö. BERGSTRAND; 2:o) »Bidrag till kännedomen om Sveriges Myxomycet-flora, af Filos. Kandidaten R. E. FRIES, och 3:o) Ofvannämnda uppsats af studeranden E. NORDENSKIÖLD.

Det *Letterstedtska* priset för förtjenstfulla originalarbeten och vigtiga upptäckter tillerkändes Professor G. RETZIUS för hans under förlidet år utkomna arbete: »Das Menschengehirn».

Letterstedtska räntemedlen till pris för förtjenstfulla öfversättningar till svenska språket skulle, fördelade i två lika pris, tilldelas dels Docenten E. Lagerlöf för hans öfversättning af Juvenalis med titel: »Juvenalis satirer», och dels litteratören A. Jensen för hans öfversättning från slaviska språken med titel: »Ur slavernas diktverld».

Letterstedtska medlen för maktpåliggande undersökningar skulle ställas till Professor O. Widmans förfogande för fullföljande af de undersökningar öfver usninsyrans konstitution, hvilka han redan påbörjat.

Genom anställda val kallade Akademien till utländska ledamöter Direktorn för Kejserl. Ryska Central-Observatorium i Pulkova Doktor Oscar Backlund och Professorn i Botanik vid universitetet i Leipzig Geheimeregeringsrådet Wilhelm Pfeffer.

Följande skänker anmäldes:

Till K. Akademiens Bibliotek.

Af H. M:T KONUNGEN.

Fauna of British India: Hampson, G. F., Moths. Vol. 4. Lond. 1896. 8:o.

Stockholm. *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiela statistik. 4 häften. 4:o.

— *Riksarkivet.*

Meddelanden. 20 (1895). 8:o.

— *Karolinska institutet.*

Från institutets fest d. 13 okt. 1896 till firande af minnet af A. Retzii födelse. Minnesord af A. Key. 1896. 4:o.

3 dissertationer. 1897. 8:o.

— *Entomologiska föreningen.*

Entomologisk tidskrift. Årg. 17 (1896): H. 1—4. 8:o.

— *Geologiska föreningen.*

Förhandlingar. Bd 18 (1896). 8:o.

Föreningens möte d. 15 maj 1896. 8:o.

Greifswald. *Geographische Gesellschaft.*

Jahresbericht. 6 (1893—96). 8:o.

Lisboa. *Direction des travaux géologiques du Portugal.*

De Loriol, P., Description des Échinodermes tertiaires. 1896. 4:o.

Communicações. T. 3: Fasc. 1. 1895—96. 8:o.

Strassburg. *Geologische Landesanstalt von Elsass-Lothringen.*

Mittheilungen. Bd 4: H. 4. 1896. 8:o.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. Årg. 16 (1896): H. 4. 8:o.

Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*
Handlingar. 1896: H. 2. 8:o.
Amsterdam. *Société mathématique.*
Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 5 (1896): P. 1. 8:o.
Wiskundige opgaven met de oplossingen. D. 7: St. 2. 1896. 8:o.
Belfast. *Natural history and philosophical society.*
Report and proceedings. Session 1895/96. 8:o.
Berlin. *K. botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. 1896: N:o 6 & Appendix 2—3.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 48 (1896): H. 2. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. Jahr 1895: Abth. 1—3. 8:o.
Verhandlungen. Jahrg. 15 (1896): N:o 2—6. 8:o.
Bologna. *R. accademia delle scienze.*
Memorie. (5) T. 4. 1894. 4:o.
Bonn. *Naturhistorischer Verein der preuss. Rheinlande.*
Verhandlungen. Jahrg. 52 (1895): H. 2; 53 (1896): H. 1. 8:o.
— *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Sitzungsberichte. 1895: H. 2; 1896: H. 1. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 31 (1895/96). 8:o.
Breslau. *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*
Jahresbericht. 73 (1895) & Erg.-h. 8:o.
Brünn. *Naturforschender Verein.*
Verhandlungen. Bd 34 (1895). 8:o.
Bericht der meteorologischen Commission. 14 (1894). 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 32 (1896): N:o 9—11. 8:o.
— *Exposition internationale en 1897.*
Section des sciences. 1896. 8:o.
Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtani közlöny. Kötet 26 (1896): F. 1—10. 8:o.
— *K. Ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Erdmagnetische Messungen in den Ländern der Ungarischen Krone, 1892—94. 1896. 4:o.
Buenos Aires. *Sociedad cientifica Argentina.*
Anales. T. 42 (1896): Entr. 4—6. 8:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Annales. Vol. 14: P. 1. 1896. 8:o.
Verslag omtrent den staat. Jaar 1895. 8:o.
Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*
Journal. Vol. 62: P. 3: Title & Index; 64: P. 1: Title & Index; 65 (1896): P. 1: N:o 1—2; P. 2: 2. 8:o.
Proceedings. 1896: N:o 2—5. 8:o.

(Forts. å sid. 66.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 2.
Stockholm.

Sur l'influence de la réfraction et de l'aberration sur les mesures photogrammétriques des étoiles.

Par ÖSTEN BERGSTRAND.

[Communiqué le 10 février 1897 par N. C. DUNÉR.]

M. BAILLAUD a exposé, dans un mémoire inséré au tome III du »Bulletin du comité international permanent pour l'exécution photographique de la carte du ciel», des formules très élégantes pour la réfraction différentielle en coordonnées rectangulaires mesurées sur les clichés photographiques stellaires. [1]) Dans un récent mémoire M. KAPTEYN a traité le problème d'une manière plus générale, [2]) et il a développé des expressions pour les corrections de réfraction, qui sont *rigoureuses*, si l'on néglige les termes dépendants de β^2 et de $\frac{d\beta}{d\Theta}$, β étant le coefficient de réfraction et Θ la distance zénithale vraie. De suite, il a montré, qu'on pourra encore avoir égard aux termes multipliés par $\frac{d\beta}{d\Theta}$ sans que le calcul en soit sensiblement plus compliqué. Enfin M. KAPTEYN a donné des formules pour l'aberration qui comprennent encore les termes du second ordre par rapport aux coordonnées rectangulaires.

[1]) BAILLAUD, De l'influence de la réfraction sur les mesures micrométriques (Bulletin du comité int. perm. etc., t. III. 1er fasc., 1896).

[2]) KAPTEYN, Corrections de réfraction et d'aberration pour les coordonnées rectangulaires mesurées sur les clichés photographiques (Bulletin du comité etc., t. III, 2me fasc., 1896).

Dans ces recherches M.M. BAILLAUD et KAPTEYN ont défini les corrections différentielles comme les différences entre les coordonnées rectangulaires de la position apparente de l'étoile, mesurées sur la plaque, et les coordonnées rectangulaires de la position vraie *sur une plaque idéale* ayant pour centre la position vraie correspondante au centre (α_0, δ_0) de la plaque véritable. Une conséquence de cette définition est que dans les expressions pour les corrections entrent des termes dépendant de tg δ_0 et qui deviennent infinis dans le voisinage du pôle. Cette circonstance me paraît un inconvénient théorique qu'on pourrait bien éviter puisque la réfraction et l'aberration annuelle ne sont nullement singulières dans le pôle.[1]) En effet, les valeurs de la réfraction ou de l'aberration ne dépendent que de la distance zénithale ou de l'angle que font les lignes de vue dirigées vers l'étoile et vers l'anti-apex.

M. TURNER a défini[2]) les corrections différentielles comme les différences entre les corrections totales, prises pour l'étoile en question et pour une étoile fictive dans le centre de la plaque, le centre supposé toujours situé à la position *apparente* (α_0, δ_0). Les corrections définies de cette manière, il ne sera pas nécessaire qu'elles contiennent explicitement les coordonnées équatoriales (α_0, δ_0) du centre; en effet on pourra les exprimer en fonctions seulement des coordonnées rectangulaires ξ, η de l'étoile et de celles de la projection du zénith ou de l'anti-apex sur le plan de la plaque.

J'ai déjà ailleurs[3]) indiqué, comment, en employant la méthode de M. TURNER, on peut d'une manière simple et naturelle développer les corrections du premier ordre par rapport aux coordonnées rectangulaires ξ, η. Dans ce qui suit je vais

---

[1]) Voir TURNER, On differential refraction for photographic measures (The astron. journal, vol. XVII, n:o 390, 1896).

[2]) TURNER, Preliminary note on the reduction of measures of photographic plates (Monthly notices of the R. Astron. Society, vol. 54, n:o 1, 1893).

[3]) BERGSTRAND, Sur la réduction des mesures micrométriques des clichés photographiques stellaires (Öfversigt af K. Vet.-Akademiens förhandlingar, 1896, n:o 7).

démontrer qu'on obtiendra, d'après le même principe, pour la réfraction et pour l'aberration, des formules très simples qui ont le même degré d'exactitude que celles exposées par M. KAPTEYN pour la réfraction.

D'abord, en négligeant les secondes puissances des coefficients de réfraction et d'aberration, je vais développer des formules qui sont *rigoureuses* en ce qu'elles sont indépendantes de l'hypothèse que les coordonnées ξ, η sont de petites quantités. Puis on obtiendra immédiatement de ces formules les développements en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ξ, η. La démonstration des formules rigoureuses pourra s'effectuer directement, et elle ne se fondera pas, comme celle exposée par M. KAPTÉYN, sur les formules pour la réfraction et pour l'aberration différentielles en coordonnées célestes sur la sphère. Enfin je montrerai les relations qui existent entre les formules basées sur les différentes définitions des corrections différentielles.

Réfraction.

Soient:

C le centre de l'objectif de la lunette (c'est-à-dire le centre de la sphère céleste);

O le centre de la plaque;

Σ, Σ' les positions, apparente et corrigée à l'égard de la réfraction totale, d'une étoile sur la plaque;

S, S' les points de la sphère correspondants à Σ et à Σ';

Z la projection du zénith sur le plan de la plaque;

β le coefficient de la réfraction photographique, pris pour la distance zénithale *apparente* de l'étoile Σ et exprimé par le rayon de la sphère (CO) comme unité;

β_0 le même coefficient valable pour le centre de la plaque, O;

Θ, Θ_0 les distances zénithales de Σ ($ZC\Sigma$) et de O (ZCO);

α, δ; α_0, δ_0 les coordonnées équatoriales de Σ et de O;

ξ, η; ξ', η'; X, Y les coordonnées rectangulaires (dans le plan de la plaque) des points Σ, Σ', Z, le rayon de la sphère (CO) étant pris pour unité.

Nous partons de l'équation suivante connue:

$$(1) \quad SS' = \beta \operatorname{tg} \Theta,$$

où SS' est supposé étant exprimé par CO comme unité.

On trouvera par un calcul simple:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} ZC\Sigma = \frac{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (X\eta - Y\xi)^2}}{1 + X\xi + Y\eta}.$$

De même on aura:

$$(3) \quad \operatorname{tg} SS' = \operatorname{tg} \Sigma C \Sigma' = \frac{\sqrt{(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2 + (\xi'\eta - \eta'\xi)^2}}{1 + \xi'\xi + \eta'\eta}.$$

Si l'on pose:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi' - \xi = d(\xi) \\ \eta' - \eta = d(\eta), \end{cases}$$

on aura évidemment:

$$(5) \quad d(\xi)^2 + d(\eta)^2 = \overline{\Sigma\Sigma'}^2.$$

Donc on obtient, en négligeant $\overline{SS'}^3$ et les puissances supérieures de SS':

$$(6) \quad SS' = \Sigma\Sigma' \cdot \frac{\sqrt{1 + \left[\xi \frac{d(\eta)}{\Sigma\Sigma'} - \eta \frac{d(\xi)}{\Sigma\Sigma'}\right]^2}}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \Sigma\Sigma'\left[\xi \frac{d(\xi)}{\Sigma\Sigma'} + \eta \frac{d(\eta)}{\Sigma\Sigma'}\right]}.$$

Or, en observant que les points Σ', Σ, Z sont situés en ligne droite dans le plan de la plaque, on trouve:

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d(\xi)}{\Sigma\Sigma'} = -\dfrac{X-\xi}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2}} \\[2ex] \dfrac{d(\eta)}{\Sigma\Sigma'} = -\dfrac{Y-\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2}}. \end{cases}$$

L'équation (6) pourra donc s'écrire:

$$(8)\ .\ .\ SS' = \Sigma\Sigma'\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{(X\eta-Y\xi)^2}{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}}{1+\xi^2+\eta^2-\Sigma\Sigma'\cdot\frac{\xi(X-\xi)+\eta(Y-\eta)}{\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}},$$

d'où l'on déduit, en négligeant ξ^2, $\xi\eta$, η^2 dans le terme dépendant de $\overline{SS'}^2$:

$$(9)\quad \Sigma\Sigma' = SS'\cdot\frac{(1+\xi^2+\eta^2)\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}{\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(X\eta-Y\xi)^2}} - \overline{SS'}^2\cdot\frac{X\xi+Y\eta}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

En y introduisant la valeur de SS' tirée des équations (1) et (2), on trouvera pour $\Sigma\Sigma'$ cette formule:

$$(10)\ .\ .\ \Sigma\Sigma' = \beta\frac{(1+\xi^2+\eta^2)\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}{1+X\xi+Y\eta} - \beta^2(X\xi+Y\eta)\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Cette expression substituée dans (7) donne:

$$(11)\ .\ .\ .\ .\ \begin{cases} d(\xi) = -\beta\frac{(X-\xi)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} + \\ \qquad + \beta^2 X(X\xi+Y\eta) \\ d(\eta) = -\beta\frac{(Y-\eta)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} + \\ \qquad + \beta^2 Y(X\xi+Y\eta). \end{cases}$$

Voilà les formules pour la réfraction totale en ξ, η.

Les quantités X, Y s'obtiennent des équations suivantes connues:

$$(12)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \begin{cases} X = \frac{\operatorname{tg}\tau_0 \sin m}{\sin(\delta_0+m)} \\ Y = \cot(\delta_0+m) \\ \operatorname{tg} m = \cot\varphi\cos\tau_0, \end{cases}$$

φ étant la latitude de l'observatoire et τ_0 l'angle horaire du centre de la plaque correspondant au milieu de la pose.

Pour $\xi = \eta = 60' \sin 1'$, il est facile de démontrer que les termes du second ordre par rapport à β ne s'élèvent qu'à 0",01, même à une distance zénithale de 80°. Donc ces termes pourront sans doute être tout à fait négligés.

Nous remarquons que *les formules:*

$$(13) \quad \ldots \quad \begin{cases} d(\xi) = -\beta \dfrac{(X-\xi)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} \\ d(\eta) = -\beta \dfrac{(Y-\eta)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} \end{cases}$$

sont rigoureuses, si l'on néglige β^2.

Si nous définissons la réfraction différentielle d'après le principe de M. TURNER, nous aurons pour cette réfraction les expressions suivantes *rigoureuses:*

$$(14) \quad \ldots \quad \begin{cases} \partial(\xi) = \beta X - \beta \dfrac{(X-\xi)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} \\ \partial(\eta) = \beta Y - \beta \dfrac{(Y-\eta)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} \end{cases} .$$

En introduisant l'hypothèse (toujours réalisée dans la pratique) que les coordonnées ξ, η sont de petites quantités, nous tirerons sans peine des expressions précédentes, par des développements en séries, les suivantes:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \partial(\xi) = \beta \sum\limits_i \sum\limits_j K_{i,j}^{(x)} \xi^i \eta^j \\ \partial(\eta) = \beta \sum\limits_i \sum\limits_j K_{i,j}^{(y)} \xi^i \eta^j , \end{cases}$$

où les coefficients ont ces valeurs:

$$(A) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} K_{1,0}^{(x)} = 1 + X^2 \\ K_{0,1}^{(x)} = XY \\ K_{2,0}^{(x)} = -X(2 + X^2) \\ K_{1,1}^{(x)} = -Y(1 + 2X^2) \\ K_{0,2}^{(x)} = -X(1 + Y^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(A') \ldots\ldots \begin{cases} K^{(y)}_{1,0} = XY \\ K^{(y)}_{0,1} = 1 + Y^2 \\ K^{(y)}_{2,0} = - Y(1 + X^2) \\ K^{(y)}_{1,1} = - X(1 + 2Y^2) \\ K^{(y)}_{0,2} = - Y(2 + Y^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Alors les coordonnées x, y corrigées à l'égard de la réfraction différentielle se calculeront des coordonnées observées ξ, η suivant ces formules:

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = \xi + \partial(\xi) \\ y = \eta + \partial(\eta) \, . \end{cases}$$

Il est facile de trouver les relations qui existent entre les coordonnées x, y corrigées d'après la méthode exposée ci-dessus et les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$ corrigées suivant le principe employé par M.M. BAILLAUD et KAPTEYN. En effet on voit facilement qu'en négligeant les termes dépendants de β^2, le passage du système (x, y) au système $(\bar{x}, \bar{y})$ peut s'effectuer:

1:o) en faisant tourner les axes dans le plan de la plaque; et ensuite

2:o) par une rotation du plan de la plaque autour d'une ligne droite passant par le centre.

On trouve [1]) que l'angle dont il faut tourner les axes doit être égal à $-\beta X \operatorname{tg} \delta_0$. Par cette opération on obtient donc les nouvelles coordonnées x', y' liées aux coordonnées x, y par ces équations:

$$(17) \ldots\ldots \begin{cases} x' - x = -\beta X \operatorname{tg} \delta_0 \cdot y \\ y' - y = \beta X \operatorname{tg} \delta_0 \cdot x \, . \end{cases}$$

L'influence de la rotation du plan de la plaque donne pour les nouvelles coordonnées les expressions suivantes bien connues: [2])

---

[1]) Comparer KAPTEYN, l. c., p. 13, 14.

[2]) Voir DONNER, Détermination des constantes nécessaires pour la réduction des clichés pris à Helsingfors pour la construction du catalogue photographique

$$(18) \quad \begin{cases} x'' = x - i \sin \Omega \cdot x^2 + i \cos \Omega \cdot xy, \\ y'' = y - i \sin \Omega \cdot xy + i \cos \Omega \cdot y^2, \end{cases}$$

où i est l'angle de rotation et Ω l'angle que l'axe des x fait avec la ligne droite autour de laquelle la rotation doit s'effectuer. En ce cas on a évidemment:

$$(19) \quad \begin{cases} i \sin \Omega = -\beta X \\ i \cos \Omega = \beta Y; \end{cases}$$

ces formules substituées dans (18) donnent:

$$(20) \quad \begin{cases} x'' - x = \beta X \cdot x^2 + \beta Y \cdot xy \\ y'' - y = \beta X \cdot xy + \beta Y \cdot y^2. \end{cases}$$

Si nous remplaçons dans les seconds membres des équations (17) et (20) x, y par ξ, η, l'erreur commise ne sera que de l'ordre de β^2. Donc nous aurons:

$$(21) \quad \begin{cases} \bar{x} - x = \beta[-X \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \eta + X \cdot \xi^2 + Y \cdot \xi\eta] \\ \bar{y} - y = \beta[\ \ X \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \xi + X \cdot \xi\eta + Y \cdot \eta^2]. \end{cases}$$

On voit qu'en ajoutant ces termes aux équations (16) on obtient des formules qui sont identiques aux formules de M. BAILLAUD ou de M. KAPTEYN. La circonstance que ces savants astronomes ont introduit dans leurs calculs la distance zénithale *vraie*, tandis que la quantité Θ dans notre exposition désigne la distance zénithale *apparente*, n'influe qu'aux termes dépendants de β^2.

Quant au calcul numérique, on peut en général remplacer le coefficient β par la valeur β_0 dans les formules pour la réfraction différentielle. Cependant, au cas de très grandes distances zénithales il peut être nécessaire, comme le démontre M. KAPTEYN, [1]) d'ajouter encore de petites corrections dépendantes de $\frac{d\beta}{d\Theta}$. On voit facilement qu'en négligeant les termes du second ordre par rapport à ξ, η ces corrections peuvent s'écrire sous cette forme:

---

des étoiles jusqu'à la onzième grandeur (Acta Societ. scient. Fenn., t. XX, n:o 8, 1894), p. 46.

[1]) KAPTEYN, l. c., p. 17.

$$(22)\begin{cases}\delta(\xi) = -\dfrac{d\beta}{d\Theta}(\Theta - \Theta_0)\operatorname{tg}\Theta\cdot\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} = -\dfrac{d\beta}{d\Theta}(\Theta-\Theta_0)X \\[2ex] \delta(\eta) = -\dfrac{d\beta}{d\Theta}(\Theta - \Theta_0)\operatorname{tg}\Theta\cdot\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} = -\dfrac{d\beta}{d\Theta}(\Theta-\Theta_0)Y.\end{cases}$$

Des formules:

$$(23)\ \ldots\ \operatorname{tg}\Theta = \frac{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (X\eta - Y\xi)^2}}{1 + X\xi + Y\eta}$$

et:

$$(24)\ \ldots\ldots\ldots\ \operatorname{tg}\Theta_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

on déduit par un calcul simple, en négligeant ξ^2, $\xi\eta$, η^2:

$$(25)\quad \Theta - \Theta_0 = -\frac{X\xi + Y\eta}{\sqrt{X^2+Y^2}} = -\cot\Theta_0\cdot(X\xi + Y\eta).$$

Donc nous aurons:

$$(26)\ \ldots\ \begin{cases}\delta(\xi) = \dfrac{d\beta}{d\Theta}\cdot\dfrac{X(X\xi+Y\eta)}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \dfrac{d\beta}{d\Theta}\cot\Theta_0\cdot X(X\xi + X\eta) \\[2ex] \delta(\eta) = \dfrac{d\beta}{d\Theta}\cdot\dfrac{Y(X\xi+Y\eta)}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \dfrac{d\beta}{d\Theta}\cot\Theta_0\cdot Y(X\xi + Y\eta).\end{cases}$$

Nos formules définitives deviennent alors:

$$(27)\begin{cases}x = \xi + \beta_0 X - \beta_0\dfrac{(X-\xi)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} + \dfrac{d\beta}{d\Theta}\dfrac{X(X\xi+Y\eta)}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\[2ex] y = \eta + \beta_0 Y - \beta_0\dfrac{(Y-\eta)(1+\xi^2+\eta^2)}{1+X\xi+Y\eta} + \dfrac{d\beta}{d\Theta}\dfrac{Y(X\xi+Y\eta)}{\sqrt{X^2+Y^2}}\end{cases}$$

ou bien:

$$(28)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}x = \xi + \sum\limits_i\sum\limits_j R^{(x)}_{i,j}\xi^i\eta^j \\[2ex] y = \eta + \sum\limits_i\sum\limits_j R^{(y)}_{i,j}\xi^i\eta^j,\end{cases}$$

où les coefficients $R^{(x)}_{i,j}$ et $R^{(y)}_{i,j}$ ont les valeurs suivantes:

$$(B) \dots \begin{cases} R^{(x)}_{1,0} = \beta_0 (1 + X^2) + \frac{d\beta}{d\Theta} \cot \Theta_0 \cdot X^2 \\ R^{(x)}_{0,1} = \beta_0 XY + \frac{d\beta}{d\Theta} \cot \Theta_0 \cdot XY \\ R^{(x)}_{2,0} = -\beta_0 X (2 + X^2) \\ R^{(x)}_{1,1} = -\beta_0 Y (1 + 2X^2) \\ R^{(x)}_{0,2} = -\beta_0 X (1 + Y^2) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(B') \dots \begin{cases} R^{(y)}_{1,0} = \beta_0 XY + \frac{d\beta}{d\Theta} \cot \Theta_0 \cdot XY \\ R^{(y)}_{0,1} = \beta_0 (1 + Y^2) + \frac{d\beta}{d\Theta} \cot \Theta_0 \cdot Y^2 \\ R^{(y)}_{2,0} = -\beta_0 Y (1 + X^2) \\ R^{(y)}_{1,1} = -\beta_0 X (1 + 2Y^2) \\ R^{(y)}_{0,2} = -\beta_0 Y (2 + Y^2) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Comme je l'ai indiqué ailleurs, [1]) le calcul numérique se simplifiera peut-être, au moins pour les termes du premier ordre par rapport à ξ, η, en introduisant les quantités R, S au lieu de X, Y selon ces équations:

$$(30) \dots\dots\dots \begin{cases} X = \operatorname{tg} R \\ Y = \operatorname{tg} S. \end{cases}$$

On voit que les quantités R, S sont identiques aux quantités q, p employées par M. KAPTEYN.

Aberration.

Soient:

Σ, Σ' les positions, apparente et corrigée à l'égard de l'aberration totale, d'une étoile sur la plaque;

S, S' les points correspondants de la sphère;

A la projection de l'anti-apex sur le plan de la plaque;

[1]) l. c., p. 528.

γ_0 la constante d'aberration;

Θ' l'angle $AC\Sigma$;

ξ, η; ξ', η'; X', Y' les coordonnées rectangulaires (dans le plan de la plaque) des points Σ, Σ', A.

Nous avons pour l'aberration:

$$(1) \quad SS' = \gamma_0 \sin \Theta' .$$

On trouve facilement:

$$(2) \quad \sin \Theta' = \frac{\sqrt{(X'-\xi)^2 + (Y'-\eta)^2 + (X'\eta - Y'\xi)^2}}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,\sqrt{1+X'^2+Y'^2}} .$$

Posons:

$$(3) \quad \begin{cases} \xi' - \xi = d(\xi) \\ \eta' - \eta = d(\eta), \end{cases}$$

d'où il s'ensuit:

$$(4) \quad d(\xi)^2 + d(\eta)^2 = \overline{\Sigma\Sigma'}^2 .$$

Les points Σ, Σ', A étant situés sur la même ligne droite dans le plan de la plaque, on a:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{d(\xi)}{\Sigma\Sigma'} = \pm \dfrac{X'-\xi}{\sqrt{(X'-\xi)^2 + (Y'-\eta)^2}} \\ \dfrac{d(\eta)}{\Sigma\Sigma'} = \pm \dfrac{Y'-\eta}{\sqrt{(X'-\xi)^2 + (Y'-\eta)^2}} . \end{cases}$$

D'une manière analogue à celle que nous avons employée à l'égard de la réfraction on tire:

$$(6) \quad \Sigma\Sigma' = SS' \frac{(1+\xi^2+\eta^2)\sqrt{(X'-\xi)^2 + (Y'-\eta)^2}}{\sqrt{(X'-\xi)^2 + (Y'-\eta)^2 + (X'\eta - Y'\xi)^2}} - \\ - \overline{SS'}^2 \frac{X'\xi + Y'\eta}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}$$

ou en vertu des équations (1) et (2):

$$(7) \quad \Sigma\Sigma' = \gamma_0 \sqrt{\frac{1+\xi^2+\eta^2}{1+X'^2+Y'^2}} \sqrt{(X'-\xi)^2 + (Y'-\eta)^2} - \\ - \gamma_0^2 \frac{X'\xi + Y'\eta}{1+X'^2+Y'^2} \sqrt{X'^2+Y'^2},$$

en négligeant ξ^2, $\xi\eta$, η^2 dans le terme dépendant de γ_0^2.

Ainsi, ayant égard aux formules (5) et (7) on trouve pour l'aberration totale ces expressions:

$$(8)\begin{cases} d(\xi) = \gamma_0 (X' - \xi) \sqrt{\dfrac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + X'^2 + Y'^2}} - \gamma_0^2 \dfrac{X'(X'\xi + Y'\eta)}{1 + X'^2 + Y'^2} \\ d(\eta) = \gamma_0 (Y' - \eta) \sqrt{\dfrac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + X'^2 + Y'^2}} - \gamma_0^2 \dfrac{Y'(X'\xi + Y'\eta)}{1 + X'^2 + Y'^2}. \end{cases}$$

Pour le calcul des quantités X' Y' nous avons ces équations connues:

$$(9) \ldots\ldots \begin{cases} X' = \dfrac{\operatorname{tg}(\mathfrak{A} - \alpha_0)\sin m'}{\sin(\delta_0 + m')} \\ Y' = \cot(\delta_0 + m') \\ \operatorname{tg} m' = \cot \mathfrak{D} \cos(\alpha - \alpha_0), \end{cases}$$

où $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ sont les coordonnées équatoriales de l'anti-apex.

On trouvera immédiatement que les termes dépendants de γ_0^2 sont toujours négligeables.

Les formules:

$$(10) \ldots \begin{cases} d(\xi) = \gamma_0 (X' - \xi) \sqrt{\dfrac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + X'^2 + Y'^2}} \\ d(\eta) = \gamma_0 (Y' - \eta) \sqrt{\dfrac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + X'^2 + Y'^2}} \end{cases}$$

sont rigoureuses, en négligeant γ_0^2.

Donc les expressions *rigoureuses* pour l'aberration différentielle deviennent:

$$(11) \ldots \begin{cases} \partial(\xi) = -\gamma_0 \dfrac{X' - (X' - \xi)\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} \\ \partial(\eta) = -\gamma_0 \dfrac{Y' - (Y' - \eta)\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}}. \end{cases}$$

En supposant que ξ, η sont de petites quantités on obtient les développements suivants:

$$(12) \ldots\ldots \begin{cases} \partial(\xi) = \sum_i \sum_j A_{i,j}^{(x)} \xi^i \eta^j \\ \partial(\eta) = \sum_i \sum_j A_{i,j}^{(y)} \xi^i \eta^j, \end{cases}$$

où:

$$(A) \quad \begin{cases} A^{(x)}_{1,0} = -\gamma_0 \dfrac{1}{\sqrt{1+X'^2+Y'^2}} \\ A^{(x)}_{0,1} = 0 \\ A^{(x)}_{2,0} = \tfrac{1}{2}\gamma_0 \dfrac{X'}{\sqrt{1+X'^2+Y'^2}} \\ A^{(x)}_{1,1} = 0 \\ A^{(x)}_{0,2} = A^{(x)}_{2,0} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et:

$$(A') \quad \begin{cases} A^{(y)}_{1,0} = 0 \\ A^{(y)}_{0,1} = -\gamma_0 \dfrac{1}{\sqrt{1+X'^2+Y'^2}} \\ A^{(y)}_{2,0} = \tfrac{1}{2}\gamma_0 \dfrac{Y'}{\sqrt{1+X'^2+Y'^2}} \\ A^{(y)}_{1,1} = 0 \\ A^{(y)}_{0,2} = A^{(y)}_{2,0} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si l'on fait entrer la quantité n' définie par cette équation:

$$(13) \quad \operatorname{tg} n' = \operatorname{tg}(\mathfrak{A} - \alpha_0)\sin m',$$

on pourra écrire, comme je l'ai ailleurs [1]) indiqué:

$$(B) \quad \begin{cases} A^{(x)}_{1,0} = -\gamma_0 \sin(\delta_0 + m')\cos n' \\ A^{(x)}_{0,1} = 0 \\ A^{(x)}_{2,0} = \tfrac{1}{2}\gamma_0 \sin n' \\ A^{(x)}_{1,1} = 0 \\ A^{(x)}_{0,2} = A^{(x)}_{2,0} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et:

[1]) l. c., p. 535.

$$(\mathrm{B}') \ldots\ldots \begin{cases} A^{(y)}_{1,0} = 0 \\ A^{(y)}_{0,1} = A^{(x)}_{1,0} \\ A^{(y)}_{2,0} = \frac{1}{2}\gamma_0 \cos(\delta_0 + m') \cos n' \\ A^{(y)}_{1,1} = 0 \\ A^{(y)}_{0,2} = A^{(y)}_{2,0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour le calcul des quantités m' et n' on a ce système complet de formules:

$$(14) \ldots\ldots \begin{cases} \cos \mathfrak{A} \cos \mathfrak{D} = -\sin \odot \\ \sin \mathfrak{A} \cos \mathfrak{D} = \cos \odot \cos \varepsilon \\ \sin \mathfrak{D} = \cos \odot \sin \varepsilon \\ \operatorname{tg} m' = \cot \mathfrak{D} \cos(\mathfrak{A} - \alpha_0) \\ \operatorname{tg} n' = \sin m' \operatorname{tg}(\mathfrak{A} - \alpha_0), \end{cases}$$

où $\odot$ est la longitude du Soleil et ε l'obliquité de l'écliptique.

Les coordonnées x, y corrigées à l'égard de l'aberration différentielle s'obtiennent des équations suivantes:

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = \xi \pm \partial(\xi) \\ y = \eta \pm \partial(\eta). \end{cases}$$

De la même méthode que nous avons employée pour la réfraction, on trouve que la transformation des coordonnées x, y en coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$, corrigées d'après le principe de M. KAPTEYN, peut se faire en faisant tourner les axes des coordonnées dans le plan de la plaque et par une rotation de ce plan autour d'une ligne droite passant par le centre. Le tournement des axes donne:

$$(16) \ldots \begin{cases} x' - x = \gamma_0 \dfrac{X'}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} \operatorname{tg} \delta_0 \cdot y \\ y' - y = -\gamma_0 \dfrac{Y'}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} \operatorname{tg} \delta_0 \cdot x \end{cases}$$

et la rotation du plan de la plaque:

$$
(17)\begin{cases} x'' - x = -\gamma_0 \dfrac{X'}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} x^2 - \gamma_0 \dfrac{Y'}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} xy \\ y'' - y = -\gamma_0 \dfrac{X'}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} xy - \gamma_0 \dfrac{Y'}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} y^2 . \end{cases}
$$

Donc on aura:

$$
(18) \ldots \begin{cases} \bar{x} - x = \dfrac{\gamma_0}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} [X' \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \eta - X'\xi^2 - Y'\xi\eta] \\ \bar{y} - y = \dfrac{\gamma_0}{\sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}} [-X' \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \xi - X'\xi\eta - Y'\eta^2] \end{cases}
$$

ou bien:

$$
(19) \ldots \begin{cases} \bar{x} - x = \gamma_0 [\sin n' \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \eta - \sin n' \cdot \xi^2 - \\ \qquad - \cos(\delta_0 + m') \cos n' \cdot \xi\eta] \\ \bar{y} - y = \gamma_0 [- \sin n' \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \xi - \sin n' \cdot \xi\eta - \\ \qquad - \cos(\delta_0 + m') \cos n' \cdot \eta^2] . \end{cases}
$$

En ajoutant ces termes aux équations (12) on trouvera des formules qui sont identiques aux formules de M. KAPTEYN.

Note additionnelle. — Dans une note récemment parue [1]) M. TURNER a donné des formules rigoureuses pour la réfraction en coordonnées rectangulaires, formules qui sont identiques à nos équations (13), p. 56.

[1]) TURNER, On differential refraction to terms of higher orders than the first (Monthly notices of the R. Astron. Society, vol. 57, n:o 3, 1897).

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 50.)

Calcutta. *Geological survey of India.*
Records. Vol. 29 (1896): P. 4. 8:o.
— *R. botanical garden.*
Annals. Vol. 5: P. 1—2, 6: 1, 7. 1895—96. Fol.
Cambridge. *University library.*
CAYLEY, A. Collected mathematical papers. Vol. 11. 1896. 4:o.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Memoirs. Vol. 22: Text & Atlas. 1896. 4:o.
Bulletin. Vol. 28: N:o 2—3; 30: 1, 3. 1896. 8:o.
Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Atti. (4) Vol. 9 (1896). 4:o.
Bullettino. Fasc. 44—45. 1896. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 4 (1896): N:o 10—12; 5 (1897): 1. 8:o.
Cincinnati. *Society of natural history.*
Journal. Vol. 19: N:o 1. 1896. 8:o.
Córdoba. *Observatorio nacional Argentino.*
Resultados. Vol. 15. 1896. 4:o.
Des Moines. *Iowa academy of sciences.*
Proceedings. Vol. 3 (1895). 8:o.
— *Iowa geological survey.*
Vol. 1—3, 5. 1893—96. 8:o.
Firenze. *Società entomologica Italiana.*
Bullettino. Anno 28 (1896): Trim. 1—2. 8:o.
Genova. *Musei di zoologia e anatomia comparata.*
Bollettino. 1896: N:o 49—53. 8:o.
Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. H. 32 (1895). 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Math.-phys. Kl. 1896: H. 3. 8:o.
» Philol.-hist. Kl. 1896: H. 3. 8:o.
» Geschäftliche Mittheilungen. 1896: H. 2. 8:o.
Halifax. *Nova Scotian institute of science.*
Proceedings and transactions. Vol. 9 (1894/95): P. 1. 8:o.
Hamburg. *Naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. Jahrg. 13 (1895). 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 30 (1896): Livr. 3—4. 8:o.
— *Musée Teyler.*
Archives. (2) Vol. 5: P. 2. 1896. 8:o.
— *Koloniaal museum.*
Extra bulletin 1896. 4:o.

(Forts. å sid. 76.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 2.
Stockholm.

Bidrag till kännedomen om Sveriges Myxomycetflora.

Af ROB. E. FRIES.

[Meddeladt den 10 Februari 1897 genom F. R. KJELLMAN.]

Sistlidne sommar hade jag såsom innehafvare af ELIAS FRIES-stipendiet tillfälle att besöka Vermland i och för mykologiska studier. Förnämligast egnade jag mig då åt undersökningen af myxomycetfloran och tillbragte för den skull fjorton dagar i landskapets nordligaste delar, inom Dalby och N. Finnskoga socknar, som erbjuda ypperliga lokaler för dessa växtformer. De väldiga »finnskogarne», som utan afbrott sträcka sig från Klarelfvens dalgång till den norska gränsen åt vester och i öster öfvergå i Dalarnes skogstrakter, erbjuda ett utmärkt och vidsträckt arbetsfält för den, som önskar lära känna myxomycetfloran i en skandinavisk barrskog. Ofta mycket svårgenomträngliga vindfällen förekomma i mängd i dessa nära nog urskogar, där de väldiga stammarne år, decennier, ja sekel igenom lemnats åt förruttnelsen, alstrande de bästa lokaler för dessa växtrikets lägsta former. Visserligen torde det kunna anses förhastadt att efter blott tvenne veckors undersökningar framlägga en förteckning öfver områdets myxomyceter, isynnerhet som det torde vara väl bekant, huru en hel del slemsvampar blott rent sporadiskt uppträda under vissa år. Och det vore det också, om med den förknippades anspråk på att upptaga alla inom området förekommande arterna — något, som

ingalunda är förhållandet. Men hvar och en, som något så litet sysslat med dessa växter, har helt säkert erfarit den stora, för att icke säga nästan fullständiga bristen på svensk myxomycetliteratur, som gör att dessa former äro hos oss så föga kända. Det är för närvarande icke endast omöjligt att bestämma de skilda arternas utbredningsområden i vårt land, utan i många fall torde det vara svårt att afgöra, huruvida den eller den arten ens får räknas tillhöra vår flora eller icke. Det är därför i afsigt att lemna ett, om ock litet bidrag till kännedomen om dessa formers utbredning i vårt land, som följande förteckning upprättats. Till sist vidfogas äfven några sällsyntare fynd, som gjorts i närheten af Upsala, en trakt, som dock redan flera gånger i detta afseende blifvit undersökt och därför ej kunnat bjuda på så mycket af intresse som Vermlands skogar.

Vid bestämmandet af de anförda formerna har i hufvudsak användts den 1894 af ARTHUR LISTER utgifna monografien öfver Myxomyceterna. Likaså har jag i denna uppsats vid ordnandet af arterna följt det delvis nya system öfver slemsvamparna, som i nämnda arbete blifvit uppstäldt.

Fam. 1. **Ceratiomyxaceæ.**

Ceratiomyxa *mucida* (PERS.) SCHROET.

» *α genuina*. Framkommer allmänt efter starka regn.

Ceratiomyxa *mucida β porioides* (ALB. & SCHW.). N. Finnskoga socken, Granhult; sällsynt.

Fam. 2. **Physaraceæ.**

Badhamia *decipiens* (CURT.) BERK. Dalby socken, Dalkarlsbacken på bark af Populus tremula. Ny för svenska floran.

Physarum *psittacinum* DITM. Dalby socken, Slättne på gråal, mycket sällsynt; ny för vårt land.

Physarum *viride* (GMEL.) PERS. Allmän på ruttnande ved.

» *nutans* PERS.

Physarum *nutans α violascens* ROST. En mycket vacker och egendomlig form, i det all kalkinlagring saknas såväl i kapillitietrådarne, som i den metallglänsande sporangieväggen. Hela svampen får därigenom en viss likhet med en *Lamproderma*-art. — Dalby socken, Dalsätern på kvistar af gråalen; för vår flora ny form.

Physarum *nutans β genuinum.* Ytterst vanlig.

» » *γ leucophæum* (FR.). Mycket allmän på ved, mossa och dylikt.

Physarum *compressum* ALB. & SCHW. *α sessile.* Dalby socken, Dalsätern på aspbark; ny för vårt land. De insamlade exemplaren utmärka sig för ovanligt mörka och skrofliga sporer.

Fuligo *septica* (L.) GMEL. Mycket allmän i många former, storlekar och färger.

Leocarpus *vernicosus* (PERS.) LINK. Vanlig på nedfallna barr, mossa och dylikt.

Chondrioderma *radiatum* (L.) ROST. Mycket allmän.

Fam. 3. **Didymiaceæ.**

Didymium *farinaceum* SCHRAD. Allmän.

Lepidoderma *tigrinum* (SCHRAD.) ROST. Förekommer allmänt på mossklädda, fuktiga och murknande barrträdsstammar. Bland mossan på dessa stockar ser man den ofta i plasmodiestadiet krypa omkring som gula strängar. Efter en tid draga dessa ihop sig och bilda ett temligen kort och tjockt skaft, från hvilket det kulformiga sporangiet afsätter sig. Snart hårdna dessa slemmassor, sporangiet öppnar sig och de mogna sporerna föras bort af vinden.

Fam. 4. **Stemonitaceæ.**

Stemonites *fusca* ROTH.

» » *α genuina.* Allmän.

» » *β confluens.* Mera sällsynt.

» *ferruginea* EHRENB.

Stemonites *Smithii* MACBR.

Comatricha *obtusata* (FR.) PREUSS. Mycket vanlig.

» *typhina* (ROTH) ROST. Allmän.

Enerthenema *elegans* BOWN. Här och där.

Lamproderma *physaroides* (ALB. & SCHW.) ROST. Flerestädes på murknande, mossklädda barrträdsstammar. Den torde vara en mycket karakteristisk art för djupa och mera ursprungliga barrskogar.

Lamproderma *physaroides β sessile*. Ny för Sverige. Funnen vid Dalsätern i Dalby socken på liknande lokaler som hufvudarten. Såväl till habitus som inre byggnad afviker den påfallande från hufvudformen. Särskildt egendomlig är kapillitiets anordning, i det att hvarje spår af såväl skaft som kolumella saknas, hvartill kommer, att de fina kapillitietrådarne utgå skilda ifrån en större yta af själfva peridiets innersida.

Lamproderma *violaceum* (FR.) ROST. Dalby socken, Slättne; N. Finnskoga socken, Enberget; sparsam.

Clastoderma *Debaryanum* BLYTT. En liten, utomordentligt vacker myxomycet. Slägtet står närmast *Lamproderma*, men utgör en från detta egendomligt afvikande typ. Under det att hos *Lamproderma*-arterna peridiet oregelbundet brister sönder och delvis persisterar, uppdelar det sig hos *Clastoderma* i rundade eller polygonala skifvor, som förblifva fästade i spetsen på kapillitietrådarne. — I Dalby socken påträffades denna för vårt land nya form på flera ställen (Slättne, Skylbäckssätern, Dalsätern, Dalkarlsbacken), växande såväl på ruttnande barrträdsstammar som på multnande ved af gråalen. Då den förut var känd från Norge, där den af A. BLYTT 1879 upptäcktes och beskrefs, låg det nära tillhands att vänta sig den äfven förekomma i det närliggande Vermland, hvilket äfven bekräftades. Å andra sidan torde den vara väl värd att eftersökas i andra delar af vårt land, då den ju för sin litenhet lätt kunnat förbises. Därför talar dess nu kända egendomliga utbredning, i det den är angifven från så vidt skilda lokaler som Skandinavien, Borneo, Filadelfia och Ohio.

Fam. 5. Amaurochætaceæ.

Amaurochæte *atra* (ALB. & SCHW.) ROST. En tidig vår- och sommarart, hvarför blott rester sparsamt anträffades.

Fam. 6. Heterodermaceæ.

Lindbladia *effusa* (EHRENB.) ROST. Flerestädes.

Cribraria *argillacea* PERS. Ytterligt allmän.

» *rufa* (ROTH) ROST.

» *aurantiaca* SCHRAD. Mycket vanlig.

» *pyriformis* SCHRAD. Dalby socken, Dalsätern på ruttnande granved; sällsynt.

Dictydium *umbilicatum* SCHRAD.

» *mirabile* (ROST.) SCHILBERZKY. På tvänne ställen, vid Balkåssätern och Granhult i N. Finnskoga socken, anträffades denna för vårt land nya art. Af alla myxomyceter torde detta vara en bland de i systematiskt hänseende mest omtvistade formerna. Af ROSTAFINSKY beskrifven såsom ett eget slägte, *Heterodictyon*, har den sedermera blifvit förd än till *Cribraria*, än till *Dictydium*, än bibehållen under sitt första namn. Såsom *Cribraria mirabilis* upptages den af MASSEE, under det att LISTER däremot i sin 1894 utgifna »Monograph of the Mycetozoa» hänfört den till *Dictydium* och t. o. m. blott anser den som en extrem form af *D. umbilicatum*. Senast har uti Bot. Centralblatt för 1896 denna fråga behandlats af SCHILBERZKY, hvilken antar den som egen art under slägtet *Dictydium*.

Äfven de af mig funna exemplaren stå så midt emellan de båda slägtena, att det är mycket svårt att afgöra, hvart de böra föras. För *Cribraria* talar mest den oregelbundna skålen vid sporangiets bas, för *Dictydium* de från denna utgående temligen parallelt löpande ribborna. Som calyculus-bildningen dock är en ganska växlande företeelse, i det några *Cribraria*-arter än ega, än sakna sådan samt dessutom *Dictydium umbili-*

catum undantagsvis kan vara utrustad därmed, så torde ej så stor vigt böra fästas därvid. Här upptages den därför under slägtet *Dictydium* såsom en egen art, då de insamlade exemplaren ej tyckas erbjuda några öfvergångar till den vanligare arten.

Fam. 6. Liceaceæ.

Licea *flexuosa* PERS. Mycket allmän.

» *pusilla* SCHRAD. N. Finnskoga socken, Dalkarlsbacken, sällsynt; i Sverige förr blott känd från Upsalatrakten.

Fam. 7. Tubulinaceæ.

Tubulina *fragiformis* (BULL.) PERS. Mycket vanlig.

Siphoptychium *Casparyi* ROST. Dalby socken, Dalsätern på en kullfallen, murknande och mosskládd granstam. Blott ett enda, men väldigt exemplar observerades af denna för Sverige nya art. Ehuru närmast slägt med *Tubulina*, visade den vid första påseendet största likheten med *Lindbladia*, men vid en närmare undersökning skiljes den dock utan svårighet såväl från denna som från *Tubulina* genom den egendomliga, förgrenade kolumella, som genomgår hvarje enskildt sporangium. Sporerna, som till färgen äro mycket mörkare bruna än hos de båda andra slägtena, uppnå en storlek af 6—7 μ, däruti fullt öfverensstämmande med *Tubulina*.

Fam. 8. Reticulariaceæ.

Reticularia *Lycoperdon* BULL. Anträffades blott en gång på en björkstubbe vid Skylbäckssätern i Dalby socken.

Fam. 9. Trichiaceæ.

Trichia *favoginea* (BATSCH) PERS. Sparsam. Dalby socken, Slättne; N. Finnskoga socken, Enberget.

Trichia *persimilis* KARST. Flerestädes. Blott ett par gånger förr funnen i vårt land (i Upsalatrakten), ehuru den utan tvifvel förekommer ganska allmänt, då den mycket lätt kan förblandas med andra närstående arter.

Trichia *scabra* ROST. Temligen allmän.

» *varia* PERS. Mycket vanlig.

» *contorta* (DITM.) ROST. Dalby socken, Dalkarlsbacker på murken björk, sparsamt. Lätt igenkänlig på sina fint vårtiga sporer samt kapillitieträdarne, som vid spetsarne bilda en ansvällning och sedan utlöpa i en fin, afsmalnande, ofta krökt spets.

Trichia *erecta* REX. N. Finnskoga, Enberget på granbark; sällsynt.

Trichia *fallax* PERS. Ytterligt allmän på murkna stubbar och trädstammar; en alldeles oskaftad form anträffades vid Dalsätern i Dalby socken (forma *sessilis*).

Trichia *Botrytis* PERS. Vanlig på ruttnande björk.

Hemitrichia *rubiformis* (PERS.) LIST.

» *clavata* (PERS.) ROST. Temligen allmän.

Fam. 10. **Arcyriaceæ.**

Arcyria *cinerea* (BULL) PERS. Allmänt förekommande på gråal.

» *pomiformis* (ROTH) ROST.

» *punicea* PERS.

» *incarnata* PERS.

» *flava* PERS.

Perichæna *populina* FR. Flerestädes på aspbark.

Fam. 11. **Margaritaceæ.**

Margarita *metallica* (BERK. & BR.) LIST. Dalby socken, Skylbäckssätern på Alnus incana; N. Finnskoga socken, Enberget på tall; sällsynt. Liksom alla andra hos oss funna exemplar af denna art afvika äfven dessa därigenom, att de bilda slingrande, ofta nätlikt förgrenade plasmodiocarpier, påminnande om en *Cornuvia*, under det att LISTER uppger dem som klotrunda.

Fam. 12. **Lycogalaceæ.**

Lycogala *epidendron* (L.) Fr. Mycket vanlig.

I Upsala-trakten har jag dessutom anträffat följande sällsyntare former:

Trichia *affinis* De Bary och *persimilis* Karst. torde vara ganska allmänna i Sverige, ehuru de förut ej blifvit observerade. De äro till det yttre mycket lika *Tr. scabra*, från hvilken de blott vid en närmare mikroskopisk undersökning särskiljas. De torde fördenskull ofta förbisetts eller förblandats med denna.

Trichia *contorta* (Ditm.) Rost. Af denna art fann jag vid Fredrikslund på nedfallen ekbark en mycket afvikande form. Sporangieväggens byggnad och sporernas utseende öfverensstämma med den typiska formens, men däremot afviker kapillitiet mycket därifrån. Dess trådar variera betydligt såväl i längd som byggnad, men utmärka sig framför allt för en stark taggbeväpning. En del trådar äro efter hela sin längd rikt besatta med kraftiga, ända till 15 μ långa utskott, andra ega blott nära spetsarne långa taggar, på så sätt bildande en öfvergång till enkel förgrening. En verklig sådan är ganska vanlig, och några gånger har jag äfven iakttagit en svagt nätlik förgrening, så som utmärkande är för slägtet *Hemitrichia.* Spiralförtjockningarne, som normalt äro 4—5, hafva mycket ofta reducerats till två (utmärkande för *Tr. varia*).

Exemplaren, som godhetsfullt granskats af Lister, torde utgöra en ytterligt långt gången typ af de sällsyntare formerna af *Tr. contorta*, som utmärka sig för vårtigt eller taggigt kapillitium, och som ibland blifvit uppstälda som egna arter.

Hemitrichia *Wigandii* (Rost.) List. Funnen tvänne gånger, dels vid Gottsunda på en ruttnande granstubbe, dels på Fläskjan, en holme i Mälaren, där den växte på träbitar, som af vattnet uppkastats på stranden. Dessa senare exemplar liknade mycket *H. Karsteni* List. genom ytterst svaga spiralförtjockningar samt

talrika kulformiga ansvällningar på kapillitietrådarne, men torde dock enligt bestämning af LISTER böra hänföras till *H. Wigandii.* — Förut bl. a. anmärkt från Norge, men för vårt land ny.

Dianema *depressa* LIST. Tagen i Norbylund på nedfallna grenar och kvistar af asp. — Hittills blott uppgifven från England.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 66.)

Heidelberg. *Universität.*
Akademiskt tryck 1895/96. 122 st.
Helsingfors. *Geografiska föreningen i Finland.*
Vetenskapliga meddelanden. 2 (1894—95)—3 (1896). 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. VI: 26. 1896. 4:o.
Houghton. *Michigan mining school.*
Catalogue 1894—96. 8:o.
Kharkow. *Université impériale.*
Annales. 1896: 4. 8:o.
Kiel. *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd 2: H. 1. 1896. 4:o.
Kjöbenhavn. *Videnskabernes Selskab.*
Oversigt. 1896: N:o 5. 8:o.
— *Carlsberg-Fondet.*
LORENZ, L., Oeuvres scientifiques. T. 1: Fasc. 1. 1896. 8:o.
— *Den Danske biologiske Station.*
Beretning. 6 (1895). 4:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Atlas geologiczny Galicyi. Z. 7: Kart & Tekst. 1895. Fol. & 8:o.
FINKEL, L., Bibliografia historyi Polskiej. C. 2: Z. 2. 1896. 8:o.
Monumenta medii ævi historica. T. 15. 8:o.
Bulletin international. 1896: N:o 8—9. 8:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 32 (1896): N:o 121. 8:o.
Leeds. *Philosophical and literary society.*
Annual report. 76 (1895/96). 8:o.
Leiden. *Sterrenwacht.*
Verslag van den staat. 1894/96. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-histor. Cl. Bd 16, 17: N:o 5. 1897, 96. 8:o.
» Mathem.-phys. Cl. Bd 23: N:o 4—5. 1896. 8:o.
Zur 50-jährigen Jubelfeier. Reden und Register. 1896. 8:o.
— *Fürstl. Jablonowski'sche Gesellschaft.*
Preisschriften. 32—34. 8:o.
Lisboa. *Academia R. das sciencias.*
Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. (2) T. 4 (1896): N. 15. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 14 (1896): P. 10. 8:o.
— *R. astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 56 (1896): N:o 10; 57 (1896/97): 1—2. 8:o.

(Forts. å sid. 86.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 2.
Stockholm.

Några iakttagelser rörande våra vanligare sötvattens-molluskers lif under vintern.

Af Erland Nordenskiöld.

(Meddeladt den 10 Februari 1897 genom Hj. Théel.)

I Oktober 1893 iakttog jag i en göl vid Djursholm några exemplar af Planorbis umbilicatus infrusna i isen. Den 13 Februari 1894 hemtog jag några stycken af denna snäckförande is, hvilken nu blifvit mycket tjock, och fann, sedan isen upptinats, att alla de infrusna snäckorna voro lefvande.

Dessa iakttagelser har jag under denna vinter (1896—97) sökt fullfölja genom att för i fråga varande ändamål undersöka isen i öfver 30 af mig förut i malakologiskt hänseende kända sjöar och gölar, belägna i grannskapet af Stockholm, Dalbyö och Upsala. Resultatet af dessa iakttagelser är följande.

Den is, som upptagits på lämpliga ställen, har vanligen omslutit infrusna sötvattensmollusker af slägtena Limnea, Planorbis, Pisidium m. m., och dessa hafva nästan alltid ett par timmar efter isens upptinande uppvaknat ur sin vintersömn och krupit omkring. Tillsammans med snäckorna hafva äfven några insekter, iglar m. m. träffats infrusna och äfven dessa hafva nästan alltid befunnits vara vid lif. Några något så när omfattande detaljundersökningar har jag dock hittills endast kunnat göra i afseende å sötvattensmolluskerna, rörande hvilkas vinterdvala följande iakttagits:

Limnea LAM. Sex af detta släktes åtta svenska arter hafva träffats infrusna och efter isens upptinande befunnits lefvande, nämligen: *L. stagnalis*, *L. auricularia*, *L. ovata*, *L. peregra*, *L. palustris* och *L. truncatula* samt Östersjöformerna *L. palustris*, *v. maritima* och *L. peregra*, *v. baltica*. Af dessa arter och former träffar man ofta massor af exemplar infrusna i isen. Däremot finner man i bottenslammet sällan annat än tomma skal. Tvänne arter, L. auricularia och L. ovata, träffas ofta krypande på växter och på undersidan af isen, äfven sedan denna blifvit ganska tjock. Likväl låta äfven dessa två arter senare på vintern infrysa sig. Så fann jag den 8 December 1896 i Rudsjön i Solna en mängd exemplar af L. ovata, sittande på isens undersida. Den 15 Januari 1897 undersökte jag åter samma lokal och fann inga L. ovata i rörelse, men däremot flera infrusna. De infrusna Limneorna hafva alltid lock. Detta är tunnt, genomskinligt, bildadt af hårdnadt slem och ganska starkt. Det är luft- och vattentätt, såsom synes dels däraf att det afstänger ett litet luftfylldt rum mellan sig och djuret, dels däraf att det tunna locket, då den inneslutna luften uppvärmes, buktar sig utåt. De Limneor, som man finner i bottenslammet, äro ej försedda med lock, ej heller de som sitta på växter i vattnet. Däremot hafva ofta de Limneor lock, som träffas på undersidan af isen.

Amphipeplea NILSS. *Amphipeplea glutinosa* har jag funnit i Januari 1897 mycket talrikt infrusen i isen på en vik nära Nacka. På samma ställe hittades dessutom allmänt följande sötvattens-mollusker infrusna: L. stagnalis, L. auricularia, L. palustris, Pl. corneus, Pl. umbilicatus, Pl. carinatus, Pl. vortex, Pl. contortus, Pl. nautileus och Pl. complanatus. Några därifrån hemtagna snäckförande isstycken lämnades ute öfver en natt, under hvilken temperaturen var omkring —10° C. Samtliga molluskerna stelfröso, och vid isens upptinande kommo blott ett fåtal till lif. Några dagar därefter hemtog jag åter is från samma ställe, hvilken jag genast vid hemkomsten tinade upp; och af de omkring 150 mollusker, som denna is innehöll, kommo alla till lif utom 4 till 5 exemplar af slägtet Planorbis och en Ancylus. Amphipepleorna

äro vid infrysningen försedda med ett lock, liknande Limneornas, men alltid mycket mer utbugtadt än hos dessa. De börja nästan genast, så snart de kommit loss ur isen, att röra på sig och breda sin vida mantel öfver skalet.

Physa DRP. Flere gånger under vintern har jag iakttagit talrika exemplar af Ph. fontinalis krypande på isens undersida och på växter i vattnet. Däremot har jag blott funnit några få exemplar af denna art infrusna. Dessa befunnos alla efter isens upptinande vara vid lif. De äro vid infrysningen försedda med ett lock liknande Limneornas. I sitt arbete: »Reise im Norden und Osten Sibirien II. 1. s. 298.» skrifver MIDDENDORFF om Ph. hypnorum bland annat följande: »Ich fand am 27. Juni 1843 drei Exemplare dieser Art an vergangenjährigen Schilfstengeln kriechend, in dem Wasser einer etwa drei Fuss tiefen Pfütze, deren Grund noch durchgängig mit Eis belegt war; unter nahe $73^1/_2$° n Breite, ohnfern des Falchudda-See's im Taimyrlande». Dessa exemplar af Ph. hypnorum hade helt säkert under vintern varit infrusna i isen.

Planorbis GUETTARD. Dessa äro de sötvattensmollusker, man oftast och talrikast påträffar i isen. De arter jag funnit infrusna äro:

Pl. corneus, Pl. umbilicatus, Pl. carinatus, Pl. vortex, Pl. rotundatus, Pl. contortus, Pl. complanatus, Pl. nautileus och den sistnämndas underart cristatus. Af Pl. umbilicatus fann jag i Januari 1897 i en damm invid prestgården i Westerljungs socken i Södermanland så många exemplar infrusna, att isen var mörk af snäckor. Af denna is tinade jag upp flera stora stycken, och alla de infrusna snäckorna befunnos lefvande. I bottenslammet fann jag blott 3 eller 4 lefvande exemplar.

De lokaler i Stockholmstrakten, där jag fått mycket Planorbis i isen, äro Nacka, Rudsjön och Isbladskärret på Djurgården. Planorbisarterna tyckas i allmänhet låta infrysa sig ganska tidigt på vintern. De äro vid infrysningen oftast försedda med lock, hvilket brukar vara fästadt ett stycke in i

mynningen. Det är ej starkt, utan söndersprånges snart vid isens upptinande genom den innestängda luftens utvidgning. För öfrigt är det likt Limneornas. Ett vida starkare lock, som därtill är ogenomskinligt, skaffar sig en del Planorbisarter, såsom Pl. rotundatus, under sommaren, ifall den göl der de vistas uttorkar.

Cand. C. Wesenberg-Lund skrifver i en afhandling, »Biologiske undersøgelser over Ferskvandsorganismer», om Planorbisarternas lif om vintern bland annat följande:

»Hvad Planorbis angaar, da overvintrer i alt Fald Pl. corneus i meget store Mængder i Mosernes og Aaernes Bund; .... Voran Dyret ligger imidlertid en fast, kompakt Dyndprop; .... de mindre Planorber har jag derimod truffet livlig omkrybende paa Vandplanterne sammen med Limnæerne.»

Ancylus Geoffr. Hvarest dessa öfvervintra, är mig ej säkert bekant. Tre exemplar har jag funnit infrusna, men de vaknade ej till lif, efter det isen upptinat.

Paludina Lam. Någon Paludina har jag ej funnit infrusen. Studeranden R. Hägg har meddelat mig, att han i början af Mars 1896 iakttog i Edslösaviken på Värmdön flera lefvande exemplar af P. vivipara på sjöbotten. Dessutom hade han vid samma tillfälle iakttagit i en ström, som utfaller i nyssnämnda vik, Paludinor fästade på stenarne.

Valvata Müll. Af detta slägte träffas *lefvande* i Stockholmstrakten, mig veterligt, ej mer än en art, nämligen V. cristata, och af den har jag blott funnit ett lefvande exemplar infruset.

Hydrobia. Förekommer hvarken i Stockholms, Upsalas eller Dalbyös omgifningar.

Bithynia Gray. Lefvande exemplar af B. tentaculata har jag funnit på flera lokaler, dels infrusna i isen, dels nedkrupna i bottenslammet. Vid isens upptinande dröjer det minst en dag, innan Bithynierna vakna till lif. Äfven i is, som bildats i s. k. marer med bräckt vatten, har jag funnit Bithynier infrusna. Om Bithyniernas lif vintertiden skrifver Cand. Wesenberg-Lund i sin ofvan omtalade afhandling bland annat följande:

»Bithynia fandt jeg i store Mængder ved Skrabning paa Bunden av Vandhullerne, ... de laa nedgravede i Dyndet med Laaget lukkende fast til Skallen.»

Neritina LAM. Neritinorna tyckas vara i gång hela vintern, i det de begifva sig djupare ned i vattnet, då isläggningen börjar. Sålunda har jag iakttagit på tång, på hvilken talrikt lefde Neritina och Mytilus, huru Neritinorna, när de öfversta delarna af tången började infrysa, begåfvo sig djupare ned, *under det att Mytilus lät infrysa sig*, något som ej tycktes bekomma dessa saltvattensmusslor illa, ty de lefde vid isens upptinande alltid upp.

Sphærium SCOP. Slägtets vanligaste art, Sph. corneum, lefver såväl om vintern som om sommaren i bottenslammet, hvarest jag af den funnit flere lefvande exemplar.

Calyculina CLESS. Den enda svenska arten af detta slägte, C. lacustris, låter ej infrysa sig, utan öfvervintrar nedkrupen, i dyn. Där finner man dock lefvande blott helt unga exemplar, nästan alltid jämt så stora, som de för denna art egendomliga, toppformigt utstående buckeltopparna. Af denna storlek äro ock de största ungar man finner i moderdjuret. Således skulle blott de på hösten framkomna individerna öfvervintra. Den starkt markerade växtlinie, som förefinnes mellan bucklan och det öfriga skalet, skulle således uppstå såsom en gräns mellan den del af musslan som öfvervintrar och det som sedan under sommaren tillväxer på densamma. Detta anmärktes redan af SHEPPARD.

Pisidium C. PFR. I isen i bottenfrusna gölar har jag flera gånger och i myckenhet funnit Pisidier infrusna. Isen har då alltid varit mycket uppblandad med växtlämningar. I bottenslammet finner man äfven ganska mycket lefvande Pisidier, men det synes dock, som om Pisidierna, då gölen bottenfryser, skulle föredraga att låta infrysa sig framför att krypa ned i den egentliga dyn. Någon gång har jag äfven funnit Pisidier infrusna, fastän gölen ej varit bottenfrusen, och då i ganska klar is. Vid isens upptinande hafva nästan alltid de infrusna Pisidierna befunnits lefvande. De arter jag härvid trott mig kunna urskilja äro:

P. fontinale, P. henslovianum, P. obtusale och P. (pulchellum?). Man träffar af detta slägte om vintern både ungar och fullväxta.

Anodonta Cuv. Den 7 December 1896 iakttog jag i Djurgårdsbrunnsviken flera Anodontor lifligt krypande ofvanpå stenarna alldeles vid stranden. I själfva strandkanten hade is börjat bilda sig. Studeranden R. Hägg har meddelat mig, att han i början af Mars 1896 iakttog i Edslösaviken på Värmdön, huru Anodontorna kröpo omkring i bottenslammet. Cand. Wesenberg-Lund skrifver i sin här flera gånger anförda afhandling om Anodonternas lif vintertiden följande:

»Anodonterne grave deres Gange Sommer saa vel som Vinter i Sœernes Dynd».

Om Unio och Margaritana gäller väl det samma som om Anodonta, nämligen att de ej ligga i vinterhvila.

Inalles har jag sålunda funnit 22 arter sötvattensmollusker infrusna, nämligen:

Limnea stagnalis L.
» auricularia L.
» ovata Drp.
» peregra Müll.
» palustris Müll.
» truncatula Müll.
Planorbis corneus L.
» umbilicatus Müll.
» carinatus Müll.
» vortex L.
» rotundatus Poir.
» contortus L.
» nautileus L.
» * cristatus Drp.
» complanatus L.
Amphipeplea glutinosa Nilss.

Physa fontinalis L.
Bithynia tentaculata L.
Valvata cristata MÜLL.
Pisidium fossarinum CL.
» obtusale C. PFR.
» henslovianum SH.
» (pulchellum?) JEN.

De flesta af ofvan anförda arter tillhöra familjen *Limneidæ*. De hafva vanligen iakttagits på flere olika ställen och i stor myckenhet. Nästan hvarje exemplar har efter isens upptinande visat sig vara vid lif och snart börjat krypa omkring. Dessa mollusker hafva nästan alltid under öfvervintringen varit försedda med ett skyddande lock. Ett sådant hafva vanligen också de, som träffas på isens undersida, samt alltid de, hvilka man finner liggande lösa mot isen, *uppburna af luften mellan locket och djuret i snäckskalet*. Att en stor del af de i isen inbäddade molluskerna, då de börjat infrysa, ej suttit med mynningen mot isens undersida bevisas däraf, att mynningen merändels *ej är vänd uppåt*. Lock har däremot aldrig de Inoperculater, man någon gång finner nedkrupna i dyn, ej heller de, som äro fästade på växter i vattnet.

Det förhållandet, att dessa mollusker till infrysningen försett sig med lock, bevisar att de ej öfverraskats af en hastig isbildning och på så sätt inbäddats, utan att de verkligen sökt upp isen för att i den taga sin bostad för vintern. Sålunda skulle Limnea, Amphipeplea, Planorbis och möjligen äfven Physa ofta, kanske i regel, öfvervintra i isen.

Att Cand. C. WESENBERG-LUND har funnit dessa sötvattens-gastropoder i rörelse under vintern, beror väl därpå, att han hufvudsakligen undersökt snäckornas lif i rinnande vatten, samt därpå, att han tyckes hafva gjort sina undersökningar i sjöar och dammar ganska tidigt på vintern. Hvad däremot de öfriga molluskerna beträffar, hafva vi i allmänhet kommit till samma resultat.

Af Operculaterna synes en del såsom Paludina och Neritina ej gå i vinterhvila. Bithynia tyckes såväl gräfva ned sig i dyn som låta infrysa sig; det samma gäller antagligen äfven om Valvata.

Af de små musslorna är Sphærium i gång året om. Calyculina öfvervintrar nedkrupen i dyn, hvarest man dock blott finner helt unga exemplar. Pisidierna lefva i allmänhet om vintern som om sommaren i bottenslammet. Men ifall deras göl bottenfryser, låta de flesta infrysa sig i isen.

Anodonta är i gång såväl om vintern som om sommaren, och detsamma gäller väl äfven om Unio och Margaritana.

Såsom af ofvanstående framgår, öfvervintra i isen hufvudsakligen Inoperculater, hvilka äro mera i behof af skydd mot fiender än Operculaterna. Vi hafva kanske här orsaken därtill, att de förstnämnda, d. v. s. mollusker utan lock, till vinterkvarter välja ett ställe, där de äro fullkomligt skyddade mot alla angrepp.

I sammanhang med ofvan anförda iakttagelser, rörande sötvattensmolluskernas vinterlif, har jag, såsom ofvanför nämnes, äfven iakttagit några andra infrusna djurformer, hvilka efter isens upptinande befunnits lefvande, nämligen:

Succinea putris L.

» Pfeifferi Rossm.

Jag har af dessa i närheten af vatten lefvande landmollusker endast funnit ett fåtal exemplar infrusna i is. Dessa voro försedda med ett lock, liknande Limneornas. De öfvervintra dock i allmänhet på land, försedda med ett likadant lock, och tyckas där ej söka något skydd mot kölden. Sålunda fann jag i Januari 1894 vid Näfveqvarn i Södermanland talrika lefvande exemplar af S. putris, liggande på marken i själfva snön.

Mytilus edulis L. Såsom ofvan omtalats, har jag funnit flere exemplar infrusna, fästade på tång. Dock finner man äfven exemplar i isen, hvilka ej sitta fästade vid något föremål.

Tre arter skalbaggar, nämligen: Noterus clavicornis De Geer, Hyphydrus ovatus L., Philydrus testaceus Fabr. Af den sistnämnda arten hafva talrika exemplar träffats på flere olika lokaler.

Talrika Phryganealarver eller s. k. husmaskar samt äfven några andra insektslarver.

En vattenspindel, Agyroneta aquatica L. Denna art finner man ofta lefvande i ganska stora luftfyllda kokonger i isen, från hvilka de en stund efter isens smältning framkrypa.

En Hemipter: — *Corisa* (*Cymatia*) *coleoptrata* Fabr. (enligt bestämning af Professor C. Aurivillius). Allmän i isen vid Nacka.

Några exemplar af tvenne igelarter, tillhörande slägtena Clepsine och Nephelis.

En sötvattenskrustace: Asellus aqvaticus L. Några få exemplar från olika lokaler.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 76.)

London. *Chemical society.*
Journal. Vol. 69—70 (1896): 11. 8:o.
Proceedings. Session 1895/96: N:o 169; 1896/97: 170—172. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 60 (1896/97): N:o 363—365. 8:o.
— *R. microscopical society.*
Journal. 1896: P. 6. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 14: P. 2. 1896. 4:o.
Proceedings. 1896: P. 3. 8:o.
List of the vertebrated animals in the gardens of the society. Ed. 9. 1896. 8:o.
— *R. gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1896: App. 3; 1897: N:o 121 & App. 1. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
Canadian Entomologist. Vol. 28 (1896): N:o 11—12; 29 (1897): 1. 8:o.
Madison. *University of Wisconsin.*
Bulletin. Science series. Vol. 1: N:o 3. 1895. 8:o.
— *Washburn observatory.*
Publications. Vol. 10: P. 1. 1896. 4:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico.*
Boletín. T. 21 (1894). 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 41 (1896/97): P. 1. 8:o.
Complete list of the members and officers. 1896. 8:o.
Mexico. *Academia Mexicana de ciencias exactas, fisicas y naturales.*
Anuario. Año 1 (1895). 8:o.
Montevideo. *Museo nacional.*
Anales. 7. 1896. 8:o.
— *Bureau d'echanges internationaux.*
HONORÉ, CH., Loi du rayonnement thermique solaire. 1896. 8:o.
Montreal. *Natural history society.*
The Canadian record of science. Vol. 6: N:o 8; 7: 1—3. 1896. 8:o.
Minneapolis. *Geological and natural history survey of Minnesota.*
Report of the state zoologist. 2. 1895. 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 2 (1896): Fasc. 8—10, 12. 8:o.
— *Accademia Pontaniana.*
Atti. Vol. 26. 1896. 4:o.
— *R. Istituto d'incorraggiamento.*
Atti. (4) Vol. 8. 1895. 4:o.
Ottawa. *Field-Naturalists' Club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 10 (1896): N:o 8. 8:o.

Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 10 (1896): Fasc. 5. 8:o.
Palo Alto. *Leland Stanford Junior university.*
Contributions to biology. 7. 1896. 8:o.
Paris. *Bibliothèque nationale.*
Repertoire alphabétique des livres mis à la disposition des lecteurs dans la salle de travail. 1896. 8:o.
— *Bureau internat. des poids et mesures.*
Comptes rendus des séances de la 2:e conférence générale des poids et mesures, 1895. 4:o.
Procès-verbaux des séances de 1895. 8:o.
— *École des mines.*
Annales de mines. (9) T. 9 (1896): Livr. 3—6; 10 (1896): 7—8. 8:o.
— *Observatoire de Paris.*
Annales. Mémoires. T. 21. 1895. 4:o.
— *Observatoire municipal de Montsouris.*
Annuaire. Année 1897. 12:o.
— *Société des études scientifiques.*
La Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 27 (1896/97): N:o 314—316. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 17 (1896): Trim. 3. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1896: N:o 15—19. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 23 (1895): N:o 10; 24 (1896): 7. 8:o.
Compte-rendu des séances. (3) T. 24 (1896). 8:o.
Mémoires. Paléontologie. T. 6: Fasc. 4. 1896. 4:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 19—26 (1871—1878). 8:o.
Philadelphia. *Geographical Club.*
Bulletin. Vol. 2: N:o 2. 1896. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 35 (1896): N:o 151. 8:o.
— *Academy of natural sciences.*
Journal. (2) Vol. 10: P. 4. 1896. 4:o.
Proceedings. 1896: P. 2. 8:o.
Pisa. *R. Scuola normale superiore.*
Annali. Vol. 18. 1896. 8:o.
— *Società Toscana di scienze naturali.*
Atti. Processi verbali. Vol. 10 (1896): P. 121—167. 8:o.
Prag. *Spolek chemikův českých.*
Listy chemické. Ročnik 20 (1896): Č. 11—18. 8:o.
Regensburg. *K. Bayerische botanische Gesellschaft.*
Flora. Bd 82 (1896): H. 1—4. 8:o.
Riga. *Naturforscher-Verein.*
Korrespondenzblatt. 39. 1896. 8:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Annuario. 1897. 12:o.

Atti. Cl. di scienze morali . . . (5) P. 2 (Not. degli Scavi): Vol. 4 (1896): 10—11. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 5 (1896): Fasc. 10. 8:o.
Atti. Cl. di scienze fisiche . . . (5) Rendiconti. Vol. 5 (1896): Sem. 2: Fasc. 9—12; 6 (1897): 1: 1. 4:o.
SCHIAPARELLI, G. V., Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte. 1896. 4:o.

Rousdon. *Observatory.*
Meteorological observations. Vol. 12 (1896). London. 4:o.

St. Petersburg. *Comité géologique.*
Bulletins. 12 (1893): N:o 3—7 & Suppl.; 15 (1896): 3—4. 8:o.
Mémoires. Vol. 15: N:o 2. 1896. 4:o.

— *Russisch-kaiserl. mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd 30 (1893); 33 (1895); 34 (1895). 8:o.

— *Institut Imp. de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 4: N:o 5. 1896. 4:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*
Bulletin. T. 32 (1896): 3. 8:o.
INOSTRANZEFF, A., Au travers de la chaîne principale du Caucase. 1896. 4:o.

Santiago de Chile. *Deutscher wissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. Bd 3 (1896): H. 3—4. 8:o.

Sydney. *Royal Society of New South Wales.*
Journal & proceedings. Vol. 29 (1895). 8:o.

— *Linnean Society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 21 (1896): P. 3. 8:o.

— *Australian museum.*
Memoir. Vol. 3: P. 1. 1896. 8:o.

Tacubaya. *Observatorio astronomico nacional.*
Boletin. T. 1: N:o 24. 1896. 4:o.

Tokyo. *Imp. university, College of science.*
Journal. Vol. 10: P. 1. 1896. 4:o.

Topeka. *Kansas academy of science.*
Transactions. Vol. 14 (1893—1894). 8:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Memorie. (2) T. 46. 1896. 4:o.

— *Musei di zoologia ed anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 11 (1896): N:o 243—259. 8:o.

— *Osservatorio centrale.*
Bollettino mensuale. (2) Vol. 16: N:o 1, 10—12. 1896. 8:o.

Utrecht. *Physiologisch Laboratorium.*
Onderzoekingen. (4) 4: Afl. 2. 1896. 8:o.

Verona. *Accademia d'agricoltura, arti e commercio.*
Memorie. (3) Vol. 72 (1896): Fasc. 1—2. 8:o.

Washington. *Smithsonian Institution.*
Contributions to knowledge. Vol. 29: N:o 1033; 30—32. 1895. 4:o.
Miscellaneous collections. Vol. 37: N:o 1031; 39: 1037. 1896. 8:o.

— *U. S. Geological survey.*
Annual report. 16 (1894/95): P. 1. 8:o.

Washington. *U. S. Naval Observatory.*
Astronomical, magnetical and meteorological observations. 1890 & Appendix 1. 4:o.
— *U. S. Department of agriculture.*
Bulletins. 76 st.
— *Philosophical society.*
Bulletin. Vol. 12 (1892—1894). 8:o.
Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 46 (1896): H. 8—10. 8:o.
— *K. K. Gradmessungs-Commission.*
Protokolle. 1896. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1896: N:o 13—15. 8:o.
Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*
Annalen. Jahrg. 31 (1894). 4:o.

Af fru Th. Gyldén.
CALLANDREAU, O., Notice sur M. Hugo Gyldén. Paris 1896. 4:o.

Af utgifvarne:
Tidskrift för skogshushållning, utg. af C. G. HOLMERZ. Årg. 23 (1895): N:o 1—4; 24 (1896): 1—4. 8:o.
Bibliotheca mathematica hrsg. von G. ENESTRÖM. N. F. 10 (1896): N:o 4. 8:o.
Swen Lagerbergs dagbok under vistelsen hos Tartarchan Dowlet-Gherey 1710—1711, utg. af MAGNUS LAGERBERG. Göteborg 1896. 8:o.
Bohuslänsk fiskeritidskrift, utg. af A. V. LJUNGMAN. N:o 65—68. 1894—95. 8:o.
Annaes de sciencias naturaes publ. por A. NOBRE. Anno 3 (1896): N:o 4. 8:o.
Botaniska notiser utg. af O. NORDSTEDT. Separat ur årg. 1896. 8:o.

Af författarne:
AURIVILLIUS, CHR., Ueber Zwischenformen zwischen socialen und solitären Bienen. Ups. 1896. 4:o.
ENESTRÖM, G., Sur une formule de l'assurance de survie. 1896. 8:o.
FORSSELL, K. B. J., Om skogslemmelns uppträdande i Sverige 1895. Ups. 1896. 4:o.
HASSELBERG, B., Rec. af Dunér och Engström, Observations. Sthlm 1896. 8:o.
KROK, TH. O. B. N., Svensk botanisk literatur 1895. Lund 1896. 8:o.
MALM, A. H., Berättelse öfver Göteborgs och Bohus läns hafsfisken 1895—96. Gbrg 1897. 8:o.
NATHORST, A. G., Förslag till en svensk vetenskaplig polarexpedition till Spetsbergen och Kung Karls land. Sthlm 1895. 8:o.
— Återblick på polarforskningens närvarande ställning. Sthlm 1896. 8:o.
NORDSTEDT, O., Index Desmidiacearum. Lund 1896. 4:o.

THORELL, T., Secondo saggio sui ragni Birmani. Genova 1897. 8:o.

ALBERT I prince de Monaco, Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fasc. 11. Monaco 1896. 4:o.

— Sur la 3:e campagne scientifique de la »Princesse Alice». Paris 1896. 4:o.

ARNAUDEAU, A., Table de triangulaires de 1 à 100,000. Paris 1896. 8:o.

CABREIRA, A., Sur la géométrie des courbes transcendantes. Lisbonne 1896. 8:o.

DONNER, A., Sur le rattachement de clichés astrophotographiques. Hfors 1896. 4:o.

— Redogörelse för fortgången af de astrofotografiska arbetena å observatoriet i Helsingfors 1895/96. Hfors 1896. 8:o.

EMMENS, S. H., Some remarks concerning gravitation. 1896. 8:o.

HJELT, O. E. A., Naturalhistoriens studium vid Åbo universitet. Hfors 1896. 8:o.

LEVY, V., Die wirthschaftlichen Verhältnisse der Insel Cuba. Wien 1896. 8:o.

MAZZOTTO, D., Indice di rifrazione dell' acqua per onde elettriche. Roma 1896. 8:o.

NEHRING, A., Die Herberstain'schen Abbildungen des Ur und des Bison. Berl. 1896. 8:o.

PIETTE, E., Études d'ethnographie préhistorique. Paris 1896. 8:o.

RASPAIL, X., Observations complémentaires sur la ponte et les moers du Hanneton. Paris 1896. 8:o.

SAINT LAGER, La vigne du Mont Ida et le Vaccinium. Paris 1896. 8:o.

— Les nouvelles flores de France. Paris 1894. 8:o.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 3.

Onsdagen den 10 Mars.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot f. d. Professorn vid universitetet i Berlin KARL WEIERSTRASS med döden afgått.

Hr HASSELBERG redogjorde för sina undersökningar öfver Rutilmineralets kemiska sammansättning och öfverlemnade en derom handlande afhandling med titel: »Zur chemischen Constitution des Rutils».

Hr SMITT redogjorde för sina undersökningar öfver de fiskar, som blifvit insamlade af den svenska vetenskapliga expeditionen till Eldslandet under Doktor O. NORDENSKIÖLDS ledning och öfverlemnade en derom handlande afhandling med titel: »Sur les pois-

sons recueillis par l'expédition scientifique suédoise de la Terre de Feu, sous la direction du docteur O. Nordenskiöld. I. Nototheniæ».

Professor S. ARRHENIUS redogjorde för de af honom sjelf och Doktor N. EKHOLM med understöd af Akademien företagna undersökningarne öfver månens inflytande på norrskenens talrikhet.

Hr MITTAG-LEFFLER dels öfverlemnade på författarens vägnar ett exemplar af de i tryck utgifna föreläsningar, som på inbjudning af H. M. Konungen härstädes höllos under hösten 1895 af Franske Professorn M. P. PAINLEVÉ och hade till ämne: »La théorie analytique des équations différentielles», och dels meddelade en uppsats af Licentiaten H. GRÖNVALL: »Note sur les fonctions et les nombres algébriques».

Till införande i Akademiens skrifter antogos följande inlemnade afhandlingar och uppsatser:

i Akademiens *Handlingar:* »Vestanåfältet, en petrogenetisk studie», af Docenten H. BÄCKSTRÖM;

i *Bihanget* till Handlingarne:

1:o), 2:o). Ofvannämnda afhandlingar af Hrr HASSELBERG och SMITT,

3:o). »Derbesia marina från Norges nordkust», af Professor F. R. KJELLMAN,

4:o). »Skandinaviens däggdjurs trampsulor», af Jägmästaren E. HEMBERG,

5:o). »Die Algen der ersten Regnellschen Expedition. I. Protococcoideen», af Amanuensen K. BOHLIN,

6:o). »Studien über die Membranschleime der Pflanzen. I», af Fil. Kandidaten O. ROSENBERG,

7:o). »Die Juncaceen der ersten Regnellschen Expedition», af Fil. Kandidaten N. SVEDELIUS;

i *Öfversigten:*

de i innehållsförteckningen uppräknade nio uppsatser.

Den *Fernerska* belöningen för året tilldelades Professorn vid Stockholms Högskola E. Phragmén för en i denna tidskrift offentliggjord uppsats med titel: »Sur la théorie des élections multiples».

Den *Lindbomska* belöningen tillerkändes Filos. Licentiaten D. Strömholm för under året i denna tidskrift offentliggjorda arbeten om sulfin- och tetinföreningar I—III.

Den *Flormanska* belöningen skulle öfverlemnas åt e. o. Professorn vid Upsala universitet J. A. H. Hammar för hans uti Upsala Läkareförenings förhandlingar intagna arbete med titel: »Om förekomsten af ett primärt protoplasmatiskt sammanhang mellan äggets klyfningsceller».

För utförande af vetenskapliga resor inom landet skulle följande understöd utdelas:

åt Fil. Licentiaten F. E. Ahlfvengren 150 kr. för växtfysiognomiska studier i Jemtland och Lappland;

åt studeranden J. G. Andersson 100 kr. för att vid Kosteröarne och Kristinebergs zoologiska station studera Bohusläns Ostracoder;

åt Fil. Kandidaten I. Arvidsson 100 kr. för att äfvenledes vid Kosteröarne och Kristineberg idka studier öfver vissa grupper af polychæta maskar;

åt Fil. Kandidaten H. Borg 175 kr. för att i Ångermanland, Vesterbotten och Lappland insamla och studera Neuroptera och Orthoptera;

åt Fil. Doktor O. Borge 150 kr. för undersökning af algfloran i norra delen af Bottniska viken;

åt Docenten A. Hennig 150 kr. för att i sydvestra Skåne undersöka skrifkritans fauna;

åt Fil. Doktor B. Lidforss 150 kr. för fytobiologiska studier i Jemtlands fjälltrakter;

åt Docenten A. Ohlin 100 kr. för att vid Kristineberg studera krustaceernas och särskildt amphipodernas utveckling;

åt Fil. Kandidaten O. Rosenberg 125 kr. för fysiologiska undersökningar öfver halofyter vid Sveriges vestkust; och

åt Docenten H. WALLENGREN 100 kr. för att vid Kristineberg fortsätta sina undersökningar öfver de ciliata infusorierna samt studera Gullmarens Sipunculider.

Statsanslaget för instrumentmakeriernas uppmuntran skulle lika fördelas mellan mathematiska och fysiska instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Genom anställda val kallade Akademien dels till inländsk ledamot Öfverintendenten och Kongl. Arkitekten HELGO NIKOLAUS ZETTERVALL, och dels till utländsk ledamot Engelske statistikern och nationalekonomen Sir ROBERT GIFFEN.

I ledigheten efter framlidne Professor H. GYLDÉN kallade och utnämnde Akademien Docenten i Astronomi vid Upsala Universitet Doktor KARL PETRUS TEODOR BOHLIN till sin Astronom och föreståndare för sitt Observatorium.

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiella statistik. 3 häften. 4:o.
— *K. Kommerse-kollegium.*
Yrkesinspektionens verksamhet år 1895. 8:o.
Upsala. *Universitets-biblioteket.*
LOPEZ, P., Mapa de las lineas telegráficas de la republica Argentina. Buenos Aires 1896. Fol.
Austin. *Texas academy of science.*
Transactions. Vol. 1: N:o 5 (1896). 8:o.
Belgrad. *Académie Royale de Serbie.*
Glas. 51—52. 1896. 8:o.
Bergen. *Museum.*
Aarbog for 1896. 8:o.
Berlin. *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1896: H. 2. 8:o.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 48 (1896): H. 3. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 46 (1890): Abth. 1—3. 8:o.
Boston. *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 27: p. 75—199. 1896. 8:o.
— *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 32: N:o 1. 1896. 8:o.

(Forts. å sid. 114.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Karaktäristik af Atlantiska Oceanens vatten på grund af dess mikroorganismer.

Af P. T. CLEVE.

(Meddeladt den 10 Mars 1897.)

I en i Bih. till K. Sv. V. Ak. Handl. Bd. 22, III, 5 intagen uppsats har jag klassificerat planktonslagen vid Sveriges Vestkust och i Skagerack samt urskiljt fyra typer, nämligen: *tripos-*, *didymus-*, *tricho-* och *sira-*plankton. Fortsatta undersökningar hafva nu visat, dels att åtminstone tvänne af dessa typer äro komplexa, enär deras komponenter uppträda sjelfständigt i olika delar af Atlantiska Oceanen, och dels att ännu ett nytt planktonslag måste urskiljas bland de atlantiska. Denna sistnämda planktontyp visar sig dock aldrig i nordliga Atlanten och synes på norra halfklotet inskränkt till Florida-strömmen, på södra till brasilianska strömmen. Den för denna typ karaktäristiska arten är en fykokromacé, *Trichodesmium*, hvarför planktontypen kan benämnas *desmoplankton*.

Desmoplankton känner jag genom en serie af framl. Kapten G. C. ECKMAN Jan. och Febr. 1888 samlade prof från 20° 30′ N., 39° W. till 32° 25′ N. och 79° W. Maximum synes ligga vid 24° 50′ N. och 57° W. En annan serie har samlats af Docenten E. LÖNNBERG i Juni och Juli 1892. Renast uti den senare serien var detta planktonslag vid 36° 39′ N. och 71° 18′ W. Trenne andra prof, nämligen: 35° 57′ N. 58° 3′ W., 37° 47′ N. och 47° 31′ W., 36° 2′ N. och 62° 33′ W. visade uppbland-

ning med det planktonslag jag i det följande benämner *styliplankton*. Från södra hemisferen hafva tvänne prof insamlats af framl. Kapten v. SCHEELE nämligen vid 28° 15′ S. och 28° 30′ W.; 34° 45′ S. och 49° 15′ W. När detta planktonslag uppträder fullt typiskt, innehåller det inga andra mikroorganismer än *Trichodesmium*.

Triposplankton. Detta planktonslag, som om sommaren dominerar i Skagerack, härstammar från flere olika håll, så att jag måste urskilja följande underafdelningar, nämligen:

Triposplankton i inskränkt bemärkelse,
Styliplankton,
Concinnusplankton.

Möjligen måste urskiljas ytterligare *halosphæraplankton*, men för närvarande känner jag så litet om detta slag att jag icke vågar uppställa det som en skild typ.

Af de ofvan nämda trenne slagen är concinnusplankton icke egentligen oceaniskt, utan ett Nordsjön tillhörande slag, de bägge andra atlantiska. Man kunde nu visserligen upptaga dem som underafdelningar af triposplankton, men då de tillhöra olika områden af Atlanten anser jag vara bäst, att fullständigt skilja dem.

Triposplankton i inskränkt bemärkelse dominerade sistlidne sommar på området mellan Shetlandsöarne, Skotland och Norge ända upp till Finmarken. Detta planktonslag utmärkes af stor rikedom på cilioflagellater (bland hvilka *Ceratium Tripos* typ och var. *macroceros*, var. *bucephalus* äro allmännast) rikedom på krustacéer men deremot nästan fullkomlig frånvaro af diatomacéer. Detta planktonslag kvarstod ännu i Febr. 1897 vester om Danmark och till Skotland. Det tillhör uppenbarligen icke Golfströmmen i egentlig bemärkelse.

Styliplankton. Detta planktonslag karaktäriseras af stor rikedom på *Rhizosolenia styliformis*, *R. alata* och dess varietet *R. gracillima*. Jag har spårat detta plankton från Ascension till trakten mellan Färö och Shetland och till Beeren Eiland, der det fans i september 1896. Det förekommer på sydligare breddgrader vidt utbredt, efter Floridaströmmens gränser. Medel-

hafvets plankton är i det hela nära öfverensstämmande med denna planktontyp sådan den uppträder på sydliga breddgrader. Ofta intränger det genom Engelska kanalen i södra Nordsjön och träffas vanligen vid hösttiden vester om Skagen. I norra delen af Atlanten synes det räcka vesterut till Rockhall, ehuruväl tidtals flöden kunna utsändas både åt vester och öster. Under Grönlands-expeditionen 1871 träffades det en gång söder om Island, ehuru denna trakt vanligen upptages af ett helt annat planktonslag. Styliplankton förekommer sannolikt långt söderut. I de prof, som sistlidne sommar insamlades af H. M. S. RESEARCH's expedition mellan Färö och Shetland funnos, ehuru sällsynt, exemplar af en *antarktisk art*, som jag icke anträffat i något annat prof af nordatlantiskt plankton. Naturligtvis är sammansättningen af detta plankton allt efter breddgraderna, troligen ock efter årstiderna, underkastad förändringar, som jag hoppas framdeles få visa vid en utförligare behandling af Atlantens plankton. Den mest härdiga af formerna är Rhizosolenia gracillima, som förekommer icke blott midt i Atlanten utan massvis under sommaren i Skagerack och fans, jemte ett par andra karaktäristiska arter, vid Beeren Eiland i slutet af Augusti.

Concinnusplankton. Detta planktonslag utmärkes af tvänne, massformigt uppträdande arter, nämligen *Coscinodiscus concinnus* och *Biddulphia mobilensis*. Det synes bildas kring Skotland, der det visar sig i Mars och April. Under hösten uppträder det vester om Friesiska öarne och i södra Nordsjön, der det dominerar under vintertiden. Under Jan. och Febr. 1897 har jag nämligen spårat detta planktonslag från Skagen till trakten af Helgoland, Engelska kanalen ända till Plymouth. Märkligt nog förekom det samtidigt endast spårvis vid Skotland.

Trichoplankton. Med detta namn har jag förut betecknat i allmänhet nordatlantiskt plankton, men sedan har jag funnit att det är af komplex natur och att dess konstituenter uppträda på egna områden af Atlanten. Bland arter utmärkande för detta vatten har jag förut anfört *Rhizosolenia styliformis*, som ofta förekommer blandad med andra, till ifrågavarande plankton

hörande arter. Emellertid hör denna art till östra delen af Golfströmmen och derför har jag ofvan bildat ett särskildt slag, *styliplankton*. Äfven har jag förut upptagit en del *Chætoceros-arter* såsom tillhörande trichoplankton, men, då dessa uppträda som sjelfständiga formationer, måste jag afsöndra dem under en särskild benämning eller *chætoplankton*. Sannolikt böra dock *Ch. atlanticus* och *Ch. borealis var. Brightwellii* räknas till det egentliga trichoplankton. De arter som karaktärisera detta planktonslag äro *Thalassiothrix longissima* och *Rhizosolenia brevispina* sannolikt också de två nyssnämnda Chætocerosarterna. Bland cilioflagellater uppträder *Ceratium Tripos* var. *longipes* synnerligen allmänt, åtminstone hos oss.

Detta planktonslag har sin egentliga utbredning i Irmingerhafvet, som otvifvelaktigt är Atlantens planktonrikaste region. Det sträcker sig icke långt söderut, antagligen icke under 50° N., men sänder grenar vidt omkring. En vestlig utlöpare af trichovattnet går till Davis Strait, der dess plankton blandas med ishafsvattnets till Labradorströmmens plankton, som utmärkes af dels Thalassiothrix longissima etc. dels af *Ceratium Tripos v. arctica.* En annan gren af trichovattnet går sommartiden till ishafvet, der det 1896 i slutet af Augusti anträffades kring Beeren Eiland. Då i Behrings Haf förekommer i det hela samma planktonslag, synes ishafsgrenen genomsätta hela polarbassängen. Hösttiden, i November, anländer detta planktonslag regelbundet till Skagerack. Dit kommer det närmast genom norska rännan, men hade, åtminstone denna vinter icke visat sig vid Skotland. Talrika på olika håll tagna prof derifrån, samlade från Oktober 1896 till Febr. 1897, innehöllo nämligen intet spår af detta plankton, som i slutet af Febr. förekom i hela Skagerack. Emellertid anträffades det i Nordsjön af ångf. Albert Eduard på väg från Edinburgh till Göteborg den 31 Okt. vid 56° 54′ N. och 3° 28′ O. Här var det blandadt med tripos- och styliplankton. Från Skagerack uttränges detta planktonslag tidigt på våren och tager, af flere tecken att döma, vägen åt sydvest.

Chætoplankton. Detta planktonslag, som karaktäriseras af massformigt uppträdande Chætoceros-arter, förnämligast *Ch. decipiens*, *Ch. borealis typ*, förekommer i regionen mellan styliplanktons och trichoplanktons, således ungefär mellan Rockhall och Island. Äfven detta plankton har icke stor utbredning åt söder och synes uppstå i mellersta nordatlanten genom någon differentieringsprocess. Det uppträder ofta norr om Skotland, äfven tidtals söder om Island. Sistlidne sommar anträffades det vester om Spetsbergen i Aug. månad.

Siraplankton karaktäriseradt af *Thalassiosira Nordenskiöldii*, *T. gravida*, *Chætoceros teres*, *C. furcellatus*, *C. socialis* m. fl., förekommer i Baffins Bay, öster om Grönland och visade sig sistlidne sommar på en enda punkt vid Spetsbergen, nämligen i Juni vid Norsköarne. Detta planktonslag har stor utbredning i polarbassängen. Åtminstone förekommer karaktärsarten *T. Nordenskiöldii* ymnigt på isen vid Behrings sund. Under 1875 års expedition fann KJELLMAN i Augusti siraplankton utanför Jalmal 71° 57′ N. och 67° 37′ O. samt 4—5 mil norr om Tanafjord i Sept.[1]) Vid dessa årstider förekom 1896, åtminstone mellan Spetsbergen och Finmarken, icke siraplankton, hvaraf synes framgå, att siravattnets utbredning varierar under olika år. Af intresse för oss är, att detta planktonslag förekom i Skagerack under Januari—Februari både 1895 och 1896. Äfven detta år anträffades det blandadt med trichoplankton af Prof. PETTERSSON den 16 Januari på 30 meters djup utanför Vingen och sedermera i början af Mars vid ytan samt då ovanligt rikt och rent.

Didymusplankton karaktäriseras af arter, som i allmänhet icke förekomma utom kustregionen, åtminstone ej massformigt. Detta planktonslag uppstår under sommaren längs kontinentens och Englands kuster, uppnår maximum af utveckling i Augusti och September. Arter, som äro karaktäristiska, äro: *Chætoceros didymus*, *C. curvisetus*, *C. Schüttii*, *C. danicus*, *Eucampia zodiacus* och dess ständige följeslagare *Ditylum Brightwellii*, *Leptocylindrus danicus*, *Skeletonema costatum* m. fl. Vid vår vest-

[1]) Bih. t. K. Sv. Vet. Ak. Handl. IV, 1, p. 56, 57.

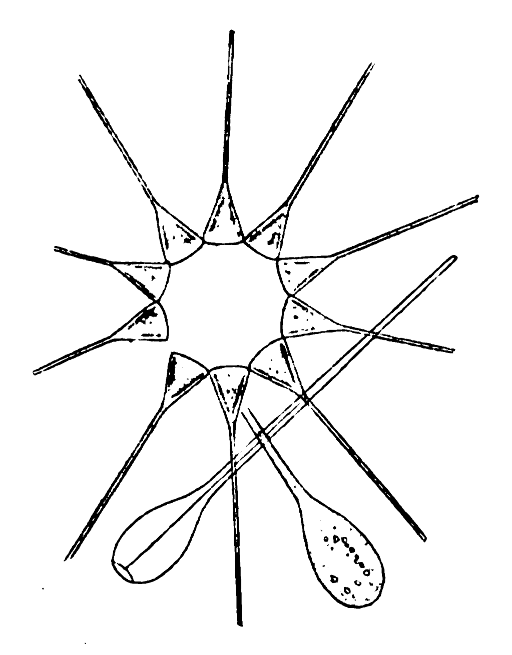
kust visar sig detta planktonslag efter högsommaren och synes härstamma från vest-jutska kusten och södra Nordsjön. Det uppnår hos oss maximum i Oktober och November, men bortföres under Januari och Februari från våra kuster. Allt didymusplankton kommer säkerligen icke blott genom den Jutska strömmen. Såväl hydrografiska som biologiska grunder tala nämligen för att något efter de stora inflödena öfver Skagen komma senare inflöden från Norge. Från södra Nordsjöns kuster aflägsnas detta planktonslag om vintern och ersättes af concinnusplankton. Åtminstone var detta fallet 1896—97.

Didymusplankton är något olika på olika ställen. Det norska synes utmärkt särskildt af *Leptocylindrus danicus*, troligen äfven af *Skeletonema costatum*, kanske flere arter, hvilket icke kan afgöras innan Norges plankton blifvit föremål för speciel bearbetning. — Det neritiska plankton, som finnes vid Grönlands kuster, skiljes fullständigt från det Europeiska genom flere egendomliga former, t. ex. Navicula septentrionalis, Amphiprora hyperborea, Fragilaria oceanica och. F. cylindrus m. fl.

Ett högst märkligt slag af neritiskt plankton insamlades af framl. Kapten ECKMAN den 16 April 1895 vid 53° N. och 2° 30′ O., olikt allt neritiskt plankton jag känner från Europas, Grönlands, Spetsbergens och Finmarkens kuster. Det innehöll nämligen som hufvudsaklig ingrediens en *Fragilaria*, som jag anser vara *F. islandica*, *Thalassiothrix nitzschioides* och en ny, synnerligen karaktäristisk *Asterionella* (sid. 101) för hvilken jag föreslår benämningen *A. spathulifera.* Denna art har jag sett tämligen sparsamt vid Plymouth sistlidne sommar och höst. Uti de många prof från Sverige som jag undersökt har jag blott en gång funnit ett exemplar. I detta plankton ingingo för öfrigt de arktiska Thalassiosira Nordenskiöldii och T. gravida samt de nordliga Coscinodiscus polychordus (GRAN. n. sp.) C. excentricus var. (samma form som i Baffins Bay) samt Biddulphia aurita. Som sagdt har jag icke i Europa funnit något neritiskt plankton med denna karaktär, hvarför det måste hafva kommit från annat håll, man vore frestad antaga Färöarne eller Island,

hvilkas neritiska plankton är mig obekant. Att det kommit med främmande vatten synes framgå äfven deraf, att Kapten ECKMAN på etiketten särskildt anmärkt, att hafvet var grumligt af ler, som blifvit upprördt från bottnen.

Ofvan har jag lemnat en redogörelse för de olika planktonslag, som förekomma i Atlanten och dess utgreningar. Alla dessa slag uppträda, om man undantager desmoplankton, vid våra kuster periodiskt och som det tyckes årligen i det stora hela på



Asterionella spathulifera CL., en koloni; 500 gånger förstorad, nedtill åt venster en valvel och åt höger en frustel 1000 gånger förstorade.

samma sätt. Sålunda visar sig först en modifikation af styliplankton på våren, när baltiska strömmen utdrifvit vinterns plankton, och ungefär samtidigt större eller mindre inflöden af triposplankton, hvilka blandas i baltiska strömmen. På högsommaren komma flöden med några arter af didymusplankton, nämligen Chætoceros curvisetus och Cl. Schüttii, som i September, Oktober följas af massor andra didymusformer, säkert med jutska

strömmen. Samtidigt med detta didymusplankton plägar höstsillen infinna sig. Derjämte infinna sig styliplanktonformer, och i allmänhet tyckes en samling af styliplankton finnas om hösten vester om Jutland och bakom didymusvattnet. Senare på hösten komma didymusformer från Norge, kort derefter följda af trichoformer i November. När detta planktonslag börjar visa sig infinner sig vintersillen. I Januari och Februari anlända (åtminstone 1895, 1896 och 1897) sira- eller ishafsformer i massor. När detta planktonslag uppträder, flyr sillen från våra kuster. Det är möjligt, att de stora sillperioderna stå i samband med periodiska vexlingar i sira-vattnets utbredning.

Närmare detaljer beträffande dessa, som det tyckes, tämligen regelbundna, växlingar hoppas jag snart få framlägga.

I mitt första försök att klassificera de olika planktonslagen föreslog jag att beteckna dem med siffror. Numera synes mig detta beteckningssätt mindre lämpligt och jag är mer böjd att följande exemplet af kemisternas beteckningssätt använda bokstäfver. Genom dessas sammanställning kan man i en formel uttrycka ett planktonprofs biologiska konstituenter, och man kan, om man vill räkna individerna, genom en index ange konstituenternas relativa mängder.

Planktonslagen, som jag urskiljt, äro dels *neritiska* dels *oceaniska*, och jag får här nedan lemna en öfversigt af dem jämte de tecken jag föreslår.

Neritiska:

Didymuspl., sydligt	Tecknet	Nm,
» , nordligt	»	Ns,
Concinnuspl.	»	Nc.

Oceaniska:

Tripospl.	»	Tp,
Stylipl.	»	S,
Chætopl.	»	C,
Trichopl.	»	T,
Sirapl.	»	Si,
Desmopl.	»	D.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Nötväckans sädesplanteringar i träden.

Af A. G. NATHORST.

(Meddeladt den 10 Mars 1897.)

I Botaniska Notiser för 1895 har jag redogjort för några vid Hesslö i Lerbäcks socken, Södermanland, iakttagna fall af hafreplantor (*Avena sativa* L.) växande på olika trädslag.[1]) Af det sätt, hvarpå dessa plantor förekommo, drog jag då den slutsatsen, att det måste varit nötväckan (*Sitta europæa* L.), som inkilat hafrekornen i barken, där de sedermera vid inträffande regnväder grott. Några direkta bevis därför kunde jag icke då lemna, men mitt antagande har sedermera bekräftats, och jag har 1896 haft tillfälle att göra ytterligare iakttagelser i samma riktning. Men innan jag öfvergår till dem, torde en rekapitulation af de första undersökningarna vid Hesslö jämte en reproduktion af de i anförda uppsats meddelade figurerna för sammanhangets skull böra förutskickas.

Sommaren 1895 hade till en början varit mycket torr, och med undantag af något obetydligt regn vid midsommartiden, hade vid Hesslö ingen nämnvärd nederbörd fallit efter hafresådden i april, förrän i senare hälften af juli. Den 30 juli, någon tid efter regnen, observerade jag en några centimeter hög hafreplanta på en gren af den lönn, som står omedelbart framför gården, och med kikare sågs högt uppe i samma träd en annan. Sedan

[1]) A. G. NATHORST, Om hafre såsom epifyt. Bot. Not. 1895, s. 257 ff.

därpå i en annan lönn iakttagits ännu ett exemplar, företog jag systematiska undersökningar af träden kring hafrefälten och fann då på dem en mängd liknande plantor. Efter den 7 aug. föll åter mycket regn, och några dagar senare hade hafreplantornas antal ökats betydligt. I en lönn t. ex., där jag förut iakttagit 9 exemplar, funnos nu 18; i en lind, som förut endast visat 3 exemplar, sågos nu 13 o. s. v. Inalles antecknade jag 129 hafreplantor på 39 olika träd, tillhörande följande trädslag, hvarvid siffrorna angifva antalet exemplar af trädslaget i fråga:

asp (*Populus tremula* L.) 1;
ask (*Fraxinus excelsior* L.) 2;
björk (*Betula verrucosa* EHRH.) 1;
ek (*Quercus pedunculata* EHRH.) 13;
lind (*Tilia parvifolia* EHRH.) 12;
lönn (*Acer platanoides* L.) 4;
päronträd (*Pyrus communis* L.) 1;
rönn (*Sorbus aucuparia* L.) 4;
sälg (*Salix capræa* L.) . . . . 1.

Det sätt, hvarpå hafreplantorna uppträdde, var ofta mycket egendomligt, i det att kornen voro inkilade i så fina sprickor och så långt under barken, att plantan tycktes framtränga omedelbart ur trädet (fig. 3), hvarföre man först genom att skära ut ett barkstycke kom underfund med hafrekornets läge. Äfven deras plats på själfva de släta stammarne var märklig nog, ty i motsats till öfriga epifyter hade de i regeln icke sin plats i förgreningarne, utan på stammen eller grenarne och i fråga om dessa senare såväl på deras öfre som undre sida. Flere exemplar sutto så högt upp i trädens kronor, att jag först med kikare kunde iakttaga dem.

Som hafren på fälten ännu icke på långt när var mogen, kunde hafrekornen icke härstamma från den växande grödan, utan de måste hafva suttit i träden åtminstone sedan april, då hafresådden egde rum. De torde då från fältet hafva upplockats af fåglarne och inkilats i barken. Att de först nu grodde kom sig däraf, att först nu tillräcklig nederbörd hade fallit.

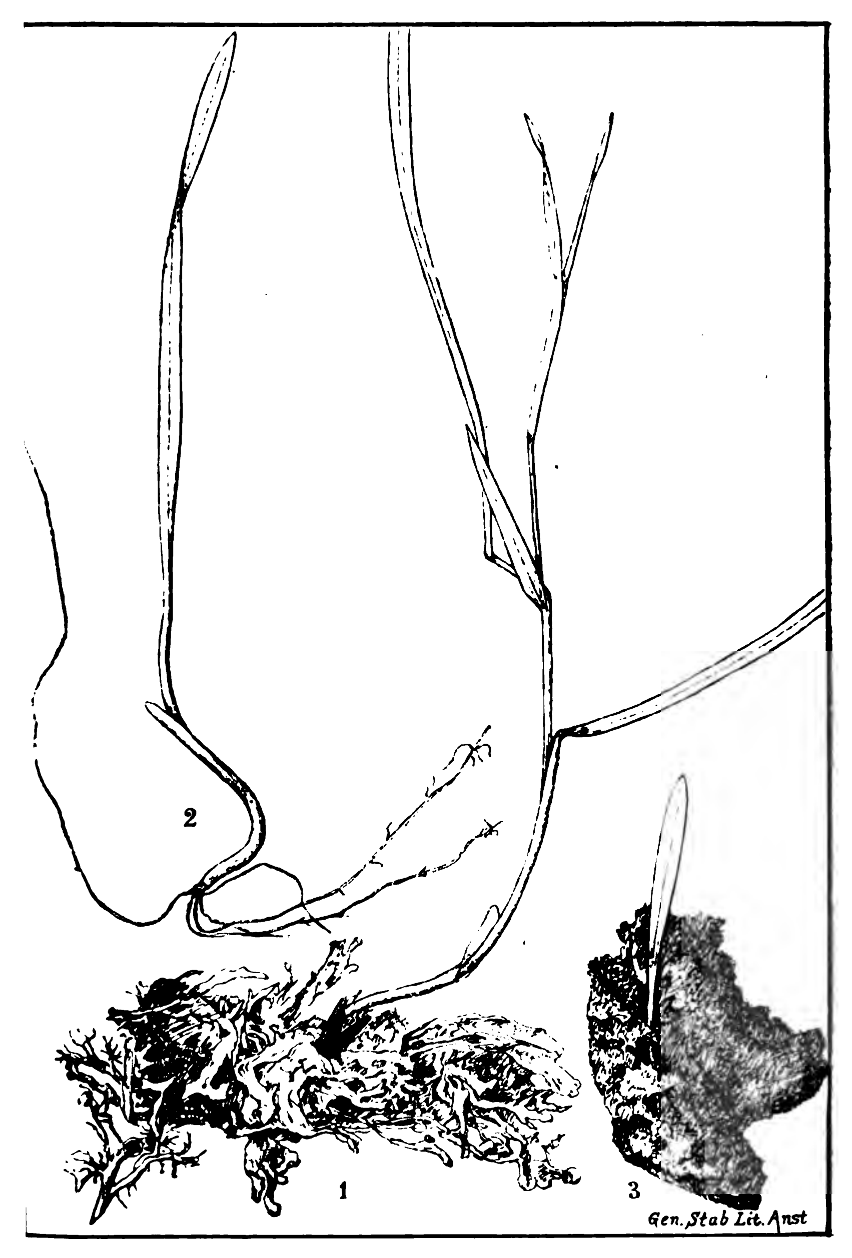


Fig. 1—3. Epifytiska hafreplantor. Förklaringen finnes i texten.

Fig. 1 visar det näst största af de iakttagna exemplaren, utgående från en smal gren af rönn, alldeles öfvertäckt af lafvar. Det öfverst afskurna bladet var i verkligheten 10 cm. längre än teckningen visar, det till höger afskurna 6,5 cm. längre. Exemplaret var mer än en månad gammalt och togs då af mig, emedan kornet af någon fågel dragits ut ur sprickan, på sätt teckningen visar.

Fig. 2 är ett exemplar med relativt långa rottrådar, de hade trängt in i den murkna veden på en död gren af en lind.

Vid flere tillfällen funnos plantorna just på sådana ställen, som voro tätt mossbevuxna, och det är ju tydligt att mossan, som kvarhåller fuktighet, skall befrämja deras trefnad och utveckling.

Såsom förut nämndes antog jag, i det jag hänvisade till fågelns lefnadsvanor, att det måste hafva varit nötväckan, som bragt hafrekornen till deras nuvarande plats. Några direkta bevis kunde jag då icke lemna, men konservator G. KOLTHOFF i Upsala har sedermera muntligen meddelat mig, att han själf iakttagit, huru nötväckan fastkilar hafrekorn i barkspringor. I »Nordens fåglar» af KOLTHOFF och JÄGERSKIÖLD läses härom (sid. 46): »Om vintern infinner hon (nötväckan) sig ofta vid gårdarna för att äta hafre. Härvid tar hon ett korn i näbbet och flyger därmed till något träd, gör med näbben ett hål i barken och fäster hafrekornet däri, sedan bearbetar hon detsamma med sitt näbb, tills hon kommer åt kärnan. På samma sätt behandlas ollon och nötter. Ofta nog blir hon skrämd eller glömmer hon dessa i barken fästade frön. De gro då lätt vid ihållande regn. Så fann A. G. NATHORST talrika hafrestånd växande på flere skilda slags löfträd. . . . . Ofta uppgifves att nötväckan skulle samla vinterförråd, vi ha aldrig varit i tillfälle att iakttaga denna hennes vana och tro att dylika i barken fästade, men kvarlämnade frön och frukter gifvit upphof till detta påstående.»

Redan iakttagelserna vid Hesslö syntes mig dock tala emot, att de där observerade hafreplantorna skulle härröra af korn, som blifvit glömda eller som kvarlämnats då fågeln skrämts.

Fastmera syntes tvenne omständigheter tala för, att de afsiktligt blifvit gömda i barken för att framdeles användas. Den ena omständigheten var den, att kornen sutto alldeles för djupt för att kunna vara sådana, som blifvit fastsatta för att omedelbart förtäras. Den andra var, att de ofta förekommo på sådana fläckar, där det var mossa, och hvilka naturligtvis ej alls varit lämpliga om det gällt att sätta fast kornen för ett omedelbart sönderhackande. Tvärtom skulle mossan härvid vara i vägen, medan den däremot kunde tjena till att dölja kornen. Båda förhållandena talade för, att kornen gömdes i barken för framtida användning.

De iakttagelser, jag haft tillfälle att göra 1896, samt de upplysningar jag i samhand därmed af annan person erhållit, synas med bestämdhet tala för riktigheten af denna uppfattning, hvilken ytterligare bestyrkes genom en äldre uppgift i litteraturen, till hvilken jag längre ned skall återkomma.

Den 30 september 1896 gjorde jag jämte professor G. LAGERHEIM, docenten G. ANDERSSON, d:r N. HARTZ från Köpenhamn m. fl. en botanisk utflykt till Nacka utanför Stockholm. Vid Nackanäs värdshus fann jag då hafreplantor i tvenne ekar, under alldeles samma förhållanden som vid Hesslö, och vid Nacka kvarnar iakttogos sådana äfven på en lönn, en björk och en al (*Alnus glutinosa* L.), hvilket sistnämnda träd förut icke varit representeradt i mina anteckningar om plantornas förekomst.

Det må här anmärkas, att senhösten gifvetvis är den bästa tiden för iakttagelser af nu berörda slag. Ty dels har ju nötväckan då öfverallt på fälten tillgång till mogen hafre, dels föranleder den då vanligen fuktiga väderleken, att kornen lätt gro. En regnig vår torde dock äfven vara gynnsam för iakttagelserna i fråga. För öfrigt skola vi snart finna, att hafre icke är det enda sädesslag, som af nötväckan på anfördt sätt planteras i träden.

I slutet af oktober gjorde jag ett besök hos brukspatron G. REUTERCRONA på Skattmansö i Upland, i och för ytterligare undersökning af den intressanta fossilförande ancylusleran vid därvarande tegelbruk. Den 29 iakttog jag, vid en hastig vand-

ring genom parken, sädesplantor på icke mindre än 42 olika träd, ett antal, som nog skulle ökats, om jag kunnat egna mera tid åt denna undersökning. Af trädslagen må nämnas ek, ask, asp, lönn, samt en alm (*Ulmus montana* WITH.) och flere svartpopplar (*Populus nigra* L.), på hvilka båda senare jag förut ej sett några plantor. Dessas antal räknade jag ej; i somliga träd såg jag blott en enda, i andra flere, ofta gruppvis där det fanns mossa. Alla de af mig närmare undersökta plantorna voro såsom förut hafreplantor, men inspektoren på stället, herr J. P. VALLIN, uttalade den misstanken, att möjligen äfven hvete skulle kunna förekomma på samma sätt, enär ett kärl med hvete plägade om sommaren stå ute för de påfåglar, som finnas på stället. Sedan jag rest från Skattmansö företog herr VALLIN en noggrann undersökning och fann då, att det icke var endast hafre utan verkligen äfven en hel del hvete. »Hvete förekom mest i träden närmast kontoret, där det nästan utgjorde hälften af alla undersökta plantor, men i alléen nere mot ladugården var det endast hafre. Emedan en låda med hvete hela sommaren stått på gården för påfåglarnes räkning, är det troligt, att fåglarne uppfört kornen i träden därifrån. Hvetet förekom både på grenarne och stammen, och någon olikhet i inkilningen observerade jag ej. Jag måste med en knif peta fram kornen ur barkspringorna och se efter, om det var hafre eller hvete.»

Betydelsen af denna iakttagelse skall nedan närmare framhållas, men dessförinnan må nämnas det tredje ställe, där sädesplantor iakttogos under samma förhållanden som förut. Detta var vid Särö på vestkusten, och så sent som den 19 december 1896. Det var då skarp köld, snö på marken och äfven på träden, men då jag sagda dag åkte fram till gården, tyckte jag mig genom vagnsfönstret se en hafreplanta på ett af träden vid vägen. Vid med anledning häraf sedermera verkställd undersökning, träffades dylika i icke mindre än 53 träd, mest ekar, men äfven lind och ask, ehuru det nu ej var så lätt att se dem, då många af plantorna voro frusna och bleknade. Af dem, som närmare undersöktes, voro alla hafre, så när som på en

enda, hvilken var en kornplanta, och anmärkas må, att detta sädesslag jämte hafre odlats just på de närmast belägna fälten. Äfven här varierade antalet plantor; medan jag på somliga träd endast såg en enda, funnos däremot på andra flere stycken.

Inalles har jag sålunda hösten 1896 iakttagit sädesplantor på jämt 100 träd. Plantornas antal har utan tvifvel uppgått till några hundra, men jag har såsom nämndt icke räknat dem. Helt visst skall man litet hvarstädes, sedan uppmärksamheten väl riktats häråt, träffa sädesplantor under liknande förhållanden.

Redan dessas ymniga förekomst synes mig ådagalägga, att det icke längre kan vara tal om, att kornen kvarglömts af nötväckan eller af henne kvarlämnats då hon blifvit skrämd. Utan torde man i stället böra antaga, att de fullt afsiktligt instoppats i barken, för att där förvaras för kommande behof. Alldeles afgörande för denna fråga synes mig förekomsten af hveteplantorna i träden vid Skattmansö vara. Ty om det också är nödvändigt för nötväckan att kila fast hafrekornen, för att kunna hacka sönder agnen och komma åt kärnan, så är ju detta för de nakna hvetekornen icke längre gällande. Och dessa äro väl ej heller så stora, att hon behöfver sönderhacka dem för att kunna svälja. Men är så icke förhållandet, då återstår ju intet annat än att antaga, att hon stoppar in hvetekornen i springorna för framtida behof. Och då gäller detsamma äfven hafre och korn. Jag vill för öfrigt nämna, att sedan jag meddelat mina senaste iakttagelser för KOLTHOFF, har denne muntligen sagt mig, att saken naturligtvis gestaltar sig helt annorlunda nu, sedan man kommit underfund med, att sädeskorn i träden förekomma till den mängd, som mina iakttagelser visa. Han tycktes därföre icke numera ha något emot den förklaring, som ofvan lämnats.

Det finnes äfven en annan omständighet, som talar härför, och det är nötväckans beteende, då hon hålles i fångenskap i ett rum, där hon fritt får flyga omkring. »De stoppa då», säger J. F. NAUMANN,[1]) »springorna mellan bräderna samt vid fönstren

[1]) Naturgeschichte der Vögel Deutschlands. 5. S. 390. Leipzig 1826.

ofta alldeles fulla (med födoämnen). Hafrekornen sticka de alltid med den trubbiga änden i springan, så att spetsen sticker ut, och härigenom bespara de sig sedermera besväret att taga ut det, när de vilja äta det. Ty då begifva de sig endast dit och hacka med ens de fastsatta kornen ur agnen, hvilka de alltid pläga öppna vid den spetsiga änden.» Då de sålunda i fångenskapen sätta fast hafrekorn i springor för att sedermera förtära dem, är det ju blott hvad man kan vänta sig, om de göra på samma sätt i fria tillståndet. [1])

Det är, såsom vi ofvan sett, ej blott *hafre*, utan äfven *hvete* och *korn*, som nötväckan på detta sätt planterar i träden. Det må ifrågasättas, om ej en iakttagelse af professor WITTROCK möjligen tyder på, att så någon gång äfven sker med *råg*. Han har [2]) i Dalsland iakttagit råg (unga plantor i oktober månad), växande i barkspringor på ek och ask, »hvilka plantor med all visshet spirat upp ur rågkorn, som kommit dit vid inbergning af skuren råg. Råglassen hafva nämligen vid hemforslingen från fältet haft att passera tätt förbi ifrågavarande träd, hvarvid korn strukits af ur axen mot stammen och fastnat i en eller annan tjenligt belägen, större barkspricka». Det vore naturligtvis långt från mig att bestrida, att den af professor WITTROCK lämnade förklaringen är den riktiga — hvilket för öfrigt synes bestyrkas därigenom att, såsom han muntligen meddelat mig, råghalm och rågax funnos fasthängande i träden i fråga — men jag vill dock påpeka, att man då icke kände nötväckans omfattande sädesplanteringar i träden — såsom jag här kallat dem — hvarföre det var nödvändigt att söka en annan förklaringsgrund. Det är ju sannolikt att denna är den rätta,

[1]) Igenfinnandet af kornen underlättas naturligtvis därigenom att de gro, men icke kan man väl antaga att fågeln skulle förstå detta? Vid Särö trodde sig en person i mitt sällskap iakttaga, att en nötväcka, som sysslade på träden, drog ut och åt en hel planta. »Den uppförde sig alldeles som då en fågelunge sväljer en mask». Emellertid var afståndet för stort för att med säkerhet skulle kunnat iakttagas, hvad det verkligen var, som fågeln svaljde, det var i alla händelser ett några cm. långt, gräsliknande föremål.

[2]) V. B. WITTROCK, Om den högre epifyt-vegetationen i Sverige. Acta Horti Bergiani, Bd 2. N:o 6. sid. 9, och sid. 23, not. 4. Stockholm 1894.

men efter nu vunnen erfarenhet återstår alltid möjligheten, att kornen af nötväckan blifvit inkilade i barkspringorna. En undersökning af huru djupt in uti barken kornen förekomma, torde vara det enda sättet att i tvifvelaktiga fall komma till afgörande; finnas de inkilade i fina springor eller t. o. m. under barken, då är väl nötväckan den sannskyldige gerningsmannen. Här talas ju emellertid om större barksprickor. Alldeles afgörande är naturligtvis, om plantor förekomma äfven på den från vägen vända sidan af träden.

Att sädesax från sädeslassen kunna nedfalla eller afstrykas på omgifvande träd, har väl litet hvar iakttagit, och detta har äfven vid ett senare tillfälle användts såsom förklaringsgrund öfver förekomsten af några rågplantor (3 exemplar), som af O. JAAP observerats på några pilträd (Kopfweiden) vid Triglitz i provinsen Brandenburg. [1]) De utmed vägen växande pilarne voro efter skörden behängda med afstruken råghalm, och dessa pilars »hufvuden» erbjuda ofta lämpliga ställen för kornens groning, hvarföre förklaringen i detta fall väl är odisputabel.

Egendomligt är, att fastän sädesplantor i träden förekomma till den stora omfattning, som ofvan visats, så har utom de iakttagelser, för hvilka här redogjorts, blott en enda observation af på samma sätt förekommande sädesplantor förut blifvit omnämnd. D:r O. NORDSTEDT har vid Strömsberg nära Jönköping iakttagit unga hafreplantor på en ask, under förhållanden, som enligt min mening göra det så godt som säkert, att kornen blifvit ditförda af nötväckan. [2])

Dock har konservator KOLTHOFF muntligen meddelat mig, att äfven han för länge sedan sett unga hafreplantor i träden under ofvan beskrifna förhållanden. [3])

[1]) O. JAAP, Kopfweiden-Ueberpflanzen bei Triglitz in der Prignitz. Verh. d. bot. Ver. d. Provinz Brandenburg, 37 (1895), S. 101.

[2]) A. G. NATHORST, l. c. sid. 262; WITTROCK, l. c. s. 9. —

[3]) Lektor C. A. LINDMAN har 1896 vid Sofiero i Skåne iakttagit ett fall af epifytisk hafre, som dock påtagligen ej har med nötväckan att göra. Den 17 september observerade han å en ekstubbe i parken, omedelbart intill en åker, en mängd hafreplantor. »Mellan bark och ved hade en klyfta, 1 cm. bred, uppkommit, där barken skilt sig från den murknande veden. På 0,3

Men i den utländska litteraturen har jag icke kunnat finna ett enda hit hänförligt fall. De af JAAP iakttagna ofvan omnämnda rågplantorna hafva påtagligen ej med nötväckans sädesplanteringar att göra, och detsamma torde ej heller vara fallet med en af MAGNIN[1]) omnämnd hveteplanta på en »hufvudpil» i södra Frankrike, lika litet som de af MURBECK iakttagna hafreplantorna på »hufvudpilar» i Skåne[2]) äro hit hänförliga. SABIDUSSI[3]) har på en lind vid Klagenfurt iakttagit en epifytisk majsplanta, en »spann» hög, men äfven den förekom i en förgrening tillsammans med andra epifyter och ej i någon barkspricka.

Anmärkas bör, att man emellertid först på senaste tid, tack vare professor WITTROCKS initiativ, hos oss börjat fästa någon uppmärksamhet vid den högre epifytvegetationen i Sverige. När han började sina undersökningar, hade den svenska litteraturen endast att omnämna ett enda hit hörande fall, men redan i sitt första arbete kunde han uppföra ej mindre än 103 arter epifytiskt förekommande kärlväxter, ett antal, som genom senare, ännu icke publicerade iakttagelser nu torde hafva väsentligen ökats. Det var detta arbete, som föranledde mig att anställa efterforskningar i samma riktning, hvarunder jag påträffade de första hafreplantorna, hvilka å sin sida ledde mig till fortsatta spaningar.[4]) Nu är det äfven i utlandet fallet, att hithörande

---

m. höjd öfver marken utsköt ur denna klyfta ett tätt knippe af hafreplantor, 24 till antalet, ännu fasthängande vid sina respektive hafrekorn, som befunno sig på 1 dm. djup nere i springan mellan bark och ved. Plantornas totala höjd från stråbasen var 25 -30 cm. De voro med långa rötter mycket starkt rotade i den genom förmultningen södersmulade ekveden». Såvida dessa hafrekorn icke nedfallit i springan genom menniskors åtgöranden, hvilket dock ej är sannolikt, enär stubben befann sig i ett snår, torde väl kornen snarast blifvit förda till stället af någon mindre gnagare, som där anlagt sitt förråd.

[1]) A. MAGNIN, Florule adventive des saules têtards de la région lyonnaise, p. 8. Lyon 1895.

[2]) WITTROCK, l. c.

[3]) H. SABIDUSSI, »Ueberpflanzen» der Flora Kärntens. Carinthia II, 84 (1894), S. 180.

[4]) Jag står äfven i förbindelse till professor WITTROCK för hvad han meddelat mig om den utländska litteraturen i ämnet.

undersökningar ända till sista tiden mycket försummats, men blifva de där, liksom nu hos oss, mera allvarligt bedrifna, torde man kanske äfven i andra länder, där nötväckan förekommer, finna sädesplantor i träden, under samma förhållanden som de i denna uppsats beskrifna.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 94.)

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 32 (1896): N:o 12; 33 (1897): 1. 8:o.
— *Société entomologique de Belgique.*
Annales. T. 39. 1895. 8:o.
Mémoires. 3—5. 1895—96. 8:o.
— *Société Belge de microscopie.*
Bulletin. Année 23 (1896/97): N:o 1—3. 8:o.
Budapest. *Musée National Hongrois.*
Természetrajzi füzetek. Vol. 20 (1897): P. 1—2. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad cientifica Argentina.*
Anales. T. 43 (1897): Entr. 1. 8:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Mededeelingen. 18. 1897. 8:o.
Cambridge. *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 9: P. 4 (1896). 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 5 (1897): N:o 2.
Chemnitz. *Naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Bericht. 13 (1892/95). 8:o.
Chicago. *Field Columbian museum.*
Publications. 14. 1896. 8:o.
Dresden. *K. Sächsisches statistisches Bureau.*
Zeitschrift. Jahrg. 42 (1896): H. 3—4. 4:o.
Dublin. *R. Irish academy.*
Proceedings. (3) Vol. 4: N:o 1. 1896. 8:o.
Edinburgh. *Botanical society.*
Transactions and proceedings. Vol. 20: P. 2—3. 1895—96. 8:o.
Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 23: H. 1—2. 1896, 97. 4:o.
Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 7 (1896): N:o 4. 8:o.
Glasgow. *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 27 (1895/96). 8:o.
Granville. *Denison university.*
Bulletin of the scientific laboratories. Vol. 9: P. 1. 1895. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Philol.-hist. Kl. 1896: H. 4. 8:o.
» Mathem.-physikal. Kl. 1896: H. 4. 8:o.
Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
WESSEL, C., Essai sur la représentation analytique de la direction. 1897. 4:o.
— *Carlsberg laboratoriet.*
Meddelelser. Bd 4: H. 2. 1896. 8:o.

(Forts. å sid. 140.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne.

Af A. V. Bäcklund.

(Meddeladt den 10 Mars 1897.)

I de föregående uppsatserna med den ofvanstående titeln[1] antogs öfverallt, att solens magnetiska axel står vinkelrätt mot ekliptikan. Men tydligt är, att detta antagande ej med någon högre grad af tillnärmelse kan räknas för uppfylldt. Snarare kunde den magnetiska axeln för solen anses sammanfalla med solens rotationsaxel. Vi göra då nu detta antagande, men hufvudsakligen för att visa, att de föregående räsonnementen ej häraf väsendtligen förändras.

73. När vi med J utmärka riktningen för solens magnetiska axel och låta M betyda solens magnetiska moment, R afståndet mellan solens medelpunkt och en arbiträr punkt p i närheten af jorden, $\varDelta$ afståndet mellan jordens och solens medelpunkter, räknadt i anseende till riktningen från den förste till den andre punkten, och slutligen vi med r beteckna afståndet mellan jordens medelpunkt och p, så få vi solens magnetiska potential för p lika med

$$\frac{M}{R^2}\cos RJ = -\frac{M}{R^3}(\varDelta\cos\varDelta J - r\cos rJ)\,.$$

---

[1]) Se Öfvers. 1893, N:o 1 och 7; Bih. B. 20 och 21; Öfvers. 1896, N:o 1.

Och när vi utveckla $\frac{1}{R}$ efter stigande potenser af $\frac{1}{\varDelta}$ och således sätta

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varDelta}\left(1 + \cos r\varDelta \frac{r}{\varDelta} + q_2 \frac{r^2}{\varDelta^2} + \ldots\right),$$

$\left(q_2 = \frac{3\cos^2 r\varDelta - 1}{2}\right)$, så bekomma vi för den nämnda potentialen uttrycket:

$$-\frac{M}{\varDelta^2}\cos \varDelta J - \frac{M}{\varDelta^3} r (3\cos r\varDelta \cos J\varDelta - \cos rJ) -$$

$$-\frac{M}{\varDelta^4} r^2 ((5q_2 + 1)\cos J\varDelta - 3\cos r\varDelta \cos J\varDelta) +$$

$$+ \text{ etc.}$$

Härmed är denna solpotential framställd som algebraisk summa af förnämligast fem andra potentialer, nämligen:

1:o en konstant, oberoende af p:s läge:

(1) $$-\frac{M}{\varDelta^2}\cos \varDelta J;$$

2:o en sådan potential, som vi i början af denna undersökning betraktade:

(2) $$\frac{M}{\varDelta^3} r \cos rJ;$$

3:o tre potentialer med en dags eller mindre än en dags period:

(3) $$-\frac{3M}{\varDelta^3} r \cos r\varDelta \cos J\varDelta,$$

(4) $$\frac{Mr^2}{\varDelta^4}(3\cos r\varDelta \cos rJ - \cos J\varDelta),$$

(5) $$-\frac{5Mr^2}{\varDelta^4} q_2 \cos J\varDelta.$$

Vi vilja nu undersöka effekten af hvar särskild af dessa fem potentialer.

74. Om den första termen i solpotentialen, termen (1), kan ifrågasättas, huruvida ej den ger anledning till ett magnetiskt dubbellager på athmosferens öfre yta, som skulle ha ett magnetiskt moment för enhetsarean lika med

$$\frac{M}{4\pi\Delta^2}\cos J\Delta$$

och vända sin positiva beläggning inåt, [1]) så att därför detta dubbellagers potential upphäfde för jordpartiklarne konstanten (1). Ty det är väl sant, att från (1) kommer ingen med *p*:s läge variabel magnetisk kraft på *p*, — och det gäller endast den magnetiska kraften af detta slag från solen, att den måste vara till största delen upphäfd för punkter *p* inom jorden, emedan eljest vi skulle observera vida större magnetiska variationer och framför allt dessa annorlunda dirigerade än hvad verkligen är fallet, och särskildt för jemvigten inom jordens inre förutsättes, att den anmärkta magnetiska kraften, och således den af *p*:s läge beroende delen af solpotentialen, blir för punkter inne i jordkärnan fullkomligt upphäfd, — men ändock kan konstanten (1) ej vara eller hafva varit utan någon effekt för jordens magnetiska tillstånd, och ett sådant dubbellager som det nämnda, kunde mycket väl vara bildadt af (1). Detta dubbellager skulle tydligtvis då utgöras af elektriska strömmar, hvilka på athmosferens öfre yta skulle vara inducerade genom samma (ether-) vågor, som medföra hela den i föregående n:o antecknade solpotentialen, och dessa elektriska strömmar skulle en gång af kontakterna mellan athmosferens ytpartiklar hafva blifvit omkastade till riktningen, och därefter skulle de nya ethervågorna från dem upphäfva, för det rum, som ligger innanför, en del af de nämnda, direkt från solen kommande vågorna. Men här skulle det vara den ansenliga delen (1) af dessa vågors potential, som skulle blifva upphäfd och det är mindre sannolikt, att

---

[1]) Den beläggning, som har samma tecken som $\cos J\Delta$, betecknas här såsom positiv, vare sig att $\cos J\Delta$ har tecknet *plus* eller *minus* för sitt numeriska värde.

till en motsvarande mäktighet strömmar skulle qvarhållas vid athmosferens gränsyta, än att det blir genom hela athmosferen, kanske äfven genom jordkärnan, som den nya strömbildningen sträcker sig. Ett sådant antagande är också nästan nödvändigt efter den uppfattning angående effekten af potential (2), som jag uttalat redan i n:o 7 och äfven allt sedan vidhållit. Enligt denna uppfattning måste nämligen hvarje solvåg uppväcka en elektrisk strömning kring hvarje partikel i jordens athmosfer, som vågen öfverfar, hvilken strömning sedan skulle försvinna, då vågen gick vidare, om ej densamma efterföljdes af andra likadana vågor från solen, som hvar för sig verka på samma vis. Det sålunda till en början mycket lilla linsformiga parti af athmosferen, som kommit i elektrisk strömrörelse, utvidgar sig med den första solvågen obehindradt tills denna träffar jordskorpan. Till dess är den elektriska strömrörelsen i nämnda athmosferiska parti att betrakta som stationär, så att en supponerad, däri inskjuten, främmande, magnetisk partikel ej erfar af sol- och jordmagnetism tillsamman någon annan verkan än en oscillatorisk.[1]) Men sedan solvågen kommit till jordskorpan, ha vi att räkna med ett parti af jorden, sammansatt af delvis athmosfer och delvis jordkärna, med båda i elektrisk strömrörelse, men åtskilda genom ett för dylik rörelse oemottagligt lager af jordskorpa. Att de i jorden uppväckta strömmarne ursprungligen haft annan riktning än den, de sedan besitta, och att detta beror därpå, att nästan genast kontakter uppstått emellan de partiklar, kring hvilka dessa strömmar bildats, samt att i anledning däraf strömmarne sjelfva omkastats och i följe häraf verka motsatt mot solen, det är nämndt förut i n:o 7.

Beträffande effekten af termen (1) är följaktligen bäst att säga, att den visar sig i en bildning af strömmar, analoga med dem, som vi i n:o 27 och följande antagit finnas hos solen.

---

[1]) Oscillation skulle komma däraf, att en luftpartikel blir magnetisk först något efter det solvågen hunnit öfver den, så att den våg, som den i sin ordning utskickar, kommer efter solvågen. Äfven äro de båda vågorna af motsatt karakter.

Dessa elektriska strömmar i jorden skulle vara lika fördelade rundt om medelpunkten, så att de kunde betraktas som likformigt utbredda öfver en serie sferiska ytor, koncentriska med jorden, och därför skulle de enligt n:o 36 icke kunna utöfva någon verkan på magnetiska partiklar, som följa med jorden i dess rörelse, således ej heller utöfva något inflytande på magnetnålen. Men dessa strömmar skulle ändra sig proportionelt mot $\cos J\varDelta$.

75. Det är termen (2) af solpotentialen, som föranleder den i dessa afhandlingar förut så ofta betraktade magnetiska polarisation af såväl athmosfer som jordkärna, som gör dem båda liksom sammansatta af magnetiska stafvar, hvilka för athmosferen sträcka sig från dennas yttersta gräns till jordskorpan och fortlöpa skrufformigt på det viset, att tangenten i en godtycklig punkt af en stafs midtellinie (eller axellinie) alltid bildar en och samma vinkel med jordens rotationsaxel. — (Se inledningen till afhandlingen i Bih. B. 20, Afd. I, N. 2.) — Denna midtellinie skall vidare i athmosferens öfre gränsyta gå i samma riktning som J. För jordskorpans öfre yta skulle dess riktning vara J'' och J'' vara i det närmaste fast förbunden med jorden. Se dock n. 18—21 om denna axels variation. Den samma riktningen J'' skulle alla stafvar i jordkärnan besitta, således dessa stafvar vara rätliniga. Och då vi med J' förstå riktningen af jordens rotationsaxel, skulle vi, enligt hvad som nyss nämndes, hafva

$$\text{(7)} \qquad \text{vinkeln } (J'J'') = \text{vinkeln } (J'J) \,.$$

Af denna magnetiska polarisation följer, att för magnetiska punkter i jordathmosferen existerar den magnetiska potentialen

$$\text{(8)} \qquad M \frac{a''^3 - a'''^3}{\varDelta^3} \frac{\cos rJ''}{r^2} \,,$$

såsom redan dess närmare är förklaradt i n. 14 och 16.

76. Vi komma nu till den med (3) betecknade termen af solpotentialen. Äfven denna föranleder sådan strömbildning kring de athmosferiska partiklarna, att slutligen ytterligare

verkan af (3) upphäfves. Athmosferen polariseras i Δ:s riktning. Vid jordens dagliga rörelse ändras således oupphörligen denna nya slags gruppering af luftpartiklarna till magnetiska stafvar och denna oupphörliga växling i gruppering hindrar athmosferen att verka inducerande af magnetism i jordkärnan. Axlarne för den af potential (3) uppväckta athmosferiska magnetismen böja sig i stället tangerande omkring jordskorpan.

Men då uppkommer ingen verkan från (3) på magnetiska partiklar i jordskorpans närhet.

77. Termen (4) kunna vi skrifva sålunda:

$$(4') \qquad \frac{Mr^5}{\Delta^4}\frac{d}{d\Delta}\left(\frac{d}{dJ}\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Men vi förstå då lätt, genom jemförelse mellan (4') och (2), som kan skrifvas såsom

$$\frac{Mr^3}{\Delta^3}\frac{d}{dJ}\left(\frac{1}{r}\right),$$

att effekten af solpotentialen (4) håller sig till de magnetiska stafvar med axeln J, som bildats af potential (2), och att den hufvudsakligen består däri, att till en mycket ringa del magnetismen omkastas i närliggande element af närliggande magnetiska stafvar, i följd däraf att dessa sammanföras parvis, eller sammanträngas. Men därför må äfven (4) komma att, efterhand som dess ströminducerande verkan sträcker sig till jordskorpan, så förhålla sig som om det däri förekommande J ändrade sig till J''. Och efter som de magnetiska, skrufformiga, stafvarne med axelriktningen $J - J''$ ej splittras af de höljen af vattenånga och torr luft, som omgifva det fastare jordklotet, så kommer ej något af den af (4) inducerade magnetismen ut på dessa höljen. Det återstår dock att tänka efter hvad som skall hända, sedan (4):s inflytande sträckt sig ända till jordskorpan.

Vi kunna ej antaga, att polarisationen fortsättes inåt jordkärnan på det viset, att dess nya magnetism skulle tillsammans med den nya i athmosferen blifva äquivalent med följande system af tre enkla magnetiska lager:

1:o ett på athmosferens öfre gränsyta med yttätheten

$$(9)\qquad -\frac{5}{4\pi}\frac{M}{\varDelta^4}a'(3\cos rJ\cos r\varDelta - \cos J\varDelta),$$

2:o ett på jordskorpans öfre yta med yttätheten

$$(10)\qquad +\frac{5}{4\pi}\frac{M}{\varDelta^4}a''(3\cos rJ''\cos r\varDelta - \cos J''\varDelta)$$

och slutligen

3:o ett på jordskorpans inre yta med yttätheten

$$(11)\qquad -\frac{5}{4\pi}\frac{M}{\varDelta^4}a'''(3\cos rJ''\cos r\varDelta - \cos J''\varDelta).$$

Då nämligen skulle visserligen den magnetiska potentialen af lagren (9)—(11) upphäfva potential (4) för punkter i jordkärnans inre, men (11) sjelf innehåller en hastigt varierande del, en del med en dags period, och dess tillvaro skulle endast kunna bero på en variation i jordkärnans magnetiska polarisation af samma korta tidsperiod, men tillståndet där är nästan stationärt, antaga vi. Skrifva vi särskildt upp de delar af (10) och (11), som ha en dags period; de erhållas af de sista termerna i de följande uttrycken för $\cos r\varDelta$ och $\cos J''\varDelta$:

$$\cos r\varDelta = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(s+\lambda),$$
$$\cos J''\varDelta = \cos\theta\sin\delta + \sin\theta\cos\delta\cos(s+\psi),$$

hvarest ψ är den magnetiska nordpolens östliga longitud från Greenwich och λ är observationsortens östliga longitud från samma ställe; nämnda delar lyda således som följer:

$$(10')\qquad \frac{5}{4\pi}\frac{Ma''}{\varDelta^4}(3\cos rJ''\cos\varphi\cos(s+\lambda) - \sin\theta\cos(s+\psi))\cos\delta,$$

$$(11')\qquad -\frac{5}{4\pi}\frac{Ma'''}{\varDelta^4}(3\cos rJ''\cos\varphi\cos(s+\lambda) - \sin\theta\cos(s+\psi))\cos\delta.$$

Men, enligt hvad nyss förklarades, skola dessa partier af lagren på jordskorpan saknas, och därför skall af lagret (10) blott ett lager qvarstå med yttätheten

(12) $$+\frac{5}{4\pi}\frac{Ma''}{\Delta^4}(3\cos rJ''\sin\varphi-\cos\theta)\sin\delta\,,$$

och af lagret (11) blott ett med yttätheten

(13) $$-\frac{5}{4\pi}\frac{Ma'''}{\Delta^4}(3\cos rJ''\sin\varphi-\cos\theta)\sin\delta\,.$$

Dessa två lager gifva tillsamman upphof till den följande potentialen, som skall gälla för alla i athmosferen inskjutna magnetiska punkter (poler):

(14) $$\frac{M}{\Delta^4}\frac{a''^5-a'''^5}{r^3}(3\cos rJ''\sin\varphi-\cos\theta)\sin\delta\,;$$

det är den potential, hvilken vi i den närmast föregående uppsatsen betraktade såsom orsak till den årliga variationen af de magnetiska elementen. Se n. 72.

Att af lagren (10) och (11) endast qvarstå lagren (12) och (13), förklara vi, i öfverensstämmelse med hvad vi sagt i n. 76 om ett liknande fall, på så vis, att vi säga, att axellinierna för specielt den del af den nya magnetiska polarisationen af de athmosferiska partiklarne, som skulle finnas i närheten af jordskorpan, motsvarande det, som uteslutits af lagret (10), d. v. s. (10′), böja sig tangerande omkring jordskorpan. Då uppkommer ej något lager (11′), utan i stället för (11) erhålla vi endast lagret (13).

78. Det återstår nu blott att undersöka verkan af potential (5). Äfven härifrån skola strömmar uppväckas inom jordathmosferen och denna därigenom så magnetiseras, att ytterligare verkan af (5) upphäfves. Emedan här vi ha en daglig växling af strömmar, t. o. m. en fullständig växling under loppet af endast en half dag, ha vi ej att vänta, att jordkärnan, då dess tillstånd antages nära stationärt, häraf influeras på samma vis som athmosferen. Om de ifrågavarande strömmarnes natur sluta vi af n. 30. Vi få ett strömsystem på athmosferens öfre gränsyta, äquivalent med ett magnetiskt dubbellager, hvars moment skulle vara

$$(15) \qquad -\frac{25}{12\pi}\frac{Ma'^2}{\varDelta^4}\frac{3\cos^2 r\varDelta - 1}{2}\cos J\varDelta .$$

Äfven på de två höljen af vattenånga och torr luft, som omgifva jordskorpan, skulle måhända två dylika strömsystem uppkomma, motsatta mot hvarandra i afseende på strömmarnes riktningar. Och det tör hända, att vi häraf erhålla en daglig och äfvenledes en årlig variation af de magnetiska elementen (deklination, horizontal- och vertikal-komponent af jordmagnetismen) för orter på jordskorpans öfre yta, hvilken blefve bestämd af potentialen

$$(16) \qquad \tfrac{5}{8}\frac{Mr^2}{\varDelta^4}\cos J\varDelta\left[3(\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t)^2 - 1\right.$$
$$\left. - 3\varkappa(\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(t - \Theta))^2 + \varkappa\right].$$

Här skulle $\varkappa$ och Θ ha samma betydelse som i n:o 31, men kanske besitta andra talvärden. Ty det är genom helt andra solvågor denna potential framkommer än den motsvarande potential (14) i n:o 31. De vågor, som lemna sist nämnda potential, åtfölja de dagliga värmevågorna, men de, som lemna potential (16), äro de samma som äfven frambringa potential (8) och som åtföljas af ett helt annat slag af värmevågor, nämligen dem, som omtalats i n:o 45, 46, 63. Osannolikt är det icke, att $\varkappa = 1$, $\Theta = 0$, ty de ifrågavarande vågorna följa de magnetiska stafvarna med axelriktningen $J - J''$ och dessa stafvar fortsättas kontinuerligt genom de båda nämnda höljena.[1]) Men i fall $\varkappa = 1$, $\Theta = 0$, försvinner (16) identiskt och vi kunna då lätt förstå, att genom de strömsystem, analoga med (15), som erhållits på dessa höljen, har den genom (5) inducerade elektriska strömningen i athmosferen blifvit afslutad, så att under höljena ingen magnetisk verkan uppträder från (5), d. v. s. den direkta verkan härifrån är upphäfd af den beskrifna, i athmosferen uppväckta magnetismen. —

[1]) och de stå nästan stilla inom de lägre partierna af athmosferen, hvarest de ha riktningen J''.

Men i detta fall finna vi således ingen annan magnetisk verkan i närheten af jordskorpan än den, som vi i de föregående uppsatserna studerat. —

Om åter solens magnetiska axel ej sammanfaller med dess rotationsaxel, så inträder en ny magnetisk variation, beroende därpå, att jordens magnetiska poler då erhålla jemte den förut i Öfvers. 1893 N. 7 studerade rörelsen en rotation med samma period, som gäller för rotationen af solens magnetiska axel omkring dess rotationsaxel. Detta enligt eqv. (7) i n:o 75, som gäller för J såsom magnetisk axel till solen, oafsedt hvad för riktning denna axel har. Att solens rotation omkring dess axel utöfvar inflytande på jordmagnetismen genom att variera de magnetiska elementen i närheten af jordskorpan periodiskt under loppet af $26^1/_3$ dagar, som är i medeltal solens rotationstid, — synes ganska sannolikt, efter hvad som anmärkts af HORNSTEIN år 1871. —

79. Vinkeln (JJ'), hvarom vi talade i n:o 75, var vinkeln mellan solens och jordens rotationsaxlar, eftersom den magnetiska axeln J antogs sammanfalla med solens rotationsaxel. Angående åter denna senares riktning veta vi följande. Soleqvatorn, som står vinkelrätt mot den, skär ekliptikan i den räta linie, som sammanbinder med hvarandra solens positioner den 11 Juni och den 12 December, hvilkas longituder äro 80° 21′ resp. 260° 21′. Och af dessa solpositioner är det den senare, som utgör uppstigande nod för soleqvatorn, d. v. s. för solfläckarnes apparenta banor. Vidare är soleqvatorns lutning mot ekliptikan 7° 20′. Vi se då lätt, att

$$\cos JJ' = \cos 7°\,20' \cos \varepsilon - \sin 7°\,20' \sin \varepsilon \cos 80°\,21',$$

när med ε betecknas ekliptikans lutning mot jordeqvatorn. Vi ha $\varepsilon = 23°\ 27'$ och således få vi

$$(JJ') = 25°\ 39',5. \tag{17}$$

I sammanhang härmed anför jag ock den formel, som gäller för $\cos J\varDelta$, hvilket här ofta förekommit, senast i uttrycket (16):

$$\cos J\varDelta = -\sin 7°\,20' \sin (\odot - 80°\,21'), \tag{18}$$

då $\odot$ = solens longitud. Af (7), jemf. med (17), skulle vi sluta, att

$$(J''J') = 25^\circ\, 39',5\,.$$

Jordens magnetiska poler skulle således ligga på så stort afstånd från de geografiska polerna. Dock skrifva vi detta afstånd fortfarande lika med endast 12° 10'. Jfr noten till n:o 53 sid. 24 i uppsatsen i Bih. B. 21, Afd. I, N. 2.

80. *Af solmagnetismen förorsakad förflyttning af de geografiska polerna.* — Huru solens magnetism inverkar på jordens rotation, har jag omnämnt förut i uppsatsen i Öfvers. för 1893 N. 7 (n:o 25, 26). Där antogs visserligen $J\Delta = 90^\circ$, men det andra, det ofvanstående, antagandet, som uttryckes genom formel (18), förändrar blott obetydligt de förra resultaten. Dock vill jag här anföra, huru man i förevarande fall skulle ställa de beträffande räkningarna.

Af jordens magnetism är det endast en del, som är att betrakta såsom så fast förbunden med jorden, att den måste anses följa med den i hvar och en dess, verkliga eller supponerade, vridning kring tyngdpunkten. Detta är den del däraf, som utmärkes genom de tvänne magnetiska lager, hvilka uppträda på jordskorpans ytor (såväl den yttre som den inre (undre)) och besitta yttätheten

$$\pm \frac{3}{4\pi}\frac{M}{\Delta^3}\cos rJ''\,.$$

Det härtill hörande lagret på athmosferens öfre yta af yttätheten

$$-\frac{3}{4\pi}\frac{M}{J^3}\cos rJ$$

deltar endast i jordens translation, ej alls i dess rotation, ty det föregående J behåller sig städse parallelt med solens magnetiska axel.

I följe häraf bekomma vi för jordens rotation omkring dess tyngdpunkt följande eqvationer, hvari X, Y, Z-axlarne äro principal-tröghetsaxlar i afseende på tyngdpunkten:

$$(19)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - A)\,qr = 3\,(C - A)\,k \sum \dfrac{MYZ}{\varDelta^5} + \dfrac{\partial G}{\partial \pi}, \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = -\,3\,(C - A)\,k \sum \dfrac{MZX}{\varDelta^5} + \dfrac{\partial G}{\partial \varkappa}, \\ C\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial \varrho}, \end{cases}$$

hvarest

$$G = -\frac{M\bar{\mu}}{\varDelta^3}\left(\cos JJ'' - 3\cos J\varDelta \cos J''\varDelta\right).$$

Se n:o 25 eqvv. (8) Öfvers. 1893 sid. 434.

Här blir

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial \pi} = -\dfrac{M\bar{\mu}}{\varDelta^3}\big[\cos J''y \cos Jz - \cos J''z \cos Jy - \\ \qquad - 3\cos J\varDelta\,(\cos J''y \cos \varDelta z - \cos J''z \cos \varDelta y)\big], \\ \dfrac{\partial G}{\partial \varkappa} = -\dfrac{M\bar{\mu}}{\varDelta^3}\big[\cos J''z \cos Jx - \cos J''x \cos Jz - \\ \qquad - 3\cos J\varDelta\,(\cos J''z \cos \varDelta x - \cos J''x \cos \varDelta z)\big], \\ \dfrac{\partial G}{\partial \varrho} = -\dfrac{M\bar{\mu}}{\varDelta^3}\big[\cos J''x \cos Jy - \cos J''y \cos Jx - \\ \qquad - 3\cos J\varDelta\,(\cos J''x \cos \varDelta y - \cos J''y \cos \varDelta x)\big]. \end{cases}$$

Emellertid ha vi att skrifva, då X-axeln går i Greenwichs meridianplan:

$$\begin{aligned} &\cos J''x = \sin\theta\cos\psi\,,\ \cos J''y = \sin\theta\sin\psi\,,\ \cos J''z = \cos\theta\,, \\ &\cos Jx = \sin JJ' \cos JJ'x = \sin\bar{\omega}\cos(\nu t + \alpha)\,, \\ &\cos Jy = \sin JJ' \cos JJ'y = -\sin\bar{\omega}\sin(\nu t + \alpha)\,, \\ &\cos Jz = \cos JJ' = \cos\bar{\omega}\,, \end{aligned}$$

där för korthets skull $\bar{\omega}$ står i stället för 25° 39′ (se eqv. (17)). α är en konstant och ψ den magnetiska nordpolens östliga longitud från Greenwich. Och hvad $\cos J\varDelta$ beträffar, som äfven förekommer i uttrycken för $\dfrac{\partial G}{\partial \pi}$, $\dfrac{\partial G}{\partial \varkappa}$, $\dfrac{\partial G}{\partial \varrho}$, så är detta bestämdt af eqv. (18). Slutligen

$$\cos \varDelta x = \cos\delta\cos nt\,,\ \cos \varDelta y = -\cos\delta\sin nt\,,$$
$$\cos \varDelta z = \sin\delta = \sin\varepsilon\sin\odot\,.$$

Häraf inses lätt, att, om vi förbigå termer af blott en dags period, och det är oss tillåtet, emedan vid den följande integrationen för vinnande af p, q, r dessa termer blifva af synnerligen obetydligt inflytande, så måste vi kunna skrifva de i början anförda rörelseeqvationerna under formen:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{C-A}{A} qr = -\frac{M\bar{\mu}}{A\varDelta^3} \sin\theta \sin\psi (\cos\bar{\omega} - 3\cos J\varDelta \sin\delta)$$

$$= -\frac{M\bar{\mu}}{A\varDelta^3} \sin\theta \sin\psi \big[\cos\bar{\omega} +$$

$$+ \tfrac{3}{2} \sin\varepsilon \sin 7^\circ 20' (\cos 80^\circ 21' -$$

$$- \cos(2 \odot - 80^\circ 21'))\big],$$

$$\frac{dq}{dt} - \frac{C-A}{A} pr = \frac{M\bar{\mu}}{A\varDelta^3} \sin\theta \cos\psi (\cos\bar{\omega} - 3\cos J\varDelta \sin\delta)$$

$$= \frac{M\bar{\mu}}{A\varDelta^3} \sin\theta \cos\psi \big[\cos\bar{\omega} +$$

$$+ \tfrac{3}{2} \sin\varepsilon \sin 7^\circ 20' (\cos 80^\circ 21' -$$

$$- \cos(2 \odot - 80^\circ 21'))\big],$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

De första termerna i högra membra af de två första eqvv. (19) äro ej medtagna: deras inflytande på p och q är bekant förut (se eqvv. (9) i n:o 25) och det skall blott adderas till de följande eqvv. (21).

I de föregående eqvationerna kunna vi skrifva $\odot = 2\pi t +$ konst. och $\psi = at + \psi_0$ samt efter den sista differentialeqvationen $r = \nu$. Det Julianska året tages till enhet för tiden, således $\nu = 2\pi \cdot 366{,}25$ och $a = -10^{0{,}844-3} = -0{,}00698$. Integrationen af de förra eqvationerna lemnar oss då följande partikulärlösning:

$$p = -\frac{M\bar{\mu}}{A\varDelta^3} \{m \sin\theta \cos\psi (\cos\bar{\omega} + \tfrac{3}{2} \sin\varepsilon \sin 7^\circ 20' \cos 80^\circ 21')$$

$$+ \tfrac{3}{4} \varkappa \sin\varepsilon \sin 7^\circ 20' \sin\theta (\cos(2 \odot - 80^\circ 21' + \psi) -$$

$$- \cos(2 \odot - 80^\circ 21' - \psi))$$

$$+ \tfrac{3}{4} \varkappa' \sin\varepsilon \sin 7^\circ 20' \sin\theta (\cos(2 \odot - 80^\circ 21' + \psi) +$$

$$+ \cos(2 \odot - 80^\circ 21' - \psi))\},$$

$$q = -\frac{M\bar{\mu}}{A\Delta^3}\{m \sin\theta \sin\psi (\cos\bar{\omega} + \tfrac{3}{2}\sin\varepsilon \sin 7^\circ\, 20' \cos 80^\circ\, 21')$$
$$-\tfrac{3}{4}\varkappa'' \sin\varepsilon \sin 7^\circ\, 20' \sin\theta (\sin(2\odot - 80^\circ\, 21' + \psi) +$$
$$+ \sin(2\odot - 80^\circ\, 21' - \psi))$$
$$-\tfrac{3}{4}\varkappa''' \sin\varepsilon \sin 7^\circ\, 20' \sin\theta (\sin(2\odot - 80^\circ\, 21' + \psi) -$$
$$- \sin(2\odot - 80^\circ\, 21' - \psi))\}$$

med

$$\varkappa'' = -\varkappa\,, \qquad \varkappa''' = -\varkappa'\,, \qquad \varkappa\left(16\pi^2 - \left(\frac{C-A}{A}\nu\right)^2\right) = 4\pi\,,$$
$$\varkappa' = \frac{C-A}{4\pi A}\nu\varkappa\,, \qquad m\left(\frac{C-A}{A}\nu - a\right) = 1\,,$$

såsom det är lätt att kontrollera genom substitution af de anförda värdena för p och q i de förra differentialeqvationerna.

Vi finna nu lätt, att

$$m = 0{,}1324\,, \qquad \varkappa = 0{,}1244 = -\varkappa''\,, \qquad \varkappa' = 0{,}0747 = -\varkappa'''\,,$$

och således, då θ tages $= 12^\circ\, 10'$,[1]) för ofvanstående p, q värdena:

$$(21)\begin{cases} \dfrac{p}{\nu} = -0'',00178 \cos\psi + 0'',0001404 \sin\psi \sin(2\odot - 80^\circ\, 21') \\ \qquad\qquad - 0{,}0000842 \cos\psi \cos(2\odot - 80\cdot 21)\,, \\ \dfrac{q}{\nu} = -0'',00178 \sin\psi - 0'',0001404 \cos\psi \sin(2\odot - 80^\circ\, 21') \\ \qquad\qquad - 0{,}0000842 \sin\psi \cos(2\odot - 80\cdot 21)\,. \end{cases}$$

Men detta är i det närmaste eqvv. (11) i n:o 26. Alltså, då $J\Delta$ bestämmes genom (18) och följaktligen blott litet afviker från 90°, blir verkan af denna afvikelse mycket oansenlig, — såsom angafs i början af denna n:o.

Venstra membra af eqvv. (21) äro att fatta såsom koordinator för geografiska eller astronomiska nordpolen i afseende på jordens figurpol (som är jordens skärningspunkt med positiva z-axeln). De första termerna i högra membra tyda på en i öfvervägande grad cirkulär rörelse af den förra polen kring den senare med en period af 900 år, d. v. s. samma tidrymd som för motsvarande rörelse af den magnetiska polen.

[1]) samt vi skrifva som i n:o 26: $\log\frac{M\bar{\mu}}{A\Delta^3} = 0{,}894 - 4$.

81. *Förflyttning af polerna genom solvärmet.* — Om således, enligt eqvv. (21), solens magnetism ej märkbart rubbar polernas läge, så kan måhända solens värme hafva annan effekt. För att kunna döma härom, böra vi först göra oss reda för, hvad G skulle betyda, om vi ville på denna fråga använda eqvv. (19). — Vi räkna då endast med det värme, som gör solen lik ett magnetiskt-oscillatoriskt system med J till axel, äfvensom med de af detta solvärme uppkomna värmelager på athmosferens öfre yta och på jordskorpans båda ytor samt med värmet i sjelfva jordskorpan. Vi böra likaledes betänka, att, endast när vi ha koincidenser mellan oscillationerna i en värmevåg och värmeoscillationerna i en partikel, som vågen träffar, erhåller denna partikel en translation och ej blott en oscillatorisk rörelse. Af n:o 54 veta vi redan, att solvärmet ej får anses utöfva någon translatorisk verkan på jorden, eller rättare, vi ha gjort detta antagande i n:o 51 för eqv. (16'''). Vi se emellertid om den värmepotential, som vid enbart translationer af jorden kan uppträda, att den är sammansatt af trenne delar:

1:o solens potential i afseende på ett värmelager på athmosferens öfre yta, hvilken uppgår till

$$(a) \qquad -\tfrac{1}{2}\frac{M''^2}{\Delta^6}a'^3,$$

2:o solens potential i afseende på ett värmelager på jordskorpans öfre yta och ett annat på dess undre. Denna potentials värde blir:

$$(b) \qquad \tfrac{1}{2}\frac{M''^2}{\Delta^6}(a''^3 - a'''^3).$$

De nämnda två värmelagren å ömse sidor om jordskorpan äro inducerade omedelbart af solvågorna vid deras passage genom jorden och böra därför till en början hafva sin polarisationsaxel parallel med J. Men, emedan såväl de luftpartiklar, som ingå i det ena lagret, som de partiklar af jordkärnan, som tillhöra det andra, äro celler i de här ofta nämnda magnetiska stafvarne och dessa hafva vid jordskorpan riktningen J'', så blir det nästan endast i denna riktning som oscillationer för nämnda

partiklar kunna bevaras lika under en längre tid och härför ändras ifrågavarande värmelagers axel J hastigt till J''. Att häraf ej uppstår en oupphörlig addition af värmelager på jordskorpan, beror därpå, att vågen från det af solen inducerade lagret på athmosferens öfre yta är af motsatt karakter mot solvägen och alstrar därför tvänne nya värmelager å ömse sidor om jordskorpan, hvilka, liksom de förra, direkt af solen alstrade lagren, ha sina axlar till en början parallella med J, men sedan parallella med J'', och då, men ej förr, neutralisera dessa lager de föregående, såsom äfven motsatta mot dem i afseende på oscillationerna. Naturligtvis räkna vi med absolut samma $\varDelta$ för nämnda våg från det öfversta athmosferiska lagret som för den solvåg, som gifvit oss såväl detta lager som de två först betraktade på jordskorpans två ytor.

Vi tänka alltjemt, att jordens uppvärmning tillgått så som dess magnetisering (n:o 74) med tillägg af att jordskorpan uppvärmes och polariseras af luften och af jordkärnan. — Tillkommer

3:o en potential i afseende på jordskorpans värme. — Vi hade (n:o 50, 51)

$$\lambda \frac{M''}{\varDelta^3} r \cos rJ'' \sin mt \tag{22}$$

till att vara den potential, som inducerar det ifrågastående värmet. Den samma härrör från de båda värmelagren med axelriktningen J'', som, enligt hvad nyss utvecklades, finnas å ömse sidor om jordskorpan, och dessas potential i afseende på jordskorpan blir således

$$\tfrac{1}{3} \lambda \frac{M''}{\varDelta^3} m'a''^3 . \tag{c}$$

Någon annan potential af samma art kan ej ifrågakomma, när det endast är jordens translationer som betraktas. Men häraf följer, att, eftersom enligt räsonnementet i n:o 51:

$$(a) + (b) + (c) = 0 ,$$

solvärmet omöjligen kan utöfva någon translatorisk verkan på jorden.

Men blir det fråga om rotatorisk verkan, så måste vi betänka, att af en virtuel rotation af jorden uppstår visserligen intet arbete på athmosferens öfre värmelager, ty dettas polarisationsaxel är alltid parallel med J, ej heller arbete från potential (b), men ett alldeles särskildt arbete på jordskorpans värme, från nämligen de tvänne par af lager, med J till axel, som från solen och från athmosferens öfversta värmelager induceras på jordskorpans båda gränsytor. Vi få nämligen vid en infinitesimal rotation af jorden af allmännaste slag axeln J'' att ändra sin lutning mot J och mot $\varDelta$ till och med under den korta tid, som förflyter emellan bildningen af de nämnda lagren, som är lika med tiden emellan ankomsten till jordskorpan af solvågen och vågen från athmosferens öfre värmelager. Och emedan vi skola räkna med samma $\varDelta$ för båda dessa vågor och för båda de par af värmelager, som de alstrat å ömse sidor om jordskorpan, så blir dessa senares arbete på jordskorpans värme helt enkelt

$$(23) \qquad \tfrac{1}{2}\lambda \frac{M''}{\varDelta^3} m'a''^3 (\delta \cos JJ'' - 3 \cos J\varDelta \delta \cos J''\varDelta)\,.$$

Så uttrycka vi tydligen äfven det sol-arbete af detta slag, som åtföljer en godtycklig, men infinitesimal, rotation af jorden. δ skall då hänföra sig till början och till slutet af rotationen.

Jag har kort förut nämnt, att de senaste två paren af värmelager hastigt utjemna sig, så att de få J'' till axel och då äfven upphäfva hvarandra, äfvensom att de oupphörligen förnyas, så att, så länge värmevåg kommer från solen, måste ett värmelager finnas på hvar sida om jordskorpan med J'' till axel. Tänkte vi oss, att det plötsligen blefve slut med vågrörelsen från solen: då skulle den sista vågen från jordathmosferens öfre yta neutralisera dessa lager, vi kunna säga, utsläcka dem. Det var dessa lager, till hvilka potential (22) hörde.

I eqvv. (19), om de skola tillämpas på frågan om solvärmets rotatoriska effekt på jorden, skall således för δG användas uttrycket (23).

82. Men dessa eqvv. (19) kunna ändock ej anses såsom fullt tillämpliga för lösning af den uppställda frågan. Det blir nämligen alldeles nödvändigt att äfven taga hänsyn till de relativa rörelser af jordpartiklarne, till hvilka värmet gifver upphof. Därför skola vi i stället för nämnda eqvationer heldre begagna de följande:

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Ap) + (C - B)rq + Cr\beta - Bq\gamma = \\ \qquad = 3k(C - B)\sum \frac{MYZ}{\Delta^3} + \frac{\partial G}{\partial \pi}, \\ \frac{d}{dt}(Bq) - (C - A)rp - Cr\alpha + Ap\gamma = \\ \qquad = -3k(C - A)\sum \frac{MZX}{\Delta^3} + \frac{\partial G}{\partial \varkappa}, \\ \frac{d}{dt}(Cr) + (B - A)pq + Bq\alpha - Ap\beta = \\ \qquad = 3k(B - A)\sum \frac{MXY}{\Delta^3} + \frac{\partial G}{\partial \varrho}, \end{cases}$$

då p, q, r betyda komponenter af jordens medelrotation och α, β, γ tillhöra principaltröghets-axlarnes, d. ä. X, Y, Z-axlarnes rörelse inom jordkroppen, således:

$$-A\alpha = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

$$-B\beta = \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$

$$-C\gamma = \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Alltså: $p + \alpha$, $q + \beta$, $r + \gamma$ äro komponenter af den hastighet, hvarmed jordens principaltröghetsaxlar rotera omkring origo. På grund af litenheten af p, q, α, β, γ försumma vi produkterna af p och q med α, β och γ och antaga äfven, att för tillfället $A = B$. Om vi då endast hålla räkning på termer af mer än en dags period, så få vi skrifva eqvv. (24) på följande vis:

$$(25)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Ap) + (C - B)\nu q + C\nu\beta = \frac{\partial G}{\partial \pi} \\ \frac{d}{dt}(Bq) - (C - A)\nu p - C\nu\alpha = \frac{\partial G}{\partial \varkappa}, \\ Cr = C^0\nu. \end{cases}$$

$\nu = 2\pi \cdot 366{,}25$, när det Julianska året är taget till enhet för tiden. Vi ha satt i de två första eqvationerna $C^0 = C$, emedan qvoten $\frac{C^0 - C}{C}$ är att betrakta som så liten, att produkterna af den och p eller q, α, β kunna försummas.

För $\frac{\partial G}{\partial \pi}$, $\frac{\partial G}{\partial \varkappa}$ erhållas de riktiga värdena från uttrycket (23) för δG.

Vi vilja med p', q' beteckna en partikulär lösning af (25) för det fall att $\alpha = \beta = 0$, så att

$$(26)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Ap') + (C - B)\nu q' = \frac{\partial G}{\partial \pi}, \\ \frac{d}{dt}(Bq') - (C - A)\nu p' = \frac{\partial G}{\partial \varkappa}. \end{cases}$$

Den allmänna lösningen till de samma eqvationerna (25) är då bestämd af $p' + p''$, $q' + q''$, hvarest p'', q'' bilda den allmänna lösningen för:

$$(27)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Ap'') + (C - B)\nu q'' + C\nu\beta = 0, \\ \frac{d}{dt}(Bq'') - (C - A)\nu p'' - C\nu\alpha = 0. \end{cases}$$

83. Vi antaga, att $\frac{dA}{dt}$ och $\frac{dB}{dt}$ äro ytterst små och att för tillfället $A = B$. Då få eqvv. (26) formen:

$$A\frac{dp'}{dt} + (C - A)\nu q' = \frac{\partial G}{\partial \pi},$$

$$A\frac{dq'}{dt} - (C - A)\nu p' = \frac{\partial G}{\partial \varkappa}$$

och en partikulär lösning till dem erhålles mycket lätt af n:o 80. Förevarande δG differerar nämligen endast på en faktor från det i citerade n:o använda δG, i det nämligen det genom (23) uttryckta δG är en produkt af

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\lambda m' M''}{M\bar{\mu}} a''^{3}$$

och δG i n:o 80. Nu hade vi enligt n:o 51

$$\lambda m' = \frac{M''}{\Delta^3}$$

samt enligt eqv. (23) i n:o 53 $\log M'' = 41{,}07$. Vidare var $\log M = 40{,}46$, $\log \bar{\mu} = 25{,}931$ samt $\log \Delta = 13{,}169$, $\log a'' = 8{,}804$ (allt i CGS-enheter). Därför:

det ifrågav. δG (23) $= -226 \times \delta G$ i n:o 80.

Af eqvv. (21) följa då genast dessa värden för p', q':

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{p'}{\nu} = 0'',40 \cos\psi - 0'',03 \sin\psi \sin(2\odot - 80^\circ\, 21') \\ \qquad\qquad + 0,\, 02 \cos\psi \cos(2\odot - 80\cdot 21)\,, \\ \dfrac{q'}{\nu} = 0'',40 \sin\psi + 0'',03 \cos\psi \sin(2\odot - 80^\circ\, 21') \\ \qquad\qquad + 0,\, 02 \sin\psi \cos(2\odot - 80\cdot 21)\,. \end{cases}$$

84. Återstår att bestämma den allmänna lösningen till eqvv. (27). I dessa eqvationer kan $C\nu$ räknas för konstant, ty Cr är det och vi ha fått skrifva ν för r, emedan α och β, som multiplicera Cr, äro mycket små. Men då införa vi ξ och η genom eqvationerna:

$$\frac{Ap''}{C\nu} = \xi\,, \quad \frac{Bq''}{C\nu} = \eta$$

och kunna därefter skrifva de ifrågastående eqvv. (27) sålunda:

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{C-B}{B}\nu\eta + \beta = 0\,,$$

$$\frac{d\eta}{dt} - \frac{C-A}{A}\nu\xi - \alpha = 0\,.$$

Som förut sätta vi $B = A$. Skrifva vi vidare, för att förkorta, $\frac{C - A}{A} \nu = \mu$, så få vi de ifrågavarande eqvationerna under den enklare formen:

$$\frac{d\xi}{dt} + \mu\eta + \beta = 0,$$

$$\frac{d\eta}{dt} - \mu\xi - \alpha = 0.$$

Men innan vi kunna fortsätta, måste vi bestämma α och β. — Emedan dessa qvantiteter alltid blifva mycket små och detsamma är förhållandet med ξ och η, skrifva vi på försök:

$$\alpha = \lambda'\xi + \lambda''\eta + \alpha',$$

$$\beta = \mu'\xi + \mu''\eta + \beta',$$

i hopp om att λ', λ'', μ', μ'', α', β' skulle kunna mera enkelt, kanske till en del genom observationer, bestämmas. — Nu kan man, enligt hvad i början af denna n:o nämndes, tillägga α och β följande betydelse: β är x-komponent och — α är y-komponent af den lineära hastighet, hvarmed z-axelns nordliga skärningspunkt med jordytan förflyttar sig på denna. Då är naturligtvis jordens radie utåt z-axeln tagen till längdenhet. ξ och η äro att betrakta såsom koordinator för polen, så länge ej hänsyn tages till tilläggstermerna $\frac{p'}{\nu}$, $\frac{q'}{\nu}$ i eqvv. (28).[1]) Men då jorden förhåller sig lika till alla radier i xy-planet (antaget att $A = B$), så skola λ', λ'', μ', μ'' ej förändras vid en godtycklig vridning af x-, y-axlarne tillsammans, d. v. s. vridning af vinkeln xOy som ett helt. Åter vid en vridning af detta liniepar x, y specielt 90° i riktning från positivt x till positivt y ändras värdena för ξ, η, α, β, α', β' till resp. värdena för η, $-\xi$, β, $-\alpha$, β', $-\alpha'$ och i följe häraf måste identiskt

---

[1]) Polens koordinator äro egentligen $\frac{p}{\nu}$, $\frac{q}{\nu}$, men, emedan p och q äro mycket små samt A, B, C mycket litet differera från hvarandra, så äro nämnda qvoter nära på lika med $\frac{Ap}{C\nu}$, $\frac{Bq}{C\nu}$ och d. v. s. ξ, η.

$$\lambda'\eta - \lambda''\xi = \mu'\xi + \mu''\eta ,$$
$$\mu'\eta - \mu''\xi = -\lambda'\xi - \lambda''\eta ,$$

alltså:

$$\mu' = -\lambda'' , \quad \mu'' = \lambda' .$$

Med de så erhållna värdena för α och β:

$$\alpha = \lambda'\xi + \lambda''\eta + \alpha' ,$$
$$\beta = \lambda'\eta - \lambda''\xi + \beta'$$

antaga de ifrågastående eqvationerna formen:

$$(27') \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} + (\mu + \lambda')\eta - \lambda''\xi + \beta' = 0 , \\ \frac{d\eta}{dt} - (\mu + \lambda')\xi - \lambda''\eta - \alpha' = 0 . \end{cases}$$

Under antagande af att α', β', λ', λ'', μ variera ytterst långsamt — och de följande konseqvenserna af detta antagande tala för dess rimlighet, — betrakta vi dem tills vidare såsom konstanta och erhålla då följande lösning af (27'):

$$(29) \quad \begin{cases} \xi = ae^{\int\lambda'' dt} \cos((\mu + \lambda')t + \bar{\omega}) + \xi_0 , \\ \eta = ae^{\int\lambda'' dt} \sin((\mu + \lambda')t + \bar{\omega}) + \eta_0 , \end{cases}$$

hvarest

$$(29') \quad \begin{cases} \xi_0 = \frac{-(\mu + \lambda')\alpha' + \lambda''\beta'}{(\mu + \lambda')^2 + \lambda''^2} , \\ \eta_0 = \frac{-(\mu + \lambda')\beta' - \lambda''\alpha'}{(\mu + \lambda')^2 + \lambda''^2} \end{cases}$$

samt a, $\bar{\omega}$ äro integrationskonstanter.

85. De fullständiga uttrycken för polens koordinator $(\bar{x}, \bar{y})$ blifva således enligt hvad som nämndes i n:o 82 och enligt eqvv. (28), (29):

$$(30) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{p'}{\nu} + \xi = ae^{\int\lambda'' dt} \cos((\mu + \lambda')t + \bar{\omega}) + \xi_0 + 0'',4 \cos\psi + \ldots \\ \bar{y} = \frac{q'}{\nu} + \eta = ae^{\int\lambda'' dt} \sin((\mu + \lambda')t + \bar{\omega}) + \eta_0 + 0'',4 \sin\psi + \ldots \end{cases}$$

Det här ingående λ' bestämma vi af eqvationen:

$$\frac{2\pi}{\mu + \lambda'} = 431 \text{ dagar,}$$

jemförd med denna:

$$\frac{2\pi}{\mu} = 305 \text{ dagar.}$$

Ty enligt eqvv. (30) skall

$$\frac{2\pi}{\mu + \lambda'}$$

vara polens omloppstid omkring dess medelläge och tills vidare räkna vi, efter CHANDLERS undersökningar, denna tid till 431 dagar. Vi få således λ' negativt:

$$\lambda' = -0{,}006.$$

I »Verhandlungen der vom 5. bis 12. Sept. 1894 in Innsbruck abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung» finner man å sid. 40 bifogad till ett föredrag af prof. HELMERT en grafisk framställning af polens rörelse, efter en af dr. MARCUSE verkställd analys af under åren 1891—94 utförda polhöjdsbestämningar. Se ock tafla 3 sammastädes. Och i »Verhandlungen der elften allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung abgehalten vom 30. Sept. bis 12. Oct. 1895 in Berlin» finner man å tafl. 3 polens bana för ytterligare ett år upptecknad af prof. ALBRECHT. Af dessa figurer synes tydligt, förefaller det mig, att medelpunkten för cirkeln (30) ej kan vara stadd i någon mera märkbar, proportionelt mot tiden växande, förflyttning utåt jordytan, hvilket, då figurpolen (z) utgör origo för ξ, η, $\bar{x}$, $\bar{y}$, och ξ_0, η_0 äro konstanta, vill säga, att ej heller figurpolen kan ha någon dylik förflyttning. Således, då β och $-\alpha$ äro komponenter af denna senare punkts hastighet samt enligt de förra formlerna:

$$\alpha = \lambda'(\xi - \xi_0) + \lambda''(\eta - \eta_0) - \mu\xi_0,$$
$$\beta = -\lambda''(\xi - \xi_0) + \lambda'(\eta - \eta_0) - \mu\eta_0,$$

alltså enligt (29):

$$(31)\begin{cases}\alpha = ae^{\int\lambda''dt}(\lambda'\cos((\mu+\lambda')t+\bar{\omega})+\lambda''\sin((\mu+\lambda')t+\bar{\omega})) - \mu\xi_0,\\ \beta = ae^{\int\lambda''dt}(\lambda'\sin((\mu+\lambda')t+\bar{\omega})-\lambda''\cos((\mu+\lambda')t+\bar{\omega})) - \mu\eta_0,\end{cases}$$

sluta vi, att i en första approximation man må sätta

$$(32)\qquad \xi_0 = \eta_0 = 0$$

(samt således enligt (29') äfven taga $\alpha' = \beta' = 0$).

Vi skrifva då eqvationerna för polen under denna form:

$$\bar{x} - 0'',4\cos\psi = ae^{\int\lambda''dt}\cos((\mu+\lambda')t+\bar{\omega}),$$
$$\bar{y} - 0'',4\sin\psi = ae^{\int\lambda''dt}\sin((\mu+\lambda')t+\bar{\omega}),$$

eller, om vi vilja studera polens rörelse i afseende på ett mera stillastående axelsystem, — såsom t. ex. det system, som x, y, z-axlarne skulle bilda, i fall $\alpha = \beta = \gamma = 0$, — och om vi då låta x, y vara koordinator för polen i detta nya axelsystem, så skulle vi, då det nyas afvikelse från det förra dock städse förblir ganska obetydlig, kunna skrifva:

$$(33)\begin{cases}x - 0'',4\cos\psi = ae^{\int\lambda''dt}\cos((\mu+\lambda')t+\bar{\omega}) + \int\beta dt,\\ y - 0'',4\sin\psi = ae^{\int\lambda''dt}\sin((\mu+\lambda')t+\bar{\omega}) - \int\alpha dt.\end{cases}$$

Ville vi här försöksvis sätta λ'' konstant, så skulle vi, på grund af (31) och (32) erhålla af föregående eqvationer:

$$x - 0'',4\cos\psi = \frac{\mu}{\mu+\lambda'}ae^{\lambda''t}\cos((\mu+\lambda')t+\bar{\omega})\cos\nu,$$

$$y - 0'',4\sin\psi = \frac{\mu}{\mu+\lambda'}ae^{\lambda''t}\sin((\mu+\lambda')t+\bar{\omega})\cos\nu,$$

hvarest

$$\operatorname{tang}\nu = \frac{\lambda''}{\mu+\lambda'}.$$

Efter nyss gjorda bestämning af λ' skulle

$$\frac{\mu}{\mu+\lambda'} = 1,41$$

Om jag dessutom antar

$$\frac{\lambda''}{\mu + \lambda'} = -0{,}04\,,$$

så blir $\nu = -2°\,16'$, och för att något så när satisfiera de ofvan nämnda figurerna skulle 1890, 0 vara nollpunkt för t och

$$a = 0'',19\,.$$

Men afvikelserna mellan de erhållna formlerna och verkligheten äro dock allt för stora för att vid hypothesen: λ'' konstant, skall kunna vidhållas. Utan att vilja eller kunna försöka någon annan hypotes, skall jag blott till slut anmärka, att, enligt den föregående uppfattningen, bör den astronomiska polens rörelse lida inverkan af alla extra ordinära thermiska (och magnetiska) störningar af den magnetiska polen, emedan af denna bestämmes medelpunkten för kretsrörelsen (33) hos den förra polen och störningen af denna medelpunkt står i ett direkt förhållande till den hastighet, hvarmed G i n:o 83 ändras, enligt n:o 70.

Den här betraktade förflyttningen af polen utåt jordytan är förenad med en daglig rörelse i rymden af figuraxeln (z) och äfven med en likadan rörelse af jordens momentana vridningsaxel, men maximivärdet för vinkeln mellan de två mest afvikande lägen af denna senare blefve (efter $t = 0$, det vore efter år 1890, 0) högst

$$2\,\frac{C - A}{A}\,0'',6 = 0'',004\,,$$

hvilket är en så liten vinkel, att därför den astronomiska polens läge i rymden kan anses blifva orubbadt af sådana förändringar i jorden som de ofvan antagna.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 114.)

Kristiania. *Universitets-biblioteket.*
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 34: H. 3—4; 35: 1—3. 1893—95. 8:o.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd 18: H. 1—4; 19: 1. 1896. 8:o.
Jahrbuch des norwegischen meteorologischen Instituts. 1893—95. 4:o.
Fauna Norvegiæ. Bd 1. Chra 1896. 4:o.
NORMAN, J. M., Norges arktiske Flora. 1: 1; 2: 1. 1894—95. 8:o.
BARTH, J., Norrönaskaller. 1896. 8:o.

Lawrence. *Kansas university.*
The Kansas university quarterly. Vol. 5: N:o 2. 1896. 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Cl. Bd 18: N:o 1. 1897. 8:o.
Berichte. Mathem.-phys. Cl. 1896: 4. 8:o.

Liège. *Société Royale des sciences.*
Mémoires. (2) T. 19. 1897. 8:o.

London. *British association for the advancement of science.*
Report. Meeting 66 (1896). 8:o.
Toronto meeting 1897. Preliminary programme. 1896. 8:o.

— *Geological society.*
The Quarterly journal. Vol. 53 (1897): P. 1. 8:o.
General index to Vol. 1—50. P. 1. 1897. 8:o.
Geological literature added to the library 1896. 8:o.

— *R. Microscopical society.*
Journal. 1897: P. 1. 8:o.

— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 60 (1896/97): N:o 366. 8:o.

Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 41 (1896/97): P. 11. 8:o.

Melbourne. *Royal society of Victoria.*
Proceedings. N. S. Vol. 8 (1895). 8:o.

Mexico. *Observatorio astronómico nacional.*
Anuario. Año 17 (1897). 12:o.

— *Observatorio meteorologico central.*
Boletin de agricultura, mineria é industrias. Año 5 (1895/96): N:o 3—12; 6 (1896/97): 1—3. 8:o.

Minneapolis. *Minnesota academy of natural sciences.*
Bulletin. Vol. 4: N:o 1: P. 1. 1896. 8:o.

Mont Blanc. *Observatoire météorologique.*
Annales. T. 2. Paris 1896. 4:o.

Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 11 (1897): Fasc. 1—2. 8:o.

(Forts. å sid. 148.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

245. Zur Chemie des Thoriums.

Von GERHARD KRÜSS und WILH. PALMÆR.

[Mitgetheilt den 10. März 1897 durch P. T. CLEVE.]

In dem wissenschaftlichen Nachlasse des vor zwei Jahren verschiedenen Forschers, Prof. GERHARD KRÜSS, fand sein Bruder, Hr Dr. HUGO KRÜSS in Hamburg, einige die Chemie des Thoriums betreffende Manuskriptfragmente von des Verstorbenen Hand, nebst dazu hörende Arbeitsnotizen, analytische Daten u. s. w. von der Hand seiner Assistenten, Dr. E. THIELE und K. BAUMGÄRTEL. Diese Nachlassenschaft wurde von Dr. KRÜSS an Hrn Prof. L. F. NILSON, wie bekannt einmal Mitarbeiter des Verewigten eben auf demselben Gebiete der Chemie, vor einem Jahre überlassen; sie enthielt zwar schöne und werthvolle Beobachtungen über das Hydrat, das Chlorid und das Oxychlorid des Thoriums, aber wegen verschiedene Mangelhaftigkeiten der befindlichen experimentellen Belege war diese Arbeit, die den Verewigten während der allerletzten Zeit seines Lebens offenbar beschäftigte, leider noch nicht zur Veröffentlichung reif. Nach dem Wunsche des Hrn Prof. NILSON übernahm ich (PALMÆR) den Auftrag die noch vorhandenen Lücken auszufüllen zu suchen und die Untersuchung dann zu publizieren. Sie betrifft, wie schon gesagt, die Darstellung des Hydrats, des Chlorids und Oxychlorids des Thoriums.

Thoriumhydrat. KRÜSS hat eine Methode ersonnen, das Hydrat durch Einwirkung von Ammon auf festes Thoriumsulfat zu gewinnen, wobei man das Hydrat als schweres, leicht aus-

zuwaschendes Pulver erhält. Die Methode wird übrigens seit einiger Zeit im hiesigen Laboratorium angewandt. Ich habe die Bedingungen festgestellt, unter denen man bei schnellem Arbeiten zu einem ganz schwefelsäurefreien Hydrate gelangt.

Bei der Einwirkung, die am besten durch Erwärmung beschleunigt wird, muss für ein gutes Rühren gesorgt werden, denn sonst bleibt das schwere Sulfat am Boden des Gefässes liegen, und die Umsetzung bleibt unvollständig, bezw. braucht sehr lange Zeit. Verwendet man beim Waschen nur reines, heisses Wasser, so gelangt man zwar zuletzt zu einem schwefelsäurefreien Filtrate, aber das rückständige Hydrat hält noch Schwefelsäure zurück. Es beruht dies wahrscheinlich auf die Bildung basischer Salze. Der Übelstand wird vollkommen beseitigt, wenn man den Niederschlag mit verdünntem Ammon aufkocht, dekantiert und wäscht; so gelangt man schnell zu einem Hydrate, in dem keine Schwefelsäure nachgewiesen werden kann. Auch bei dem folgenden Versuche konnte keine Schwefelsäure entdeckt werden. Ich legte das ausgewaschene, trockene Hydrat in ein Platinschiffchen, schob dieses in ein Verbrennungsrohr und erhitzte möglichst stark im Lufstrom, wobei die Dämpfe durch das ausgezogene Ende des Glasrohres in Wasser geleitet wurden. Auch nach Spülen des Rohres konnte keine Schwefelsäure gefunden werden. Ich hebe diesen Versuch besonders hervor, weil nach mündlicher Mittheilung des Herrn Prof. CLEVE der Nachweis kleiner Mengen Schwefelsäure in konzentrierten Thoriumlösungen wegen der Löslichkeit des Bariumsulfates in denselben misslich ist.

Ich habe diese Methode zur Darstellung des Hydrates mit gleich gutem Erfolge am wasserfreien wie am mit 9 Mol. Wasser krystallisierten Sulfate geprüft. Das Hydrat zieht aus der Luft energisch Kohlensäure an, warum auf eine Analyse desselben verzichtet wurde. KRÜSS hegte den Plan, diese Methode auch an den Sulfaten der übrigen seltenen Erden zu erproben.

Thoriumchlorid, $ThCl_4 + 7H_2O$. Ich gebe hier einen Theil des Manuskriptes von KRÜSS wieder: »Wasserfreies Thoriumchlorid

ist bisher durch Ueberleiten von Chlor oder von Salzsäure über metallisches Thorium, oder ein inniges Gemenge von Thorerde und Kohle erhalten worden, indess hat sich der Verfasser bei einer gemeinschaftlich mit Herrn L. F. NILSON über das Thorium ausgeführten Untersuchung[1]) wie auch durch spätere Wiederholung dieser Versuche davon überzeugt, dass es mit gewöhnlichen Laboraroriumsmitteln sehr mühsam ist, irgend eine grössere Menge von $ThCl_4$. in reinem Zustande zu gewinnen. Man muss dasselbe von den angewandten Materialien durch Sublimation in Sauerstofffreier Atmosphäre trennen; das $ThCl_4$ schmilzt jedoch erst bei beginnender Weissgluth, sublimiert dann allerdings bei weiterem Erhitzen in schönen weissen Nadeln.

Ferner wurde ein wasserhaltiges Chlorid von BERZELIUS, CHYDENIUS und von CLEVE durch Konzentrieren salzsaurer Thoriumchloridlösung bis zur Syrupkonsistenz und Krystallisieren des Rückstandes erhalten; nach CLEVE[2]) scheiden sich hierbei Nadeln in kugelförmigen Aggregaten von Thoriumchlorid mit 11 oder 12 Mol. Wasser ab. Das Salz ist sehr zerfliesslich an der Luft und kann deshalb nur schwer vom anhängenden Syrup getrennt werden.

Dieses Thoriumchlorid ist nun, ebenso wie die Chloride einer Anzahl anderer seltener Erden, in Alkohol löslich, und ich möchte zur Darstellung der wasserhaltigen, seltenen Erdchloride empfehlen, dieselben aus Alkohol zu krystallisieren, was unter ganz bestimmten Bedingungen auch in grossen Mengen ganz bequem möglich ist, und beim Thorium, wie folgt, durchgeführt wurde. Als Ausgangsmaterial diente mit Ammoniak gefälltes und vollständig mit kochendem Wasser ausgewaschenes Thoriumhydroxyd, das zuerst einige Male mit Spiritus, dann 2—3 Male mit absolutem Alkohol gewaschen wurde, um das meiste mechanisch anhaftende Wasser zu entfernen. Dieses Material wurde in eine VOLHARD'sche Vorlage gebracht, absoluter Alkohol darübergeschichtet und wasserfreies Salzsäuregas durchgeleitet; unter

[1]) Öfversigt etc. 1887, N:o 5, 258.
[2]) Bihang till K. Vet. Akad. Handl. (1874) 2, [N:o 6], 10.

lebhafter Absorption von Chlorwasserstoffsäure bildet sich eine konzentrierte Auflösung von Thoriumchlorid in alkoholischer Salzsäure. Dieselbe wurde im Vakuum über Natronkalk und über Schwefelsäure zur Krystallisation gestellt, und nach einiger Zeit schied sich Thoriumchlorid zum Theil in Krusten, zum Theil in prächtigen wasserklaren Krystallen ab; in dieser Weise kann dieses Chlorid sehr bequem auch in grösseren Mengen schön krystallisiert gewonnen werden. Dasselbe enthält Krystallwasser.»

Bei der Untersuchung dieses Salzes verfuhr ich folgendermassen. Ich wusch frisch gefälltes, von Schwefelsäure schon befreites Thorerdehydrat mit sorgfältig entwässertem Alkohol und dann mit frisch destilliertem Äther, liess es an der Luft kurze Zeit trocknen, so dass ich ein von Feuchtigkeit völlig freies Präparat gewann. Ich schlemmte z. B. 5 g Hydrat in 6 cm^3 absolutem Alkohol auf und leitete Chlorwasserstoff ein, der aus Salmiak und konz. Schwefelsäure bereitet wurde. In kurzer Zeit ging alles Hydrat unter starker Erwärmung in Lösung. Bei gelindem Abkühlen fingen schon Kryställchen an sich abzuscheiden, woher noch 1,5 cm^3 Alkohol zugesetzt und die Lösung in den Vakuumexsiccator über Natron und Schwefelsäure gesetzt wurde. Nach kurzer Zeit begann die Krystallisation des unten zu beschreibenden Salzes mit $7H_2O$. Vier Moleküle Wasser stammen aus der Neutralisation des Hydrates, ThO_4H_4, durch Chlorwasserstoff; die drei übrigen Moleküle mögen durch Einwirkung des Chlorwasserstoffs auf Alkohol entstanden sein, da die Temperaturerhöhung beträchtlich ist. Man konnte vermuthen, dass das Salz Krystallalkohol enthielte; indess erwiesen sowohl eine qualitative Probe mit Jod und Kali wie die unten angeführte Elementaranalyse, dass dies nicht der Fall ist. Setzt man absichtlich eine hinreichende Menge Wasser zum Alkohol, so scheiden sich auch Aggregate feiner Nädelchen aus, die wahrscheinlich das von CLEVE aus Wasserlösung gewonnene Salz mit 11 oder 12 Mol. Wasser darstellen.

Zwecks der Analyse wurde die dickflüssige Mutterlauge von den Krystallen abgegossen, letztere ein paarmal mit wasserfreiem

Alkohol abgewaschen, sehr rasch zwischen Fliesspapier abgepresst und dann in ein mit eingeschliffenem Glaspfropfen versehenes Wägegläschen gebracht.

I. 0,7716 g wurden mit verdünnter Schwefelsäure übergossen; nach vorsichtigem Abrauchen der Säure wurde zuletzt über dem Gebläse erhitzt, wonach 0,4069 g Thorerde (über P_2O_5 erkaltet) zurückblieben.

II. 0,4714 g wurden mit Silbernitrat gefällt und ergaben 0,5379 g Chlorsilber.

III. 0,6750 g gaben 0,7674 g Chlorsilber; aus dem Filtrate wurde zuerst das Silber abgeschieden und dann Thorerdehydrat durch Ammon gefällt. Dasselbe lieferte 0,3589 g Thorerde. Bei der Fällung des Hydrates erhitzte ich mit überschüssigem Ammon längere Zeit auf 100°. Das so abgeschiedene Hydrat lässt sich ziemlich schnell filtrieren, kann aber mit reinem Wasser kaum ausgewaschen werden; beginnt man aber das Waschen mit heissem, verdünnten Ammon, so wird ziemlich schnell alles Chlor entfernt.

IV. Eine gewöhnliche Elementaranalyse wurde im offenen Rohre gemacht. 0,6590 g Salz ergaben 0,1737 g Wasser und keine Kohlensäure. Alkohol war somit nicht vorhanden. Der Wassergehalt fiel etwas zu hoch aus, weil trotz einer langen Schicht von Bleichromat ein wenig Chlorwasserstoff unzersetzt passierte.

	Berechnet:		Gefunden.			
			I.	II	III.	IV.
Th	233,8	46,60	46,38	—	46,76	—
Cl_4	141,81	28,27	—	28,21	28,11	—
$7H_2O$	126,11	25,14	—	—	—	26,36.

Das Salz zerfliesst an der Luft und verwittert im Exsiccator. Die Gewichtsabnahme im Exsiccator schreitet nur sehr langsam fort, und Gewichtskonstanz wird kaum erreicht; ausser Wasser wird Chlorwasserstoff abgegeben, wie eine Analyse des Verwitterungsproduktes ergab. Auf diesem Weg zum wasserfreiem Chloride zu gelangen scheint von der Chlorwasserstoffabgabe

ganz abgesehen, praktisch unausführbar — es wäre dasselbe, als ob man wasserfreies Chlorcalcium in solcher Weise zu gewinnen versuchte. Auch nicht durch Erhitzen des wasserhaltigen Chlorides im Chlorwasserstoff oder Chlorgas gelangt man zum wasserfreien Chloride, wie einige von KRÜSS gemachten Versuche erweisen. Man erhält so ein unreines Oxychlorid, wovon weiter unten die Rede sein wird. In geschlossenem Gefässe ohne Trockenmittel behalten die Krystalle beliebig lange ihren Glanz. Beim Erhitzen werden Wasser und Chlorwasserstoff abgegeben, und Thorerde bleibt als eine aufgeblähte Masse zurück.

In Wasser ist das Salz ungemein leicht mit saurer Reaktion löslich, und auch von kaltem Alkohol bedarf es nur etwa des gleichen Gewichtes zur Lösung. Durch Äther wird in der alkoholischen Lösung ein krystallinischer Niederschlag erzeugt, der aus unverändertem Salze zu bestehen scheint. Die Fällung ist auch bei Zusatz von 20 Vol. Äther bei 0° zu einer halbgesättigten, alkoholischen Lösung keine vollständige. Krystallisiert man das Salz aus wasserhaltigem Alkohol um, so erscheinen Nädelchen von CLEVES Salze (siehe oben).

Das Salz ist rhombisch mit ziemlich spitzer Pyramide. Gewöhnliche Formen sind Pyramide mit Basis sowie Krystalle, die nach dem Makropinakoide tafelförmig ausgebildet sind und auf denen noch Pyramide, Prisma und auch Brachypinakoide auftreten. Spaltbar nach dem Makropinakoide. Auf eine Messung wurde wegen der Zerfliesslichkeit des Salzes verzichtet.

Thoriumoxychlorid. Die nahe Verwandschaft zwischen Zirkonium und Thorium beachtend, hat KRÜSS zahlreiche Versuche gemacht, ein Thoriumoxychlorid zu erhalten. Zu diesem Zwecke erhitzte er das in obiger Weise dargestellte, wasserhaltige Thoriumchlorid in Chlorwasserstoffstrom (auch einmal in Chlorstrom) bei verschiedenen Temperaturen, die zwischen 150° und heller Rothgluth variierten. Das Salz sollte in einem Schiffchen erhitzt werden, bis das Gewicht konstant bliebe, was indess in der Regel nicht erreicht wurde. Auch zeigte der Rückstand kein besonders charakteristiches Aussehen — es resultierte eine

schwammige Masse, die sich nicht klar in Wasser löste. Versuche, Thorerdehydrat in Chlorwasserstoff zu erhitzen, gaben kein besseres Resultat. Die zahlreichen Analysen der Rückstände ergaben, dass 1,8 bis 2,2 Chloratome auf ein Atom Thorium kamen — nur zufällig wurden Zahlen gefunden, die der Formel $Th\,O\,Cl_2$ entsprachen. Wie oben erwähnt, giebt das wasserhaltige Chlorid beim Erhitzen Chlorwasserstoff ab; eine der folgenden Reaktionen dürfte sich somit abspielen:

$$Th\,Cl_4,\ 7H_2O = Th\,O\,Cl_2 + 2HCl + 6H_2O;$$
$$Th\,Cl_4,\ 7H_2O = Th\,O_2 + 2HCl + 5H_2O.$$

Aus den Versuchen kann mit Sicherheit weiter nichts gefolgert werden, als dass bei steigender Temperatur immer mehr Thorerde entsteht; das bei heller Rothgluth gewonnene Product erwies sich als fast reine Thorerde. Da es nicht möglich scheint, auf diesem Wege zu einem einheitlichen Produkte zu gelangen, so habe ich die Versuche nicht fortgesetzt.

Die Existenz basischer Thoriumsalze ist übrigens nicht zweifelhaft. KRÜSS erwähnt im Manuskripte, dass man beim eindampfen einer salzsauren Thoriumchloridlösung auf dem Wasserbade ein zähes Gummi gewinnt, das nicht mehr 4 Atome Chlor auf 1 Atom Thorium enthält. Dr. LANGLET hat, nach freundlicher Privatmittheilung, im hiesigen Laboratorium gefunden, dass man sowohl durch Auflösen von Thorerdehydrat in säurefreier Thoriumnitratlösung wie durch Erhitzen von 1 Mol. Thorerdehydrat mit etwa 2 Mol. $H\,NO_3$ ein krystallisiertes, basisches Nitrat erhalten kann, das aller Wahrscheinlichkeit nach auf 1 Atom Thorium 2 Gruppen NO_3 enthält; bisher wurde dasselbe nicht analysiert.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 140.)

Paris. *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 24 (1896): N:o 8. 8:o.
Philadelphia. *American philosophical society.*
Transactions. N. S. Vol. 19: P. 1. 1896. 4:o.
Proceedings. Vol. 35 (1896): N:o 152. 8:o.
San José. *Museo nacional.*
ALFARO, A., Mamíferos de Costa Rica. 1897. 8:o.
S:t. Petersburg. *Académie Impériale des sciences.*
Bulletin. (5) T. 6 (1897): N:o 1. 4:o.
Mémoires. (8) T. 3: N:o 7—10; 4: 2—4; 5: 1. 1896. 4:o.
— *Musée zoologique de l'Académie Imp. des sciences.*
Annuaire. 1896: N:o 4. 8:o.
— *Observatoire central Nicolas.*
Publications. (2) Vol. 2. 1896. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Zur Entwickelung der Störungsfunction.

Von K. G. OLSSON.

(Mitgetheilt den 10. März 1897 durch D. G. LINDHAGEN.)

Da die Excentricitäten und Neigungen der grossen Planeten und diejenigen der Asteroiden in den meisten Fällen von verschiedener Grössenordnung sind, so ist es auch nöthig, in Störungsrechnungen für letztere diese zwei Classen von Bahnelementen in verschiedener Weise zu behandeln. Obwohl also einerseits die Ausdrücke: »vom zweiten Grade der Excentricitäten» u. s. w. hier mehr eine formelle als eine den wirklichen Verhältnissen entsprechende Bedeutung haben, so kann man andererseits selbst bei ziemlich grossen Excentricitäten und Neigungen, in gewissen Aufgaben mit Vortheil, Entwickelungen nach den Potenzen dieser Grössen anwenden, wenn man nur solche Formeln besitzt, welche eine leichte Erstreckung der Rechnung zu höheren Potenzen genannter Grössen erlauben. Was die Neigung betrifft, sind solche Entwickelungen vorher gegeben.[1]) Mit der im folgenden auseinandergesetzten Methode wird beabsichtigt, auch in Bezug auf die Excentricität ein ähnliches Resultat zu gewinnen. Ausserdem werden für gewisse Coefficienten in der Abhandlung: »Entwickelung der Störungsfunction für Planetenbahnen grosser Excentricität»,[2]) welche mittelst Reihen nach den Potenzen vom Verhältnisse der grossen Halbaxen (α) ausgedrückt wurden, hier andere Formeln gegeben, in denen solche Reihen nicht vorkommen.

[1]) Siehe meine Abhandlung: »Eine Methode, die Störungen der Planeten in Bahnen beliebiger Excentricität und Neigung gruppenweise zu berechnen» I, § 2, Bihang till K. Sv. Vet. Ak. Handl. Bd 22, Afd. I, N:o 8.

[2]) Bih. t. K. Sv. Vet. Ak. Handl. Bd 22, Afd. I, N:o 5.

Nach den Formeln (18) und (19) der eben citirten Abhandlung hat man für den gegenseitigen Abstand der beiden Planeten den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\,\varphi\left(0\cdot 0\cdot\frac{r}{a}\right)+\varphi\left(0\cdot 1\cdot\frac{r}{a}\right)\cos f'+\varphi\left(0\cdot 2\cdot\frac{r}{a}\right)\cos 2f'+\dots\\ +2\sum_{n=1}\left\{\tfrac{1}{2}\,\varphi\left(n\cdot 0\cdot\frac{r}{a}\right)+\varphi\left(n\cdot 1\cdot\frac{r}{a}\right)\cos f'+\right.\\ \left.+\varphi\left(n\cdot 2\cdot\frac{r}{a}\right)\cos 2f'+\dots\right\}\cos nH\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo:

$$\varphi\left(n\cdot i\cdot\frac{r}{a}\right)=\sum_{k=0} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\,\alpha^{n+2k+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+2k} F\left(n+k\cdot 2k+1\cdot\frac{r}{a}\right). \quad (2)$$

Die Coefficienten $A_{n\,.\,2k\,.\,i}$ enthalten nur die Excentricität des störenden Planeten [Formeln (20) derselben Abhandlung] und ferner ist:

$$F\left(n\cdot s\cdot\frac{r}{a}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\left[1-\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{s}{2}}}. \quad (3)$$

Die Bedeutung der hier eingehenden Grössen ist dieselbe wie in jener Abhandlung.

Setzt man nun:

$$F\left(n\cdot s\cdot\frac{r}{a}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\left[1-\alpha^2\sin^2\varphi+\alpha^2\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\sin^2\varphi\right]^{\frac{s}{2}}} \quad (4)$$

so findet man:

$$\left.\begin{aligned}F\left(n\cdot s\cdot\frac{r}{a}\right)=\\ =\beta_n^{(s)}-\frac{s}{2}\,\beta_{n+1}^{(s+2)}\alpha^2\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]+\frac{s(s+2)}{2\cdot 4}\,\beta_{n+2}^{(s+4)}\alpha^4\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2\mp\dots\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wo:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}. \tag{6}$$

Nun ist:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^j = \sum_{p=0}^{p=j}(-1)^p\,(j)_p\left(\frac{r}{a}\right)^{m+2p} \tag{7}$$

wenn man für die Coefficienten der Binomialreihe:

$$(1+x)^j = 1 + \frac{j}{1}x + \frac{j(j-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots \tag{8}$$

die Bezeichnungen einführt:

$$(j)_1 = \frac{j}{1};\quad (j)_2 = \frac{j(j-1)}{1\cdot 2};\quad (j)_3 = \frac{j(j-1)(j-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ u. s. w.} \tag{9}$$

und ferner:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{m+2p} = \tfrac{1}{2}R_0^{(m+2p)} + \sum_{q=1} R_q^{(m+2p)}\cos q\varepsilon \tag{10}$$

wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} R_q^{(n)} &= (-1)^q\,2e^q\,\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{2\cdot 4\ldots 2q}\Bigg\{1+ \\ &+\frac{(n-q)(n-q-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2q+2}e^2+ \\ &+\frac{(n-q)\ldots(n-q-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3}{(2q+2)(2q+4)}e^4+\ldots\Bigg\}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Folglich ist auch:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{r}{a}\right)^m\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^j = \\ &=\tfrac{1}{2}\sum_{p=0}^{p=j}(-1)^p(j)_p R_0^{(m+2p)} + \sum_{p=0}^{p=j}\sum_{q=1}(-1)^p(j)_p R_q^{(m+2p)}\cos q\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

oder:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^j = \tfrac{1}{2} S_{m.j.0} + \sum_{q=1} S_{m.j.q} \cos q\varepsilon \tag{13}$$

wenn man schreibt:

$$S_{m.j.q} = \sum_{p=p_0}^{p=j} (-1)^p (j)_p R_q^{(m+2p)}. \tag{14}$$

Die untere Grenze p_0 wird aus den Bedingungen gefunden:

$$p_0 = 0 \text{ für } m < 0$$

$$\left.\begin{array}{r} p_0 \geqq 0 \\ m + 2p_0 \geqq q \end{array}\right\} \text{ , } m \geqq 0.$$

Führt man nun die Bezeichnung ein:

$$\gamma_{n+j}^{(s+2j)} = (-1)^j \frac{s(s+2)(s+4)\ldots(s+2j-2)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2j} \alpha^{2j} \beta_{n+j}^{(s+2j)} \tag{15}$$

so bekommt man den Ausdruck:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m F\left(n\cdot s\cdot \frac{r}{a}\right) = \sum_{j=0} \gamma_{n+j}^{(s+2j)} \left(\frac{r}{a}\right)^m \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^j. \tag{16}$$

Mit Anwendung von (13) geht diese Formel in die folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{r}{a}\right)^m F\left(n\cdot s\cdot \frac{r}{a}\right) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{2} S_{m.j.0}\, \gamma_{n+j}^{(s+2j)} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=1} S_{m.j.q}\, \gamma_{n+j}^{(s+2j)} \cos q\varepsilon \end{array}\right\} \tag{17}$$

oder:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m F\left(n\cdot s\cdot \frac{r}{a}\right) = \tfrac{1}{2} T_{m.n.s.0} + \sum_{q=1} T_{m.n.s.q} \cos q\varepsilon \tag{18}$$

wenn man setzt:

$$T_{m.n.s.q} = \sum_{j=j_0}^{\infty} S_{m.j.q}\, \gamma_{n+j}^{(s+2j)}. \tag{19}$$

Die untere Grenze j_0 wird aus den Bedingungen bestimmt:

$$j_0 = 0 \text{ für } m < 0$$
$$j_0 = 0 \text{ für } m \geqq 0 \text{ und } m \geqq q$$
$$m + 2j_0 \geqq q \text{ für } m \geqq 0 \text{ und } m < q\,.$$

Nach (2) und (18) ergiebt sich nun:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{a}{r}\right)^m \varphi\left(n \cdot i \cdot \frac{r}{a}\right) = \\ &= \sum_{k=0} \tfrac{1}{2} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, T_{n-m+2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,0} \\ &+ \sum_{k=0} \sum_{q=1} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, T_{n-m+2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,q} \cos q\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Setzt man nun [vergl. die Formel (55) in der Abh.: »Entwickelung u. s. w.»]:

$$R_q^{(m+2p)} = \sum_{r=0} N_{m+2p\,.\,2r\,.\,q}\, e^{q+2r} \quad (21)$$

so sind:

$$\left.\begin{aligned} &N_{m+2p\,.\,2r\,.\,q} = \\ &= (-1)^q\, 2\, \frac{(m+2p)(m+2p-1)\ldots(m+2p-q-2r+1)}{2 \cdot 4 \ldots (2q+2r) \cdot 2 \cdot 4 \ldots 2r} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

wo r eine ganze Zahl bedeutet. Man bekommt somit:

$$S_{m\,.\,j\,.\,q} = \sum_{p=p_0}^{p=j} \sum_{r=0} (-1)^p\, (j)_p\, N_{m+2p\,.\,2r\,.\,q}\, e^{q+2r} \quad (23)$$

oder:

$$S_{m\,.\,j\,.\,q} = \sum_{r=0} M_{m\,.\,j\,.\,2r\,.\,q}\, e^{q+2r} \quad (24)$$

wenn man setzt:

$$M_{m\,.\,j\,.\,2r\,.\,q} = \sum_{p=p_1}^{p=j} (-1)^p\, (j)_p\, N_{m+2p\,.\,2r\,.\,q} \quad (25)\,,$$

Die untere Grenze p_1 wird aus den Bedingungen gefunden: für $m < 0$ ist $p_1 = 0$; für $m \geqq 0$ gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} m + 2p_1 - q - 2r + 1 = 1 \\ \text{oder} \\ m + 2p_1 - q - 2r = 0 \end{array}\right\} \text{für } m - q \text{ gerade}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} m + 2p_1 - q - 2r + 1 = 2 \\ \text{oder} \\ m + 2p_1 - q - 2r = 1 \end{array}\right\} \text{für } m - q \text{ ungerade.}$$

Man bekommt also:

$$T_{m.n.s.q} = \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{r=0} \gamma_{n+j}^{(s+2j)} M_{m.j.2r.q}\, e^{q+2r} \tag{26}$$

oder:

$$T_{m.n.s.q} = \sum_{r=0} P_{m.n.s.2r.q}\, e^{q+2r} \tag{27}$$

wo

$$P_{m.n.s.2r.q} = \sum_{j=j_1} \gamma_{n+j}^{(s+2j)} M_{m.j.2r.q} \tag{28}$$

Für

$$m < 0 \text{ ist hier } j_1 = 0$$

und für

$$m \geqq 0 \text{ sind } \begin{cases} j_1 \geqq 0 \\ m + 2j_1 \geqq q + 2r. \end{cases}$$

Es ist zu bemerken, dass $M_{m.j.2r.q}$ reine Zahlencoefficienten sind, welche einmal für alle berechnet werden können.

Nach (20), (27) und (28) erhält man die Entwickelung der Function $\left(\frac{a}{r}\right)^m \varphi\left(n \cdot i \cdot \frac{r}{a}\right)$ in eine trigonometrische Reihe, deren Glieder Potenzenreihen nach e^2 sind [vergl. die Abhandlung: Eine Methode, die Störungen der Planeten in Bahnen beliebiger Excentricität und Neigung gruppenweise zu berechnen I §§ 5 und 6]. Für die Berechnung von Gruppenstörungen nach $(e - e_0)$ und $(\alpha - \alpha_0)$ muss man die Formel (20) nach e und α differentiiren. Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^{p+l}}{\partial e^p\,\partial\alpha^l}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^m \varphi\left(n\cdot i\cdot\frac{r}{a}\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}\sum_{r=0} 2r(2r-1)\ldots(2r-p+1)\, A_{n.2k.i}\, e^{2r-p}\,. \\
&\quad\cdot\frac{\partial^l}{\partial\alpha^l}\{\alpha^{n+2k+1} P_{n-m+2k.n+k.2k+1.2r.0}\} + \\
&\quad+\sum_{k=0}\sum_{r=0}\sum_{q=1}(q+2r)(q+2r-1)\ldots \\
&\quad(q+2r-p+1)\, A_{n.2k.i}\, e^{q+2r-p}\,. \\
&\quad\cdot\frac{\partial^l}{\partial\alpha^l}\{\alpha^{n+2k+1} P_{n-m+2k.n+k.2k+1.2r.q}\}\cos q\varepsilon
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Nach (28) ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^l}{\partial\alpha^l}\{\alpha^{n+2k+1} P_{n-m+2k.n+k.2k+1.2r.q}\} = \\
&= \sum_{j=j_1} M_{n-m+2k.j.2r.q}\,\frac{\partial^l}{\partial\alpha^l}\left\{\alpha^{n+2k+1}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Für die Berechnung der drei ersten Derivirten nach α hat man also nach (6) und (15) die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\alpha^{n+2k+1}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)}\right\} = \\
&= (n+2k+2j+1)\,\alpha^{n+2k}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)} - (2j+2)\,\alpha^{n+2k}\gamma_{n+k+j+1}^{(2k+2j+3)} \\
&\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left\{\alpha^{n+2k+1}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)}\right\} = \\
&= (n+2k+2j+1)(n+2k+2j)\,\alpha^{n+2k-1}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)} - \\
&-(2j+2)(2n+4k+4j+3)\,\alpha^{n+2k-1}\gamma_{n+k+j+1}^{(2k+2j+3)} + \\
&+(2j+2)(2j+4)\,\alpha^{n+2k-1}\gamma_{n+k+j+2}^{(2k+2j+5)} \\
&\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\left\{\alpha^{n+2k+1}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)}\right\} = \\
&= (n+2k+2j+1)(n+2k+2j)(n+2k+2j-1)\alpha^{n+2k-2}\gamma_{n+k+j}^{(2k+2j+1)} - \\
&-(2j+2)(n+2k+2j+1)(3n+6k+6j+3)\,\alpha^{n+2k-2}\gamma_{n+k+j+1}^{(2k+2j+3)} + \\
&+(2j+2)(2j+4)(3n+6k+6j+6)\,\alpha^{n+2k-2}\gamma_{n+k+j+2}^{(2k+2j+5)} - \\
&-(2j+2)(2j+4)(2j+6)\,\alpha^{n+2k-2}\gamma_{n+k+j+3}^{(2k+2j+7)}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Setzt man in (20) $m = n$, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{a}{r}\right)^n \varphi\left(n\cdot i\cdot \frac{r}{a}\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, T_{2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,0} + \\ &+ \sum_{k=0}\sum_{q=1} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, T_{2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,q} \cos q\varepsilon\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Vergleicht man diese Formel mit (27) in der citirten Abhandlung: »Entwickelung der Störungsfunction u. s. w.»:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n \varphi\left(n\cdot i\cdot \frac{r}{a}\right) = \tfrac{1}{2} D^{(n)}_{i\,.\,0} + D^{(n)}_{i\,.\,1} \cos\varepsilon + D^{(n)}_{i\,.\,2} \cos 2\varepsilon + \ldots \quad (33)$$

so erhält man:

$$D^{(n)}_{i\,.\,q} = \sum_{k=0} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, T_{2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,q} \quad (34)$$

und mit Anwendung von (27):

$$D^{(n)}_{i\,.\,q} = \sum_{k=0}\sum_{r=0} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, P_{2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,2r\,.\,q}\, e^{q+2r} \quad (35)$$

In Formel (56) der oben citirten Abhandlung wird gesetzt:

$$D^{(n)}_{i\,.\,q} = \sum_{r=0} D^{(n)}_{i\,.\,q\,.\,q+2r}\, e^{q+2r} \quad (36)$$

Durch Vergleichung von (35) und (36) findet man:

$$D^{(n)}_{i\,.\,q\,.\,q+2r} = \sum_{k=0} A_{n\,.\,2k\,.\,i}\, \alpha^{n+2k+1}\, P_{2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,2r\,.\,q} \quad (37)$$

Diese Formel entspricht den Formeln (57) in der erwähnten Abhandlung. Hier sind aber Entwickelungen nach den Potenzen von α vermieden.

Statt der Formel (59) jener Abhandlung hat man hier:

$$\frac{d^q D^{(n)}_{i\,.\,p\,.\,p+2m}}{d\alpha^q} = \sum_{k=0} A_{n\,.\,2k\,.\,i} \frac{d^q}{d\alpha^q}\left(\alpha^{n+2k+1} P_{2k\,.\,n+k\,.\,2k+1\,.\,2m\,.\,p}\right) \quad (38)$$

Man erhält die Entwickelungen der Functionen $\varphi_3\left(n\cdot i\cdot\frac{r}{a}\right)$, welche in der Entwickelung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ den Functionen $\varphi\left(n\cdot i\cdot\frac{r}{a}\right)$ entsprechen, durch die Multiplication letzterer Functionen mit Factoren, welche in Bezug auf $\frac{r}{a}$ rational sind, und deren Entwickelung in Uebereinstimmung mit dem vorigen leicht ausgeführt wird [vergl. die citirte Abh.: »Eine Methode u. s. w.» I, § 12].

Nach den Formeln (30) und (31) erhält man die drei ersten Derivirten rechts in (38), wenn man $n = m$ setzt.

Weil für $\alpha < 1$:

$$1 - \alpha^2 \sin^2\varphi \geqq 1 - \alpha^2$$

so ist:

$$\beta_n^{(s)} < \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi d\varphi$$

folglich auch:

$$\beta_n^{(s)} < \frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n} \leqq \frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}$$

In der Reihe (5) ist also jedes Glied kleiner als in der folgenden:

$$\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}\left\{1 - \frac{s}{2}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]+ \right.$$
$$\left. + \frac{s(s+2)}{2\cdot4}\frac{\alpha^4}{(1-\alpha^2)^2}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2 \mp \ldots\right\}.$$

Da nun der Maximumwerth des numerischen Betrages von $\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$ der Grösse:

$$2e + e^2$$

gleich ist, so ist jedes Glied dieser Reihe immer numerisch kleiner als das entsprechende in

$$\frac{2}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}\left\{1+\frac{s}{2}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}(2e+e^2)+\frac{s(s+2)}{2\cdot4}\frac{\alpha^4}{(1-\alpha^2)^2}(2e+e^2)^2+\ldots\right\}$$

Aus diesem Ausdrucke ist es leicht zu bestimmen, bis zu welchem Werthe von j man die Reihen erstrecken soll, um einen gewünschten Genauigkeitsgrad zu erreichen. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ giebt die Bedingung:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}(2e + e^2) < 1$$

den entsprechenden Werth:

$$e < 1$$

welcher Fall also bei denjenigen Asteroiden stattfindet, deren mittlere Bewegungen in der Nähe von 850″ liegen.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Zur Mesenterienentwicklung der Aktinien.

Von Oskar Carlgren.

[Mitgetheilt den 10. Mars 1897 durch Hj. Théel.]

1) In den Sammlungen des zoologischen Museums zu Upsala finden sich einige Exemplare einer Aktinie, die in den chinesischen und japanischen Meeren eingesammelt sind. Ihr äusseres Aussehen erbietet wenig bemerkenswerth, wenn man nicht genau die Tentakelanordnung betrachtet. Von der wohl entwickelten Fussscheibe geht eine langgestreckte, cylindrische, sehr derbe und dicke und mit mehr oder minder deutlichen, den Mesenterieninsertionen entsprechenden Längsfurchen versehene Körperwand aus, um ohne Randfalte in die platte Mundscheibe zu enden. Die Körperwand ist übrigens unregelmässig querrunzelt und hat weder Saugwarzen noch Randsäckchen. Die Tentakeln sind verhältnismässig lang (die äusseren bedeutend kürzer als die inneren), konisch, langgestreckt und bei dem am besten konservierten Exemplar schlangenförmig gekrümmt. Die Mitte der Mundscheibe ist erhöhet, wodurch die Schlundrohrsöffnung auf einem kurzen, von der übrigen Mundscheibe recht gut abgesetzten Cylinder zu liegen kommt. Das Schlundrohr ist etwas ausgekrängt, wodurch die Furchen und Falten desselben gut hervorstehen, und in den distalen Teilen rund. Die Öffnung der einzigen Schlundrinne ist von keinen wülstigen Tuberkeln markiert.

Die Anordnung der Tentakeln zeigt, dass diese Aktinie zu dem Subtribus Actininae gehört. Die Unregelmässigkeit der

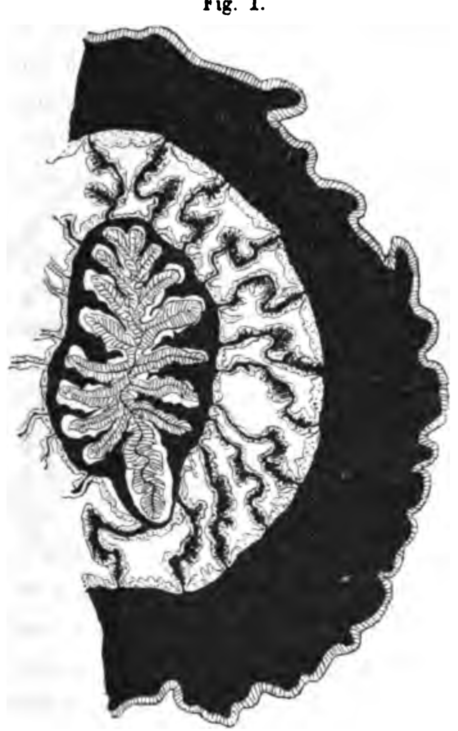
Zahl der Tentakeln in den Cyclen — wie wir unten sehen werden — giebt indessen an, dass wir eine aberrante Form für uns haben, was noch mehr in der Mesenterienanordnung des distalen Körperteils hervortritt.

Um die Mesenterien und ihre Anordnung bei dieser Aktinie kennen zu lernen, habe ich ein 1,5 Ctm. langes Exemplar in Querschnitte zerlegt. Ein anderes, etwa 2,5 Ctm. langes Exemplar habe ich auf mehreren Stellen fast durchschnitten. Die schematische Figur 2 ist nach diesem Exemplar angefertigt. Auf einem dritten habe ich die stärkeren Mesenterien studiert. Bei dem grössten, 6 Ctm. langen und 3 Ctm. breiten Individuum habe ich ausser den stärkeren Mesenterien auch einige Binnenfächer untersucht.

Die Mesenterienpaare sind in der Zahl 34, von denen 10 Paare stärker entwickelt und mit dem Schlundrohr in seiner ganzen Länge zusammengewachsen sind. Zwei Richtungsmesenterienpaare gehören diesen Mesenterien zu. In zwei Drittel oder drei Viertel des Tieres sind nur diese 10 stärkeren Paare vorhanden, und ihre Anordnung stimmt in der Mitte des Körpers oder auf der Höhe des proximalen Teils des Schlundrohrs (Fig. 1) mit derselben einer Hexaktinie, die 10 Mesenterienpaare und nur eine Schlundrinne hat, vollkommen überein. Die Binnenfächer sind im Allgemeinen etwas grösser als die Zwischenfächer, ein Verhältnis, das ja auch bei anderen Hexaktinien vorkommt. Während in der distalen Körperpartie die zwei Binnenfächer der Richtungsmesenterien etwa gleich wie in den übrigen Körperpartien entwickelt sind, *vergrössern* sich *die* übrigen acht *Binnenfächer* gegen das distale Ende nach und nach ansehnlich, so dass eine Umgruppierung der Mesenterien stattfindet, indem das eine Mesenterium eines Paares mit dem angrenzenden Mesenterium eines anderen ein neues Mesenterienpaar bildet. Auf jeder Seite der Richtungsmesenterien (Fig. 2) finden wir also ein Mesenterium, dessen Längsmuskeln den Richtungsmesenterien abgewandt sind. Die 6 übrigen Mesenterienpaare haben die Längsmuskeln in demselben Paar abgewandt.

In den vergrösserten acht Binnenfächern in den distalsten Teilen des Körpers finden wir zwei Mesenteriencyclen entwickelt, die, so weit ich von der schwach entwickelten Muskulatur sehen kann, normal mit zugewandten Längsmuskeln versehen sind. Der zweite Cyclus der Mesenterien besteht von acht Mesenterienpaaren, einem in jedem vergrösserten Binnenfach. Sie sind schwach


Fig. 1.



Für die Figuren 1, 3, 4, 5 gelten folgende Bezeichnungen: *vrm:* vordere (dorsale) Richtungsmesenterien, *hrm:* hintere (ventrale) Richtungsmesenterien, Entoderm punktiert, Mesogloea schwarz, Ektoderm gestreift.

Fig. 1. Querschnitt durch etwas mehr als die Hälfte eines 1,5 Ctm. langen Individuums von Endocoelactis auf der Höhe des proximalen Teils des Schlundrohrs.

ausgebildet, gehen ein Stückchen nach der proximalen Seite zu, aber erreichen, wenigstens bei grösseren Individuen, das distale Ende des Schlundrohrs. In jedem Falle ist die Insertion dieser

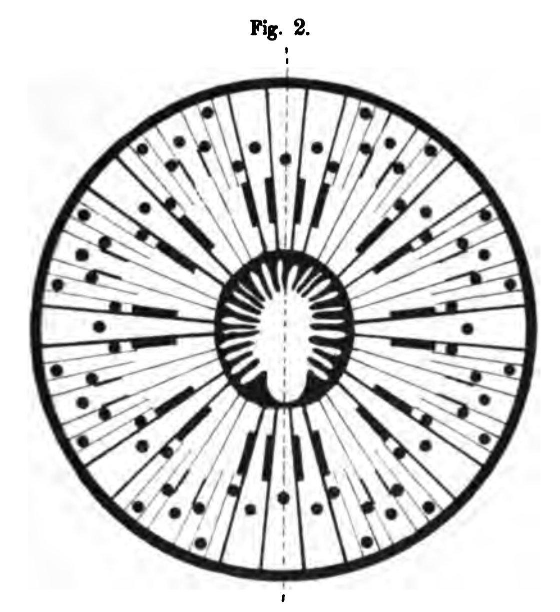
Mesenterien an das Schlundrohr unbedeutend. Auf jeder Seite der Mesenterien des zweiten Cyclus liegt, auch in den vergrösserten Binnenfächern, ein Mesenterienpaar dritter Ordnung, das das Schlundrohr nicht erreicht und das bedeutend schwächer als die Mesenterien des zweiten Cyclus ist.

Das Schema der Mesenterienanordnung ist also: 10 (2 Richtungsmesenterienpaare) + 8 + 16 = 34 Paare. Nur die der ersten Ordnung tragen Mesenterialfilamente (die in den distalen Teilen von Flimmer-Drüsenstreifen, in den proximalen nur von Nessel-Drüsenstreifen bestehen) und Geschlechtsorgane; die letzteren sind bei allen untersuchten Exemplaren mit Ausnahme der kleinsten gut entwickelt und sehr zahlreich. Das Tier ist geschlechtlich getrennt.

Die Verschiebung der Mesenterien hat eine Änderung der Tentakelanordnung verursacht. Ich habe die zwei in Betreff der Tentakeln am besten konservierten Tiere untersucht und das eine Individuum gleich unterhalb der Tentakeln fast abgeschnitten, um das Verhältnis zwischen den Mesenterienfächern und den Tentakeln zu sehen. Die schematische Figur 2 ist nach diesem Exemplar angefertigt. Die Tentakeln waren 68 in fünf Cyclen angeordnet, von denen doch die zwei letzten an einander sehr nahe liegen. Die Zahl der Tentakeln in den Cyclen ist, wie wir von der Figur 2 sehen, nicht in Multiplen von zehn angeordnet, was man von einer typisch gebauten zehnstrahligen Aktinie erwarten kann, sondern scheint sehr unregelmässig. Das Schema der Tentakelanordnung ist: 18 + 10 + 16 + 8 + 16 = 68 Tentakeln. (Das andere untersuchte Exemplar hatte, von einer äusseren Betrachtung zu beurteilen, die Tentakeln in ähnlicher Weise angeordnet. Von drei anderen Individuen hatten zwei 68, eines 64 Tentakeln). Die Verteilung der Tentakeln an die Mesenterienfächer zeigt die Figur 2. Die Anordnung des innersten Tentakelcyclus in acht Tentakelgruppen, von denen zwei in der Richtungsmesenterienzone liegen und jede von drei Tentakeln besteht, während die übrigen von nur zwei Tentakeln gebildet sind, steht bei äusserer Betrachtung der Mundscheibe sehr gut hervor.

Wenn wir diese Form mit einer gewöhnlichen Hexaktinie vergleichen, so tritt das Verhältnis, dass bei unsrer Aktinie die Mesenterienpaare der zweiten und dritten Cyclen *in Binnenfächern* der ersten Ordnung (und nicht in Zwischenfächern wie gewöhnlich) sich entwickeln, besonders hervor. Es finden sich zwar einige Angaben, dass die Mesenterien in Binnenfächern entwickelt werden können, aber nach den wenigen Mitteilungen in dieser Hinsicht, handelt es meistens von einzelnen Fächern, wo

Fig. 2.



Schematisches Bild eines Querschnittes von Endocoelactis gleich unterhalb der Tentakeln. Die Lage der Tentakeln (der runden Körpern) ist schematisch in den Fächern eingezeichnet. Die Längsmuskeln sind auf den Mesenterien dritter Ordnung nicht angegeben. Die gestreifte Linie geht durch die beiden Richtungsfächer.

die regelmässige Entwicklung von der einen oder anderen Ursache gestört ist. SIMON[1]) hat bei Anemonia sulcata in einigen Fächern Mesenterien mit nach aussen gekehrten Längsmuskeln gefunden, und derselbe Verfasser teilt mit, dass BOVERI eine solche Beobachtung bei einer Bunodes gemacht hat. Von seiner

[1]) SIMON, J. A. Ein Beitrag zur Anatomie und Systematik der Hexactinien. [Inaugural-Dissertation. München 1892].

Äusserung geht es doch deutlich hervor, dass das Mesenterienentstehen in Binnenfächern weder Regel ist, noch regelmässig in gleichwertigen Fächern auftritt. Zu ähnlichen Unregelmässigkeiten des Mesenterienentstehens können wir auch das von G. Y. und A. F. DIXON [1]) bei Bunodes thallia beobachtete Verhältnis, dass mehrere Mesenterienpaare in einem Binnenfach der Richtungsmesenterien entwickelt waren, rechnen. Nur bei dem selten vorkommenden, zweistrahligen Entwicklungstypus entstehen nach HERTWIG [2]) und BOVERI [3]) die fünften und sechsten Mesenterienpaare der ersten Ordnung regelmässig in Binnenfächern. In jedem Fall muss bemerkt werden, dass es hier von nur zwei Fächern handelt, alle die übrigen Mesenterienpaare höherer Ordnung folgen, so weit bekannt, der gewöhnlichen Regel und entwickeln sich in Zwischenfächern. Übrigens kann es in Frage gestellt werden, ob man von Binnenfächern der lateralen Mesenterien erster Ordnung reden kann, ehe die Mesenterien erster Ordnung sich umgruppiert haben, wenigstens ist dies auf dem Edwardsiastadium wenig gelegen.

Bei unsrer Aktinie sind indessen die Mesenterien der zweiten und dritten Ordnung regelmässig in allen Binnenfächern mit Ausnahme derselben der Richtungsmesenterien entwickelt, ja, es ist wahrscheinlich, dass 4 Paare von den stärkeren Mesenterien (erster Ordnung) in den Binnenfächern der lateralen Hauptmesenterien entstehen. An der Insertion der Mesenterien an die Fusscheibe zeigen nämlich die Mesenterien eine verschiedene Grösse, indem vier Paare mit abgewandten Längsmuskeln kürzer als die übrigen sind (Fig. 3). Diese Paare (7, 7; 9, 9) liegen in den Binnenfächern der lateralen Mesenterien. In Betreff der Ordnung der Entstehung von den sechs ersten Mesenterienpaaren kann ich nichts mit Sicherheit sagen; nach der etwas verschiedenen

---

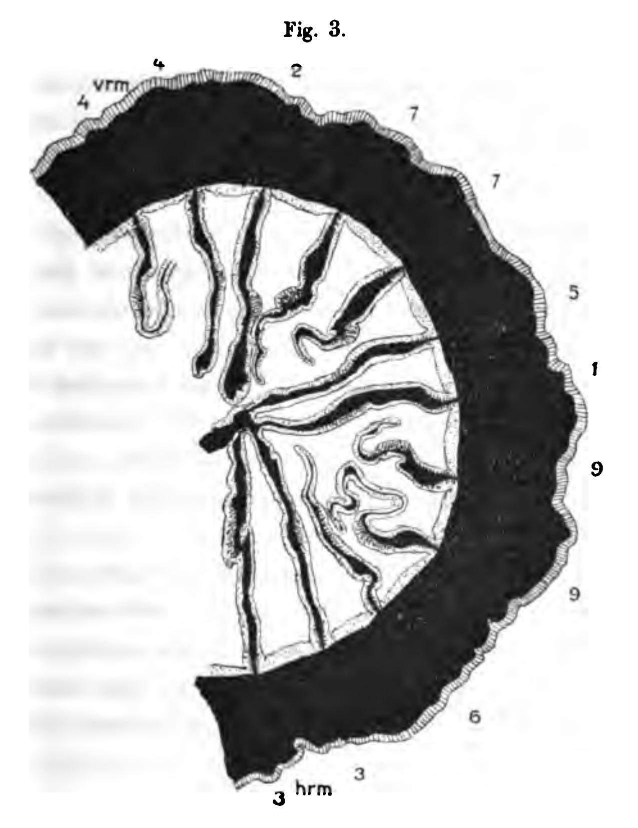
[1]) DIXON, G. Y. und A. F. Notes on Bunodes thallia, Bunodes verrucosa and Tealia crassicornis. [Proc. Roy. Dublin Soc. 6 (N. S.) P. 6. 1889]

[2]) HERTWIG, O. und R. Die Actinien. [Jena. Zeitsch. f. Med. und Nat. 14, 1880].

[3]) BOVERI, TH. Über Entwicklung und Verwandtschaftsbeziehungen der Aktinien. [Zeit. wiss. Zool. 49 Bd. 1889].

Grösse dieser Mesenterien (Fig. 3) ist es wahrscheinlich, dass sie in derselben Ordnung wie bei Halcampa sich anlegen. Ich stütze diese Vermutung nicht nur auf dem Schnitt, der in der Figur 3 abgezeichnet ist, sondern auf mehreren nicht abgebildeten Schnitten.

Fig. 3.



Querschnitt durch die proximale Partie von Endocoelactis. Die Mesogloea der Fusscheibe ist in der Mitte der Figur durchschnitten. Die Ziffern geben die Ordnung an, in der die Mesenterien wahrscheinlich entstanden sind. Dieselbe Mesenterien wie in Fig. 1 sind quergeschnitten.

Wir können wahrscheinlich vier Perioden der Mesenterienentwicklung bei unsrer Aktinie unterscheiden.

1:ste Periode: *Die Entstehung der 12 Hauptmesenterien*, wahrscheinlich nach dem bilateralen Entwicklungstypus.

2:te Periode: *Der Übergang von der Zahl 6 zu der Zahl 10 in dem ersten Mesenteriencyclus.*

Dies geschieht dadurch, *dass ein Mesenterienpaar mit abgewandten Längsmuskeln in jedem der vier lateralen Binnenfächer sich entwickelt.* Jedes Mesenterium dieser neuen Paare bildet mit dem angrenzenden Mesenterium erster Ordnung ein neues Mesenterienpaar mit zugewandten Längsmuskeln. Das Tier ähnelt in diesem Stadium einer Hexaktinie mit 10 Mesenterienpaaren, von denen zwei Richtungsmesenterienpaare. Der grösste Teil des Tieres mit Ausnahme des distalen Endes bleibt auf diesem Stadium.

3:te Periode: *a*) *Die Entstehung von 6 Mesenterienpaaren mit abgewandten Längsmuskeln und von 4 unpaarigen Mesenterien, einem auf jeder Seite der Richtungsmesenterien, in dem distalen Ende des Körpers.* Diese *Umgruppirung* ist von einer sehr starken Vergrösserung aller Binnenfächer mit Ausnahme derselben der Richtungsmesenterien verursacht. *b*) *Die Neubildung eines Mesenterienpaares mit zugewandten Längsmuskeln in jedem der vergrössten Binnenfächer.* (Die Entstehung der 8 Mesenterienpaare zweiter Ordnung.)

4:te Periode: *Die Entwicklung der 16 mit zugewandten Längsmuskeln versehenen Mesenterienpaare des dritten Cyclus, ein Paar auf jeder Seite der Mesenterien des zweiten,* nicht also in den Binnenfächern der zweiten Ordnung, aber wohl in den Binnenfächern der ersten. Das distale Körperende bleibt auf diesem Stadium.

Ich will mit dieser Einteilung der Perioden nicht sagen, dass sie von einander scharf geschieden sind. Besonders gilt dies von den ersten und zweiten wie auch von den dritten und vierten Perioden. Es ist nicht unmöglich — obgleich ich keinen Grund dieser Annahme habe — dass die Mesenterien zweiter und dritter Ordnung in einem Binnenfach eher als in einem anderen sich entwickeln, so z. B. dass während eines Entwicklungsstadiums des Tieres die Mesenterien der dritten Ordnung in einem Binnenfach angelegt sind, eher als in einem anderen Fach das Paar des zwei-

ten Cyclus entstanden ist. Das Material ist nicht hinreichend dies zu bestimmen.

Die Perioden 2 und 3 sind von besonderem Interesse, weil sie zeigen, dass die Mesenterien *in den Binnenfächern regelmässig* (d. h. in allen Binnenfächern mit Ausnahme derselben der Richtungsmesenterien) sich entwickeln können. Die Periode 2 weist uns ausserdem einen bisher nicht bekannten Entwicklungsmodus eine 6-strahlige Aktinie in eine 10-strahlige überzuführen, indem 4 Paare von Mesenterien mit *abgewandten* Längsmuskeln *in den lateralen Binnenfächern der Hauptmesenterien* entstehen.

In Betreff der Tentakeln so ist der Umstand bemerkenswert, dass die Tentakeln, die von den Binnenfächern ausgehen, im Allgemeinen einer höheren Tentakelordnung zuhören als die, welche in den Zwischenfächern liegen. Das Verhältnis ist bei den gewöhnlichen Aktinien das umgekehrte, indem hier die Tentakeln der Zwischenfächer die letzte Tentakelordnung bilden.

Die hier oben beschriebene Mesenterienanordnung stimmt recht gut mit derselben einer Minyade [1]) überein. Durch eine Umgruppierung der 20 Paare der Mesenterien und durch eine sehr starke Vergrösserung der Binnenfächer kommt bei Minyas eine Mesenterienanordnung zu Stande, die nach demselben Typus gebaut ist wie bei unsrer Aktinie die Anordnung der stärkeren Mesenterien in der distalen Körperpartie. Während indessen bei dieser die Binnenfächer der Richtungsmesenterien nicht weiter vergrössert sind und also die Richtungsmesenterien ihren ursprünglichen Platz beibehalten, haben bei Minyas auch diese Binnenfächer sich ganz wie die übrigen vergrössert, wodurch die Richtungsmesenterien, jedes mit dem angrenzenden Mesenterium, neue Paare zu bilden kommen. Die Mesenterienanordnung bei unsrer Form ist doch infolge der Entwicklung der Mesenterien in den Binnenfächern mehr als bei Minyas kompliciert.

---

[1]) Siehe CARLGREN, OSKAR. Zur Kenntnis der Minyaden. [Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1894 N:o 1. Stockholm 1894].

Ich habe [1]) in Betreff der Mesenterienanordnung bei Minyas die Ansicht ausgesprochen, dass die Umgruppierung der Mesenterien den Zweck hat die zweistrahlige (wenn man von dem Vorhandensein nur einer Schlundrinne absieht) Symmetrie in eine radiale Grundform überzuführen, denn nicht nur die Mesenterienanordnung sondern auch das runde Schlundrohr und die wenig markierte Rinne geben eine solche Erklärung an die Hand. Ich habe doch hervorgehalten, dass eine vollkommen radiale Form in dieser Weise nie erreicht werden kann. Die Ursache dieser semiradialen Symmetrie ist wahrscheinlich eine Folge der freischwimmenden Lebensweise der Minyaden.

Auch die hier oben beschriebene Aktinie strebt eine solche radiale Grundform zu erreichen. In allen Teilen mit Ausnahme der distalen herrscht eine bilaterale Symmetrie (bilateral, weil nur eine Schlundrinne vorhanden ist) und das Schlundrohr ist in der Richtungsebene etwas plattgedrückt (Fig. 1). In dem distalsten Teil dagegen haben nicht nur die Mesenterien eine Tendenz sich radial anzuordnen, sondern das Schlundrohr wird nach oben mehr rund (Fig. 2). Die bilaterale Symmetrie, die das Vorhandensein von nur einer Schlundrinne dem Tier giebt, ist in der That nicht so gross, wie es bei erstem Augenblicke scheint, denn die Schlundrinne weicht in histologischer Hinsicht nicht von dem übrigen Schlundrohr ab.

Schliesslich in Betreff der phylogenetischen Stellung unsrer Aktinie müssen wir wohl, wie oben gesagt, sie zu dem Subtribus Actininae rechnen, obgleich ihre Mesenterienanordnung so viel von der typischen abweicht. Nach der Mesenterienanordnung zu beurteilen, sollte man berechtigt sein, sie mit den Minyaden zusammenzuführen. Es ist doch wenig glaublich, dass die Mesenterienanordnung bei unsrer Form und bei Minyas von näherer Verwandtschaft derselben beruht. Das ganze Aussehen beider Species ist sehr verschieden, der Sphinkter ist bei Minyas

---

[1]) CARLGREN, OSKAR. Beobachtungen über die Mesenterienstellung der Zoantharien nebst Bemerkungen über die bilaterale Symmetrie der Anthozoen. [Festskrift för Lilljeborg, 4:o. Upsala 1896].

stark circumscript, wodurch diese Form in der Nähe der Bunodiden steht, während unser Tier keinen Sphinkter hat und dafür näher den Antheaden (oder Antheomorphiden, wenn man diese Familie aufrecht erhält) kommt. Die Ähnlichkeit der Mesenterienanordnung ist wohl einem Parallelismus zuzuschreiben. Ein solcher kommt ja bei Hexaktinien in Betreff der Mesenterien oft vor, ich erinnere hier nur an die Anordnung der Mesenterien nach der Zahl 8 oder 10, welche binnen manchen verschiedenen Familien vorkommt, und an die radiale Grundform, die bei so weit geschiedenen Familien wie bei den Holaktinien,[1]) den Thalassiantheen[2]) und binnen den Sagartiden[3]) auftritt. Alle diese Verhältnisse zeigen deutlich, dass man bei einer Systematisierung der Aktinien nicht ausschliessend und in erster Hand nur ausnahmsweise (wie z. B. um die Ceriantheen und Zoantheen von den übrigen Aktinien zu unterscheiden) die Mesenterienanordnung zu Einteilungsgrund nehmen kann.

Die eigentümliche Mesenterien- und Tentakelanordnung kann uns doch berechtigen ein neues Genus und eine neue, von den Antheaden geschiedene Familie aufzustellen. Ich nenne das Genus *Endocoelactis* und die Familie *Endocoelactidae.* Diese Familie steht wahrscheinlich in dem System recht niedrig, denn sowohl das Fehlen des Sphinkters als das Vorhandensein der dünnwandigen Nesselzellen (die gewöhnlich nur in den Tentakeln und der Mundscheibe vorkommen) in dem Ektoderm der Körperwand und besonders in dem des Schlundrohrs geben einen solchen Platz an.

Ich komme zu diesem Genus später zurück.

---

[1]) BOVERI, TH. Das Genus Gyractis etc. [Zool. Jahrb., Abt. Systematik 7, 1894].

[2]) KWIETNIEWSKI, CAS. Actiniaria von Ternate. [Abhandl. Senckenb. nat. Gesellschaft 23. Frankfurt a. M. 1897].

[3]) CARLGREN, OSKAR. Studien über Nordische Actinien I. [Kongl. Sv. Vet.-Akad. Handl. 25, N:o 10, p. 99. Stockholm 1893].

2) Ich habe schon 1893[1]) wie besonders 1896[2]) die Tendenz hervorgehoben, welche die Aktinien im Allgemeinen haben, die Mesenterien von vorn nach hinten (von der dorsalen zu der ventralen Seite) anzulegen. So treten bei den Hexaktinien von den Mesenterien der ersten Ordnung die des fünften Paares vor denen (mehr dorsal als die) des sechsten auf, und die Mesenterienpaare der zweiten Ordnung entstehen, wenigstens in manchen Fällen, von vorn nach hinten. In Betreff der Mesenterien der dritten Ordnung fehlen ähnliche Beobachtungen, es scheint, als ob sie gleichzeitig auftreten sollten. Bei einem mit 24 Mesenterienpaaren versehenen Exemplar von Condylactis cruentata aus dem Feuerland habe ich doch eine Entwicklung der Mesenterien dritter Ordnung von vorn nach hinten konstatieren können (Fig. 4 und 5). Die Mesenterien des dritten Cyclus, die nächst dem dorsalen Richtungsmesenterienpaar liegen (III 1 und III 2), sind in den distalen Partien des Schlundrohrs vollständig (Fig. 4), auf der Höhe der proximalen aber unvollständig (Fig. 5). Welches von diesen Paaren erst entstehe, wage ich nicht mit Sicherheit zu sagen. Die übrigen Mesenterien dritter Ordnung sind unvollständig und wenig entwickelt, die folgenden (III 3 und III 4) deutlich stärker als die Mesenterienpaare III 5 und III 6. Die Mesenterienpaare III 3 und III 4 unterscheiden sich in Grösse unbedeutend, so dass es schwer zu sagen ist, welches Paar das ältere ist. In verschiedenen Regionen des Körpers scheint bald das eine bald das andere stärker entwickelt. Die Mesenterien III 5 sind stärker als die Mesenterien III 6. Die Mesenterien des III 6 Paares stehen einander am nächsten (Fig. 4, 5) und das Zwischenfach, in dem diese Mesenterien sich entwickeln, ist minder als die übrigen derselben Ordnung. Die Zwischenfächer, in denen die Mesenterien dritter Ordnung entstehen, nehmen im Allgemeinen in Grösse von vorn nach hinten ab (Fig. 4, 5).

---

[1]) Carlgren, Oskar. Studien über Nordische Actinien I. [K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar Bd 25, 1893].

[2]) Carlgren, Oskar. Beobachtungen über die Mesenterienstellung etc.

Die Bestimmung der vorderen (dorsalen) und der hinteren (ventralen) Partien wird durch die verschiedene Grösse der Mesenterien zweiter Ordnung möglich gemacht. Zwei Paare, die zwischen den Mesenterien III 5 und III 6 liegen, (das eine Paar ist in Fig. 4 und 5 abgebildet), sind schwächer als die übrigen. Weil die Entwicklung der Mesenterien zweiter Ordnung von vorn nach hinten geht — was ich bei einem jüngeren Individuum

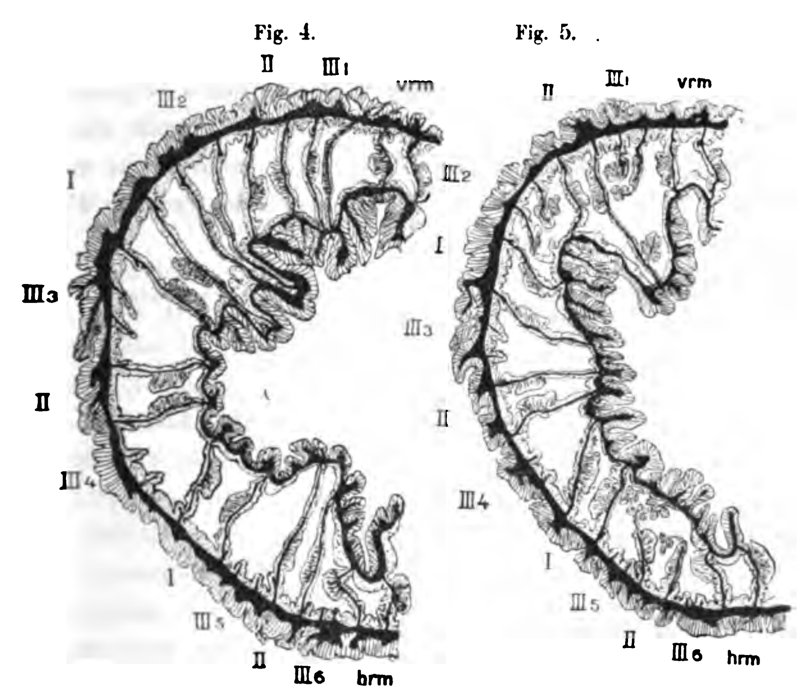


Fig. 4, 5. Condylactis cruentata. Fig. 4. Querschnitt durch etwas mehr als die Hälfte eines Individuums auf der Höhe des distalen Teils des Schlundrohrs. Fig. 5. Derselbe Querschnitt etwas länger nach der proximalen Seite zu. I, II, III: Mesenterien erster, zweiter, dritter Ordnung. *vrm*, *hrm*: siehe Fig. 1. In Betreffe der gewöhnlichen Ziffern siehe den Text.

konstatiert habe — es scheint mir, dass die Richtungsmesenterien, die diesen schwächeren Mesenterien am nächsten liegen, die hinteren (ventralen) sind.

Wenn auch die Mesenterien der dritten Ordnung nicht so deutlich wie die der zweiten sich von vorn nach hinten anlegen,

so ist es doch wahrscheinlich, dass bisweilen bei den Hexaktinien eine solche Anlegung der Mesenterien dritter Ordnung, im Grossen gesehen, stattfindet. Wenigstens scheint dies bei Condylactis cruentata der Fall zu sein. Bei dieser Form folgt übrigens kein radialer Entwicklungsmodus dem bilateralen nach, denn die Species hat nicht mehr als 24 Mesenterienpaare, was ich bei zahlreichen Exemplaren beobachtet habe. Der Einfluss einer früheren, hypotetischen Stockbildung [1]) — die Ursache des bilateralen Entwicklungstypus — lässt also eine lange Zeit die Spuren nach. Im Allgemeinen kann man wohl eine solche langwierige, bilaterale Entwicklung bei Formen, die in dem System niedrig stehen (wie bei den Antheaden), erwarten, während die mehr differenzierten Formen wahrscheinlich eher einen radialen Entwicklungstypus erhalten.

[1]) Vergleiche CARLGREN. Beobachtungen über die Mesenterienstellung etc.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Om invarianta hyperelliptiska likheter.

Af FRANS DE BRUN.

[Meddeladt den 10 Mars 1897 genom M. FALK.]

Som bekant fins det algebraiska likheter, hvilka genom birationella transformationer låta återföra sig på sig sjelfva, och detta icke blott så, att de nya likheterna hafva samma rang, högsta ordningstal med afseende på variablerna o. d. De kunna till och med blifva fullkomligt identiska med den ursprungliga, korteligen: de äro invarianta för substitutionen i fråga. I min doktorsafhandling: »Bidrag till WEIERSTRASS' teori för algebraiska funktioner» har jag något berört sådana invarianta likheter och åtminstone för vissa fall härledt de relationer, de i öfrigt godtyckliga konstanterna i en likhet måste underkastas för att denna skall vara invariant. Särskildt har jag framstält den invarianta hyperelliptiska likheten. I afslutningen, som behandlar omvändningsproblemet till de invarianta hyperelliptiska likheterna af andra rangen — utarbetad i största hast — har dess värre ett fel insmugit sig, som gjort framställningen väsentligt origtig. Då saken dessutom sammanhänger — såsom vi skola se — med frågan om nedbringandet af periodantalet hos abelska integraler af första slaget, har jag här ånyo tagit upp problemet till behandling och då stält det allmännare.

Må den hyperelliptiska likheten af rangen ϱ vara

$$y^2 = x(x-1)(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_{2\varrho-2})(x-c_{2\varrho-1})\,. \quad (1)$$

Den är tydligen invariant för

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1}{x^1} \\ y = \pm \dfrac{c_1^{\frac{\varrho+1}{2}}}{x^{1\varrho+1}} \cdot y^1 , \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{c_1}{x} \\ y^1 = \pm \dfrac{c_1^{\frac{\varrho+1}{2}}}{x^{\varrho+1}} y , \end{cases} \tag{2}$$

om

$$\frac{c_k}{c_1} = c_{2\varrho - k + 1} , \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots \varrho) . \tag{1*}$$

Likheten innehåller således i detta fall blott ϱ stycken arbiträra konstanter.

Bilda funktionerna $H(xy)$!

$$H(xy = \frac{x^{\varrho-1} + A_1 x^{\varrho-2} + \ldots + A_{\varrho-2} x + A_{\varrho-1}}{y} .$$

Försök bestämma $A_1 A_2 \ldots A_{\varrho-1}$ så, att

$$H(xy)\, dx = H(x^1 y^1)\, dx_1 .$$

Man finner, att detta går för sig, om

$$A_{\varrho-\upsilon-1} = - c_1^{\frac{\varrho-1}{2} - \upsilon} \cdot A_\nu , \quad (\nu = 1, 2, \ldots (\varrho - 1))$$

$$A_{\varrho-1} = - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}} .$$

Beteckna med anledning häraf

$$H(xy)_\varkappa = \frac{x^{\varrho-\varkappa} - c_1^{\frac{\varrho+1}{2} - \varkappa} x^{\varkappa-1}}{y} \qquad \left(\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots \frac{\varrho - \alpha}{2}\right), \tag{3}$$

der α är lika med 0 eller 1, allteftersom ϱ är jemnt eller udda tal. Man kan således bilda $\frac{\varrho - \alpha}{2}$ funktioner $H(xy)_\varkappa$ sådana, att

$$H(xy)_\varkappa\, dx = H(x^1 y^1)_\varkappa\, dx^1 .$$

Återstå således $\frac{\varrho + \alpha}{2}$ funktioner $H(xy)_{\frac{\varrho-\alpha}{2} + \sigma}$, $\left(\sigma = 1, 2 \ldots \frac{\varrho + \alpha}{2}\right)$.

Vi skola söka bestämma de ingående konstanterna i dem så, att

$$H(xy)_{\frac{\varrho-\alpha}{2}+\sigma}\,dx = -\,H(x^1y^1)_{\frac{\varrho-\alpha}{2}+\sigma}\,dx^1\,;$$

hvilket eger rum, om

$$H(xy)_{\frac{\varrho-\alpha}{2}+\sigma} = \frac{x^{\varrho-\sigma} + c_1^{\frac{\varrho+1}{2}-\sigma}\,x^{\sigma-1}}{y} \qquad \left(\sigma=1,2\ldots\frac{\varrho+\alpha}{2}\right). \qquad (4)$$

Utgå från

$$\left.\begin{aligned}
du_1 &= \frac{x_1^{\varrho-1} - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_1}\,dx_1 + \frac{x_2^{\varrho-1} - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_1}\,dx_2 + \ldots + \frac{x_\varrho^{\varrho-1} - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_\varrho}\,dx_\varrho \\
du_2 &= \frac{x_1^{\varrho-2} - c_1^{\frac{\varrho-3}{2}}\,x_1}{y_1}\,dx_1 + \frac{x_2^{\varrho-2} - c_1^{\frac{\varrho-3}{2}}\,x_2}{y_2}\,dx_2 + \ldots \\
&\quad + \frac{x_\varrho^{\varrho-2} - c_1^{\frac{\varrho-3}{2}}\,x_\varrho}{y_\varrho}\,dx_\varrho \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
du_{\frac{\varrho-\alpha}{2}} &= \frac{x_1^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\,x_1^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_1}\,dx_1 + \frac{x_2^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\,x_2^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_2}\,dx_2 + \ldots \\
&\quad + \frac{x_\varrho^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\,x_\varrho^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_\varrho}\,dx_\varrho \\
dv_1 &= \frac{x_1^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_1}\,dx_1 + \frac{x_2^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{x_\varrho^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_\varrho}\,dx_\varrho \\
dv_2 &= \frac{x_1^{\varrho-2} + c_1^{\frac{\varrho-3}{2}}\,x_1}{y_1}\,dx_2 + \frac{x_2^{\varrho-2} + c_1^{\frac{\varrho-3}{2}}\,x_2}{y_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{x_\varrho^{\varrho-2} + c_1^{\frac{\varrho-3}{2}}\,x_\varrho}{y_\varrho}\,dx_\varrho \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dv_{\frac{\varrho+\alpha}{2}} &= \frac{x_1^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}}\,x_1^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_2}\,dx_1 + \frac{x_2^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}}\,x_2^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_2}\,dx_2 + \ldots \\
&\quad + \frac{x_\varrho^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}}\,x_2^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_\varrho}\,dx_\varrho\,.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ponera

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= \frac{c_1}{x_\nu^1} \\ y_\nu &= \frac{c_1^{\frac{\varrho+1}{2}}}{{x_\nu^1}^{\varrho+1}}\, y_\nu^1 \end{aligned}\right\}, \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \varrho).$$

Man erhåller, om $\omega_\varkappa$ och $\omega_\varkappa^1$ beteckna godtyckliga konstanter,

$$d(u_1 + \omega_1) =$$

$$= \frac{{x_1^1}^{\varrho-1} - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_1^1}\, dx_1^1 + \frac{{x_2^1}^{\varrho-1} - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_2^1}\, dx_2^1 + \ldots + \frac{{x_\varrho^1}^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_\varrho^1}\, dx_\varrho^1$$

. . . .

$$d\left(u_{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + \omega_{\frac{\varrho-\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{{x_1^1}^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\, {x_1^1}^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_1^1}\, dx_1^1 + \frac{{x_2^1}^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\, {x_2^1}^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_2^1}\, dx_2^1 + \ldots$$

$$+ \frac{{x_\varrho^1}^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\, {x_\varrho^1}^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_\varrho^1}\, dx_\varrho^1$$

$$d\left(\omega_1^1 - v_1\right)$$

$$= \frac{{x_1^1}^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_1^1}\, dx_1^1 + \frac{{x_2^1}^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_2^1}\, dx_2^1 + \ldots + \frac{{x_\varrho^1}^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_\varrho^1}\, dx_\varrho^1$$

. . . .

$$d\left(\omega^1_{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - v_{\frac{\varrho+\alpha}{2}}\right)$$

$$= \frac{{x_1^1}^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}}\, {x_1^1}^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_1^1}\, dx_1^1 + \frac{{x_2^1}^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}}\, {x_2^1}^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_2^1}\, dx_2^1 + \ldots$$

$$+ \frac{{x_\varrho^1}^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}}\, {x_\varrho^1}^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_\varrho^1}\, dx_\varrho^1 .$$

Betecknas de abelska funktionerna med

$$P_\nu\left(u_1 u_2 \ldots u_{\frac{\varrho-\alpha}{2}};\ v_1 v_2 \ldots v_{\frac{\varrho+\alpha}{2}}\right), \qquad (v=1, 2 \ldots \varrho),$$

äro $x_1 x_2 \ldots x_\varrho$ rötter till den irreduktibla likheten

$$\left.\begin{aligned} &x^\varrho - P_1(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots) x^{\varrho-1} + \ldots \\ &+ (-1)^\varrho P_\varrho(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Man finner följande egenskaper hos de entydiga funktionerna $P_v(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots)$.

Eftersom

$$\prod_{v=1}^{\varrho} x_v x_v^1 = c_1^\varrho,$$

är

$$\left.\begin{aligned} &P_\varrho(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots)\cdot \\ \cdot &P_\varrho(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2 \ldots;\ \ldots \omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2 \ldots) = c_1^\varrho\ \because \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\therefore P_\varrho(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2 \ldots;\ \omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2 \ldots)\cdot$$
$$\cdot P_\varrho(u_1+2\omega_1,\ u_2+2\omega_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots) = c_1^\varrho$$

$$\because P_\varrho(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots) = P_\varrho(u_1+2\omega_1,\ u_2+2\omega_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots). \quad (8)$$

Eftersom

$$x^\varrho - P_1(u_1+2\omega_1,\ u_2+2\omega_2,\ \ldots;\ v_1,\ v_2 \ldots) x^{\varrho-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^\varrho P_\varrho(u_1+2\omega_1,\ u_2+2\omega_2,\ \ldots;\ v_1,\ v_2 \ldots) = 0,$$
$$x^\varrho - P_1(u_1,\ u_2 \ldots;\ v_1,\ v_2,\ \ldots) x^{\varrho-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^\varrho P_\varrho(u_1,\ u_2 \ldots;\ v_1,\ v_2,\ \ldots) = 0,$$

har man

$$[P_1(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2 \ldots;\ v_1, v_2 \ldots) - P_1(u_1, u_2 \ldots;\ v_1, v_2 \ldots)]x^{\varrho-1} + \ldots$$
$$+[P_{\varrho-1}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2 \ldots;\ v_1, v_2 \ldots) - P_{\varrho-1}(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots)]x = 0,$$
$$\because x\Phi(x(u_1 u_2 \ldots v_1 v_2 \ldots)) = 0.$$

Men den är irreduktibel. Då måste

$$\left.\begin{aligned} &P_\nu(u_1+2\omega_1,\ u_2+2\omega_2 \ldots;\ v_1,\ v_2 \ldots) = P_\nu(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots) \\ &\qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots \varrho). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Insättes uti (6) $\frac{c_1}{x}$ i stället för x, erhålles

$$\left(\frac{c_1}{x}\right)^\varrho - P_1\left(u_1+\omega_1,\, u_2+\omega_2,\ldots;\ \omega_1^1 - v_1,\, \omega_2^1 - v_2,\ldots\right)\left(\frac{c_1}{x}\right)^{\varrho-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^{\varrho-1} P_{\varrho-1}\left(u_1 + \omega_1,\ \ldots;\ \omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2,\ \ldots\right)\frac{c_1}{x} +$$

$$+ (-1)^\varrho P_\varrho\left(u_1 + \omega_1,\ u_2 + \omega_2,\ \ldots;\ \omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2,\ \ldots\right) = 0$$

$$\therefore x^\varrho - x^{\varrho-1}\frac{P_\varrho(u_1u_2\ldots;\ v_1v_2\ldots)}{c_1^{\varrho-\nu}} P_{\varrho-1}\left(u_1 + \omega_1,\ u_2 + \omega_2,\ \ldots;\right.$$

$$\left.\omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2,\ \ldots\right) + \ldots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{P_\varrho(u_1u_2\ldots;\ \ v_1v_2\ldots)}{c_1^{\varrho-\nu}} P_{\varrho-\nu}\left(u_1 + \omega_1,\ u_2 + \omega_2,\ \ldots;\right.$$

$$\left.\omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2\ldots\right)x^{\varrho-\nu} + \ldots + (-1)^\varrho P_\varrho(u_1u_2\ldots;\ v_1v_2\ldots) = 0.$$

Genom jemförelse med (6) erhålles häraf

$$P_{\varrho-v}\left(u_1 + \omega_1,\ u_2 + \omega_2\ldots;\ \omega_1^1 - v_1,\ \omega_2^1 - v_2\ldots\right) P_\varrho(u_1u_2\ldots;$$

$$v_1v_2\ldots) = c_1^{\varrho-v} P_v(u_1u_2\ldots;\ v_1v_2\ldots),\quad (v = 1, 2\ldots(\varrho - 1)).\quad (10)$$

Göres i stället substitutionen

$$x_v = \frac{c_1}{x''_v}$$

$$y_v = -\frac{c_1^{\frac{\varrho+1}{2}}}{x''^{\varrho+1}_v} y''_v,$$

fås

$$d(\eta_1 - u_1) =$$

$$= \frac{x''^{\varrho-1}_1 - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y''_1} dx''_1 + \frac{x''^{\varrho-1}_2 - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y''_2} dx''_2 + \ldots$$

$$+ \frac{x''^{\varrho-1}_\varrho - c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y''_\varrho} dx''_\varrho$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}
& d\left(\eta_{\frac{\varrho-\alpha}{2}} - u_{\frac{\varrho-\alpha}{2}}\right) = \\
& = \frac{x_1''^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}} x_1''^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_1''} dx_1'' + \frac{x_1''^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}} x_2''^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_2''} dx_2'' + \ldots \\
& \qquad + \frac{x_\varrho''^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} - c_1^{\frac{\alpha+1}{2}} x_\varrho''^{\frac{\varrho-\alpha-2}{2}}}{y_\varrho''} dx_\varrho'' \\
& d\left(v_1 + \eta_1^1\right) = \\
& = \frac{x_1''^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_1''} dx_2'' + \frac{x_2''^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_2''} dx_2'' + \ldots \\
& \qquad + \frac{x_\varrho''^{\varrho-1} + c_1^{\frac{\varrho-1}{2}}}{y_\varrho''} dx_\varrho'' \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& d\left(v_{\frac{\varrho+\alpha}{2}} + \eta_{\frac{\varrho+\alpha}{2}}\right) = \\
& = \frac{x_1''^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}} x_1''^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_1''} dx_1'' + \frac{x_2''^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}} x_2''^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_2''} dx_2'' + \ldots \\
& \qquad + \frac{x_\varrho''^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} + c_1^{\frac{1-\alpha}{2}} x_\varrho''^{\frac{\varrho+\alpha-2}{2}}}{y_\varrho''} dx_\varrho'' .
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Häraf erhålles

$$\left.\begin{aligned}
& P_\varrho(u_1 u_2 \ldots ; v_1 v_2 \ldots) \cdot \\
& \cdot P_\varrho\left(\eta_1 - u_1 , \eta_2 - u_2 \ldots ; \eta_1^1 + v_1 , \eta_2^1 + v_2 \ldots\right) = c_1^\varrho
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \because P_\varrho\left(\eta_1 - u_1 , \eta_2 - u_2 \ldots ; \eta_1^1 + v_1 , \eta_2^1 + v_2 \ldots\right) \cdot \\
& \cdot P_\varrho\left(u_1 u_2 \ldots ; v_1 + 2\eta_1^1 , v_2 + 2\eta_2^1 \ldots\right) = c_1^\varrho
\end{aligned}$$

$$\because P_\varrho\left(u_1 u_2 \ldots ; v_1 + 2\eta_1^1 , v_2 + 2\eta_2^1 \ldots\right) = P_\varrho(u_1 u_2 \ldots ; v_1 v_2 \ldots) \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}
& \because P_\nu\left(u_1 u_2 \ldots ; v_1 + 2\eta_1^1 , v_2 + 2\eta_2^1 \ldots\right) = \\
& = P_\nu(u_1 u_2 \ldots ; v_1 v_2 \ldots) \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \varrho) .
\end{aligned}\right\} (13^*)$$

Vidare erhålles

$$\left.\begin{array}{c} P_{\varrho-\nu}\left(\eta_1 - u_1,\ \eta_2 - u_2,\ \ldots;\ \eta_1^1 + v_1,\ \eta_2^1 + v_2 \ldots\right) \\ P_\varrho(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots) = c_1^{\varrho-\nu} P_\nu(u_1 u_2 \ldots;\ v_1 v_2 \ldots), \\ (\nu = 1,\ 2 \ldots (\varrho - 1)). \end{array}\right\} \quad (14)$$

Skulle rangen vara två, blefve $P_1(uv)$ och $P_2(uv)$ bestämda genom följande likheter:

$$P_1(u + \omega,\ \omega^1 - v)\, P_2(u,\ v) = c_1 P_1(u,\ v)$$
$$P_1(\eta - u,\ v + \eta^1)\, P_2(u,\ v) = c_1 P_1(u,\ v)$$
$$P_2(u + \omega,\ \omega^1 - v)\, P_2(u,\ v) = c_1^2$$
$$P_2(\eta - u,\ v + \eta^1)\, P_2(u,\ v) = c_1^2$$

$$\because P_1(u + 2\omega,\ v) = P_1(u,\ v)$$
$$P_1(u,\ v + 2\eta^1) = P_1(u,\ v)$$
$$P_2(u + 2\omega,\ v) = P_2(u,\ v)$$
$$P_2(u,\ v + 2\eta^1) = P_2(u,\ v).$$

Af dessa senare likheter är utan vidare klart, att $P_1(u,\ v)$ och $P_2(u,\ v)$ äro dubbelperiodiska funktioner med afseende på hvar och en af u och v. Då de dessutom äro entydiga och af rationel karaktär, måste de låta uttrycka sig rationelt genom pu, pv och $p'v$. Man jemföre härmed PICARDS sats och JACOBIS bekanta afhandling i ett af de tidigare banden af CRELLES Journal.

Låta vi rangen vara tre, erhålla vi, att $P_1(uv_1v_2)$ är rationel funktion af pu och $p'u$ med koefficienter, som äro funktioner af v_1 och v_2, hvilka i allmänhet hafva mer än två perioder. I sjelfva verket bringas integralen

$$\int \frac{(x^2 - c_1)\, dx}{\sqrt{x(x-1)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\left(x - \frac{c_1}{c_2}\right)\left(x - \frac{c_1}{c_3}\right)}}$$

genom substitutionen

$$x + \frac{c_1}{x} = z$$

öfver uti

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

om man samtidigt tecknar

$$e_1 = c_1 + 1$$

$$e_2 = c_2 + \frac{c_1}{c_2}$$

$$e_3 = c_3 + \frac{c_1}{c_3}.$$

Den integralen har således samma egenskap som JACOBIS. Dock kan icke för $\varrho = 3$ någon af de båda andra integralerna af första slaget transformeras till elliptiska integraler.

Betecknas integralerna af *första gruppen* med

$$U_\nu = \int H(xy)_\nu \, dx \quad \left(\nu = 1,\ 2 \ldots \frac{\varrho-\alpha}{2}\right) \tag{15}$$

och de af *andra gruppen* med

$$V_\sigma = \int H(xy)_{\frac{\varrho-\alpha}{2}+\sigma} \quad \left(\sigma = 1,\ 2 \ldots \frac{\varrho+\alpha}{2}\right). \tag{16}$$

Af de förra kan ingen ha mer än $\varrho - \alpha$ perioder, af de senare ingen mer än $\varrho + \alpha$ perioder. Deremot kunna dessa tal ytterligare nedbringas. Bilda nemligen

$$\overline{U}_\varkappa = \lambda_1^{(\varkappa)} U_1 + \lambda_2^{(\varkappa)} U_2 + \ldots + \lambda_{\frac{\varrho-\alpha}{2}}^{(\varkappa)} U_{\frac{\varrho-\alpha}{2}}, \quad \left(\varkappa = 1,\ 2 \ldots \frac{\varrho-\alpha}{2}\right) \tag{17}$$

$$\overline{V}_{\varkappa'} = \mu_1^{(\varkappa')} V_1 + \mu_2^{(\varkappa')} V_2 + \ldots + \mu_{\frac{\varrho+\alpha}{2}}^{(\varkappa')} V_{\frac{\varrho+\alpha}{2}}, \quad \left(\varkappa' = 1,\ 2 \ldots \frac{\varrho+\alpha}{2}\right). \tag{18}$$

Beteckna perioderna till integralerna af första gruppen med

$$\left.\begin{matrix} P_1^1 & P_2^1 \ldots\ldots & P^1_{\frac{\varrho-\alpha}{2}} \\ P_1'' & P_2'' \ldots\ldots & P''_{\frac{\varrho-\alpha}{2}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_1^{(\varrho-\alpha)} & P_2^{(\varrho-\alpha)} \ldots & P^{(\varrho-\alpha)}_{\frac{\varrho-\alpha}{2}} \end{matrix}\right\} \tag{19}$$

och perioderna för integralerna af andra gruppen med

$$\left.\begin{matrix} Q_1^1 & Q_2^1 \ldots\ldots Q^1_{\frac{\varrho+\alpha}{2}} \\ Q_1'' & Q_2'' \ldots\ldots Q''_{\frac{\varrho+\alpha}{2}} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ Q_1^{(\varrho+\alpha)} & Q_2^{(\varrho+\alpha)} \ldots Q^{(\varrho+\alpha)}_{\frac{\varrho+\alpha}{2}}\,. \end{matrix}\right\} \quad (20)$$

Välj $\lambda_\sigma^{(\varkappa)}$ och $\mu_{\sigma'}^{(\varkappa')}$ så, att

$$\sum_{\sigma=1}^{\frac{\varrho-\alpha}{2}} \lambda_\sigma^{(\varkappa)} P_\sigma^{(\tau)} = 0\,, \qquad \left.\begin{matrix} \left(\varkappa\ = 1,\ 2,\ \ldots \frac{\varrho-\alpha}{2}\right) \\ \left(\tau\ = 1,\ 2,\ \ldots \left(\frac{\varrho-\alpha}{2} - 1\right)\right), \end{matrix}\right\} \quad (21)$$

$$\sum_{\sigma'=1}^{\frac{\varrho+\alpha}{2}} \mu_{\sigma'}^{(\varkappa')} Q_{\sigma'}^{(\tau')} = 0\,, \qquad \left.\begin{matrix} \left(\varkappa' = 1,\ 2,\ \ldots \frac{\varrho+\alpha}{2}\right) \\ \left(\tau' = 1,\ 2,\ \ldots \left(\frac{\varrho+\alpha}{2} - 1\right)\right). \end{matrix}\right\} \quad (22)$$

På detta sätt minskas periodtalet för första gruppens integraler med $\frac{\varrho-\alpha}{2} - 1$, så att det blir $\frac{\varrho+2-\alpha}{2}$, och för andra gruppens integraler blir af samma skäl periodtalet $\frac{\varrho+2+\alpha}{2}$. Dessa tal äro härledda under antagande af att vi hafva att göra med det allmänna fallet. Det låter emellertid tänka sig. att om vissa relationer existera mellan $c_1 c_2 \ldots c_\varrho$, de erhållna talen kunna minskas ännu mera.

De fall, som äro af särskildt intresse, äro när antalet perioder kan bringas ner på två. Detta eger rum om rangen är två (för både U_1 och V_1) eller om den är tre (för U_1 ensam). eljest i allmänhet icke.

Utom dessa hyperelliptiska likheter, som vi hittills studerat, fins det sådana, som äro invarianta för *hela* substitutioner. Sådana äro, såsom jag på annat ställe visat,

$$y^2 = x(x-1)\prod_{\nu=1}^{2\varrho-1}(x-e_\nu), \tag{23}$$

der

$$e_1 + e_{2\varrho-1} = e_2 + e_{2\varrho-2} = \ldots = 2e_\varrho = 1. \tag{23*}$$

En undersökning rörande desamma i allmänhet synes dock utan intresse, och skall jag derför endast upptaga till behandling den likhet, som har rangen två, hvilken, såsom vi skola finna, äfven är invariant för en bruten substitution.

Likheten

$$y^2 = x(x-1)(x-\tfrac{1}{2})(x-c_1)(x-1+c_1) \tag{24}$$

öfvergår genom substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + \frac{1-2c_1}{2}\cdot\xi \\ y &= \frac{(1-2c_1)^{3/2}}{4\sqrt{2}}\eta \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

uti

$$\eta^2 = \xi(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2), \tag{26}$$

der

$$\varkappa = 1 - 2c_1.$$

Men denna likhet är invariant utom för

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\xi' \\ \eta &= \pm i\eta' \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

äfven för substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\varkappa\xi''} \\ \eta &= \pm\frac{\eta''}{\varkappa^{3/2}\xi''^3}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Integralen af första slaget

$$\int\frac{\xi - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}{\eta}\,d\xi \tag{29}$$

är invariant för den senare substitutionen, om öfre tecknet tages uti formeln (28), och likaså är

$$\int \frac{\xi - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}{\eta} d\xi \tag{30}$$

invariant för den senare substitutionen, om undre tecknet tages uti formeln (28).

Betrakta

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}{\eta_1} d\xi_1 + \frac{\xi_2 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}{\eta_2} d\xi_2 \\ dv &= \frac{\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}{\eta_1} d\xi_1 + \frac{\xi_2 + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}}{\eta_2} d\xi_2 . \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Man finner ξ_1 och ξ_2 såsom rötter till

$$\xi^2 - \xi P_1(uv) + P_2(uv) = 0 , \tag{32}$$

der $P_1(uv)$ och $P_2(uv)$ äro funktioner af rationel karakter.

På alldeles samma sätt som i det föregående erhålles, att $P_1(uv)$ och $P_2(uv)$ låta rationelt uttrycka sig genom pu, $p'u$, pv och $p'v$. Af ofvan citerade afhandling af JACOBI är också kändt, att de båda integralerna kunna uttryckas medelst elliptiska integraler.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Sur une extension de la formule de Green.

Par A. EDV. FRANSÉN.

[Communiqué le 10 Mars 1897 par M. FALK.]

1. La formule de GREEN, établie originairement dans le cas de l'espace, c'est-à-dire le cas de trois variables réelles (x, y, z), a son analogue dans le cas d'un nombre quelconque de variables réelles. Je me borne ici au cas le plus simple, le cas du plan, c'est-à-dire le cas de deux variables réelles (x, y). Les modifications à faire dans le cas de trois ou plusieurs variables sont évidentes.

2. Rappelons la formule de GREEN dans le plan. Soient u et v deux fonctions continues de x et y ainsi que leurs dérivées partielles du premier et du second ordre à l'intérieur d'un contour fermé. Supposons de plus que u et v ainsi que leurs dérivées du premier ordre restent continues sur le contour lui-même. Faisons usage des symboles

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds},$$

ds étant un élément d'un contour fermé et n désignant la normale intérieure à l'arc ds. Formons l'intégrale double, étendue à l'aire que limite un contour fermé, de l'expression

$$u\Delta v - v\Delta u$$

et l'intégrale curviligne, prise le long du contour fermé, de l'expression

$$u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Voici donc la formule de GREEN dans le plan

$$\iint (u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy + \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0.$$

3. Cette formule étant très utile, on peut espérer qu'il soit utile aussi d'en chercher une extension immédiate. Je prends l'intégrale double de l'expression

$$(u\Delta v - v\Delta u) f(u, v)$$

et l'intégrale curviligne de l'expression

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) f(u, v),$$

en multipliant les expressions traditionnelles de la formule de GREEN par une fonction continue, qu'on peut choisir à volonté. Afin d'établir la formule de GREEN on se sert de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = u\Delta v - v\Delta u.$$

Je dois donc me servir de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) f(u, v)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) f(u, v)\right] =$$

$$= (u\Delta v - v\Delta u) f(u, v) + R,$$

en posant

$$R = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

La formule généralisée n'est autre chose que

$$\iint [(u\Delta v - v\Delta u) f(u, v) + R]\,dxdy + \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) f(u, v)\,ds = 0.$$

4. Cela posé, choisissons la fonction $f(u, v)$ d'une manière convenable. L'expression R est une forme quadratique et homo-

gène des dérivées de u et v du premier ordre. En effet on peut écrire

$$R = \tfrac{1}{2} A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2} C\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right],$$

où

$$A = -2v\frac{\partial f}{\partial u}, \quad B = u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v}, \quad C = 2u\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Il sera utile dans les applications que l'expression R garde un signe invariable, si u et v sont des fonctions réelles quelconques. Or, soient u et v deux fonctions arbitraires de la même variable, la somme $(x + y)$. Alors on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = h, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = k,$$

en introduisant les deux fonctions arbitraires h et k de la même variable, la somme $(x + y)$. Par suite

$$R = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Pour que cette expression garde un signe invariable, il faut que

$$B^2 - AC \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 4uv\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} \leqq 0$$

ou

$$\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \leqq 0.$$

Le carré ne peut pas être négatif; il doit donc s'annuler. Par suite

$$u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Il sera donc convenable de choisir

$$f(u, v) = f\left(\frac{u}{v}\right).$$

Alors on aura

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{1}{v}f'\left(\frac{u}{v}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right).$$

Par suite

$$A=-2f'\left(\frac{u}{v}\right),\quad B=2\frac{u}{v}f'\left(\frac{u}{v}\right),\quad C=-2\frac{u^2}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right)$$

et

$$R=-\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]f'\left(\frac{u}{v}\right).$$

Introduisons la fonction continue et toujours positive [1])

$$S=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Donc

$$R=-\frac{S}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right),$$

et la formule finale du § 3 se réduit à

$$\iint\left[(u\Delta v-v\Delta u)f\left(\frac{u}{v}\right)-\frac{S}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right)\right]dx\,dy+$$
$$+\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)ds=0.$$

5. Pour que l'expression R garde un signe invariable et qu'elle soit toujours négative, u et v étant des fonctions quelconques, il faut encore que

$$f'\left(\frac{u}{v}\right)>0.$$

Pour que R soit une fonction continue, quand même la fonction v s'annule d'une manière quelconque à l'intérieur du contour fermé, il faut que

$$f'(\pm\infty)=0.$$

---

[1]) On retrouve cette expression dans le mémoire de M. SCHWARZ, publié à l'occasion du jubilé de WEIERSTRASS (Acta Soc. Sc. Fennicæ, 1885), § 20, formule (26).

Il sera donc convenable de choisir

$$f'\left(\frac{u}{v}\right) = ce^{-\frac{u^2}{v^2}},$$

c étant une constante positive (ou nul). En supposant $c = 0$ on retombe sur la formule de GREEN. Donc, si $c > 0$ (et non nul), on peut sans diminuer la généralité choisir $c = 1$, c'est-à-dire

$$f'\left(\frac{u}{v}\right) = e^{-\frac{u^2}{v^2}}.$$

Par suite

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \int_a^{\frac{u}{v}} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

la constante a étant arbitraire.

6. Supposons que la fonction v change de signe le long d'une ligne à l'intérieur du contour fermé. Considérons un point de cette ligne. Si la fonction u ne s'annule pas en ce point, soit par exemple $u > 0$. Alors on aura

$$\lim \frac{u}{v} = +\infty \text{ de l'un côté (où } v > 0)$$

et

$$\lim \frac{u}{v} = -\infty \text{ de l'autre côté (où } v < 0$$

de la courbe $v(x, y) = 0$. Par suite la fonction f du § 5 est finie, mais indéterminée: elle passe brusquement d'une valeur finie à une autre, la différence entre la plus grande et la plus petite étant

$$f(+\infty) - f(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

7. Il est essentiel pour l'application de la formule de GREEN qu'on ait

$$u\Delta v - v\Delta u = 0$$

à l'intérieur du domaine considéré. Ordinairement les fonctions u et v satisfont à l'équation de LAPLACE, c'est-à-dire on a

$$\Delta u = 0\,, \quad \Delta v = 0\,.$$

Mais il est possible d'étendre l'application à un cas plus général. Il suffit de faire (dans le cas du plan)

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta v}{v} = p(x\,,\, y)\,,$$

en désignant par $p(x, y)$ une fonction quelconque, continue ou discontinue, finie ou infinie. Je suppose donc que u et v soient deux solutions continues quelconques de l'equation

$$\Delta u = p(x\,,\, y)\, u\,,$$

cette équation qui, en supposant la fonction $p(x, y)$ continue, a été l'objet des recherches de M. SCHWARZ (en 1885, mém. cité) et de M. PICARD (en 1889, Acta math. 12) dans deux mémoires d'une importance fondamentale. Alors on aura

$$(u\Delta v - v\Delta u) f\left(\frac{u}{v}\right) = 0\,,$$

puisque (§ 5, 6)

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \text{une fonction toujours finie.}$$

Par suite la formule finale du § 4 se réduit à

$$\iint \frac{S}{v^2} f'\left(\frac{u}{v}\right) dxdy = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) f\left(\frac{u}{v}\right) ds\,.$$

8. Examinons le premier membre de cette formule pour $v = 0$. Il peut s'écrire (§ 4, 5)

$$\iint \left[\left(\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] e^{-\frac{u^2}{v^2}} dxdy\,.$$

Le quotient

$$\lambda = \frac{u}{v}$$

peut être fini, infini ou complètement indéterminé. Pour $v \gtrless 0$ le quotient λ est fini, et l'intégrale double qui précède est finie aussi. Pour $v = 0$ et $u \gtrless 0$ le quotient λ est infini, mais l'intégrale double s'annule, puisque

$$\lim e^{-\lambda^2} = 0 , \quad \lim \lambda e^{-\lambda^2} = 0 , \quad \lim \lambda^2 e^{-\lambda^2} = 0 ,$$

quand

$$\lim \lambda = \pm \infty .$$

Pour $v = 0$ et $u = 0$ simultanément, le quotient λ est complètement indéterminé (fini ou infini); par suite l'intégrale double est indéterminée aussi, mais finie. Donc il faut supposer que l'aire où et u et v s'annulent simultanément, tende vers zéro. Cette condition est remplie, si par exemple l'aire totale où v s'annule, tend vers zéro. Il suffira donc que v s'annule seulement dans un nombre fini de points isolés et le long de courbes dont la longueur totale soit finie.

9. Je suppose donc qu'on peut partager l'aire initiale par un nombre fini de courbes dans un nombre fini d'aires partielles de telle manière que toutes les courbes $v(x, y) = 0$ appartiennent aux contours et que nulle courbe $v(x, y) = 0$ n'existe à l'intérieur des domaines partiels. Alors on peut évidemment appliquer la formule finale du § 7 aux domaines partiels successivement et former une somme finie d'intégrales doubles et curvilignes, étendues aux aires partielles et à leurs contours fermés. Or, la somme de toutes les intégrales doubles, étendues aux aires partielles, égale à l'intégrale de l'aire initiale. Par suite

$$\iint \frac{S}{v^2} f'\left(\frac{u}{v}\right) dx\, dy =$$

$$= \int^{1)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) f\left(\frac{u}{v}\right) ds + \sum \int^{2)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) f\left(\frac{u}{v}\right) ds ,$$

en prenant l'intégrale curviligne 1) le long du contour initial et les intégrales curvilignes 2) le long de toutes les autres lignes, formant les contours partiels, à l'intérieur du contour initial, de l'un et de l'autre sens (en avant et en arrière). Donc les in-

tégrales 2) s'annulent pour toutes les parties de ces lignes où l'expression

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)$$

est continue, et il reste à intégrer le long des parties de ces lignes où la fonction v change de signe et $u \gtrless 0$. Envisageons une telle partie. On aura évidemment

$$\frac{\partial v}{\partial n}>0 \text{ de l'un côté (où } v>0)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial n}<0 \text{ de l'autre côté (où } v<0)$$

de la courbe $v(x, y)=0$, la valeur numérique de cette dérivée symbolique étant la même de l'un côté et de l'autre. Nous allons évaluer d'abord une intégrale 2) de l'un côté où

$$u\frac{\partial v}{\partial n}>0 \text{ et } \frac{u}{v}>0;$$

c'est le côté où $v>0$, si $u>0$, et le côté où $v<0$, si $u<0$. On aura ici

$$\lim\frac{u}{v}=+\infty \text{ pour } v=0;$$

par suite

$$\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)ds=f(+\infty)\int u\frac{\partial v}{\partial n}ds.$$

En second lieu, prenons la même intégrale curviligne de l'autre côté; c'est le côté où $v<0$, si $u>0$, et le côté où $v>0$, si $u<0$. Dans l'un et l'autre cas on aura ici

$$u\frac{\partial v}{\partial n}<0, \quad \frac{u}{v}<0$$

et

$$\lim\frac{u}{v}=-\infty \text{ pour } v=0;$$

par suite

$$\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)ds=-f(-\infty)\int\left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right|ds,$$

en posant

$$u\frac{\partial v}{\partial n}=-\left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right|.$$

Les quantités

$$u,\quad\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|,\quad ds$$

sont les mêmes dans les deux intégrales. Donc, en formant la somme de ces intégrales:

$$\int^{(2)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)ds=[f(+\infty)-f(-\infty)]\int\left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right|ds=$$
$$=\sqrt{\pi}\int\left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right|ds,$$

(cfr § 6). Par suite

$$\iint\frac{S}{v^2}f'\left(\frac{u}{v}\right)dxdy=\int^{1)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)ds+\sqrt{\pi}\sum_{v=0}\int\left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right|ds,$$

en prenant l'intégrale curviligne 1) le long du contour initial et les autres intégrales curvilignes le long des lignes (à l'intérieur du contour initial) où v change de signe et $u \gtrless 0$. En considérant ds comme un élément essentiellement positif, il n'y a pas lieu de parler du sens dans lequel en effectue l'intégration.[1])

10. Supposons de plus que la fonction u s'annule sur tout le contour initial, la fonction v s'annulant ou non. Si v s'annule sur une partie du contour initial, on aura pour cette partie

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)=0,$$

puisque (§ 5, 6)

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\text{une fonction toujours finie.}$$

[1]) PICARD, Traité d'Analyse II, p. 11.

Pour les autres parties, où v ne s'annule pas, on aura (§ 5)

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\int_a^0 e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \text{une constante arbitraire.}$$

J'annule cette constante en mettant $a=0$. Donc on aura

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)=0$$

tout le long du contour initial. Par suite

$$\int^{1)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)f\left(\frac{u}{v}\right)ds=0\,,$$

et la formule finale du § 9 se réduit à

$$\iint\frac{S}{v^2}e^{-\frac{u^2}{v^2}}\,dx\,dy=\sqrt{\pi}\sum_{v=0}\int\left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right|ds\,,$$

ces dernières intégrales curvilignes étant prises le long des lignes où v change de signe et $u\gtreqless 0$ à l'intérieur du contour initial.

11. Considérons le cas particulier où la fonction v ne change pas de signe à l'intérieur du contour. Alors on aura (§ 10)

$$\iint\frac{S}{v^2}e^{-\frac{u^2}{v^2}}\,dx\,dy=0\,,$$

par suite

$$S=0$$

dans toute la région que limite le contour fermé. On aura donc simultanément (§ 4)

$$u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}=0\,,\quad u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0\,;$$

par suite

$$u=cv\,,$$

c étant une constante arbitraire. Or on a supposé que $u=0$ sur tout le contour. Donc il faut admettre, ou que $c=0$, ou que $v=0$ sur tout le contour.

12. D'abord, si la fonction v prend sur le contour une succession de valeurs autre que zéro, il faut que $c = 0$. Or $u = cv$; par suite $u = 0$ dans tout le domaine. Donc il n'existe pas d'intégrale continue de l'équation

$$\Delta u = p(x, y) u$$

s'annulant sur tout le contour, autre que zéro. Cela posé, supposons qu'il existe deux intégrales continues, prenant sur le contour la même succession de valeurs, s'annulant ou non à l'intérieur. Envisageons leur différence. Elle est une intégrale continue, s'annulant sur tout le contour. Donc elle ne signifie que zéro. Par suite les deux intégrales considérées auparavant sont identiques. Donc *toutes les intégrales continues sont déterminées à l'intérieur du contour par leurs valeurs sur le contour, s'il existe une intégrale continue, ne s'annulant pas sur tout le contour et ne changeant pas de signe à l'intérieur du contour.* Si $p(x, y)$ est une fonction analytique des variables réelles x et y, la propositiou est une conséquence évidente des recherches de M. PICARD. [1]) J'ai donc étendu le résultat au cas où $p(x, y)$ désigne un quotient du type

$$\frac{\Delta\varphi(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction continue ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre (§ 2, 7).

13. En second lieu, si la fonction v s'annule sur tout le contour, la constante c (de la relation $u = cv$) reste arbitraire. Donc, *s'il existe une intégrale continue v, s'annulant sur tout le contour, mais ne changeant pas de signe à l'intérieur du contour, alors l'expression cv est l'intégrale continue la plus générale, s'annulant sur tout le contour.* Cela posé, soit v une intégrale continue quelconque, prenant une certaine succession de valeurs le long du contour, et soit u l'intégrale continue la plus générale, prenant la même succession de valeurs le long du contour. Envisageons la différence $u - v$. Elle est une intégrale conti-

[1]) Voir Traité d'Analyse II, p. 31, § 24.

nue, s'annulant sur tout le contour. Or, supposons qu'il existe aussi une intégrale continue w, s'annulant sur tout le contour, mais ne changeant pas de signe à l'intérieur du contour. Alors l'expression cw est l'intégrale continue la plus générale, s'annulant sur tout le contour. Par suite la différence $u - v$ sera contenue dans l'expression cw, c étant une constante arbitraire. Donc

$$u - v = cw$$

et

$$u = v + cw.$$

C'est l'intégrale continue la plus générale, prenant la même succession de valeurs que v.

14. Nous allons éclaircir les résultats obtenus par un exemple,[1]) le plus simple possible. Envisageons l'équation

$$\Delta u + a^2 u = 0,$$

où a représente une constante positive. L'intégrale continue

$$w = \sin \frac{ax}{\sqrt{2}} \sin \frac{ay}{\sqrt{2}}$$

est positive à l'intérieur du carré ayant pour côtés

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}, \quad y = 0, \quad y = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}.$$

Imaginons un contour quelconque à l'intérieur de ce carré. L'intégrale w est positive à l'intérieur du contour considéré et positive ou nulle sur le contour. Donc (§ 12) toutes les intégrales continues de l'équation

$$\Delta u + a^2 u = 0$$

sont déterminées au moyen de leurs valeurs sur un contour quelconque, situé à l'intérieur du dit carré. Or, sur les côtés de ce carré, l'intégrale w s'annule en chaque point. Par suite (§ 13) l'expression cw est l'intégrale continue la plus générale, s'annulant tout le long des quatre côtés du carré. Supposons maintenant que notre équation ait une intégrale continue v,

[1]) Cfr Picard, Traité d'Analyse II, p. 26, § 20.

prenant sur les côtés du carré une certaine succession de valeurs s. Alors il existe une infinité d'intégrales continue du type

$$u = v + cw\,,$$

prenant la même succession de valeurs s, et (§ 13) *cette expression u est l'intégrale continue la plus générale, prenant la succession de valeurs s sur les côtés du carré dit.* Donc en particulier, l'expression

$$\sin ax + c \sin \frac{ax}{\sqrt{2}} \sin \frac{ay}{\sqrt{2}}$$

est l'intégrale continue la plus générale, prenant la succession de valeurs

$$s = 0\,, \quad s = \sin \pi\sqrt{2}\,, \quad s = \sin ax\,, \quad s = \sin ax\,,$$

pour

$$x = 0\,, \quad x = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}\,, \qquad y = 0\,, \qquad y = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}\,.$$

15. Si la fonction v change de signe à l'intérieur du contour initial, on peut encore appliquer les théorèmes précédents (§ 12, 13), en considérant des régions plus petites à l'intérieur du contour initial, telles que la fonction u s'annule tout le long de leurs contours (cfr § 10) et que la fonction v ne change pas de signe à l'intérieur des contours (cfr § 11). Pourtant il peut arriver qu'il n'existe pas de telles régions et qu'on peut trouver un nombre ($n > 1$) d'intégrales continues w_1, w_2, ... w_n, essentiellement différentes, qui s'annulent sur tout le contour initial et changent de signe le long de courbes différentes à l'intérieur. Ainsi l'intégrale la plus générale, prenant sur le contour initial la même succession de valeurs qu'une certaine intégrale v, peut avoir la forme

$$u = v + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_n w_n\,,$$

contenant n constantes arbitraires c_1, c_2, ... c_n.

16. Remarquons enfin qu'au lieu de choisir (§ 5)

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \int_a^{\frac{u}{v}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda\,,$$

on pourrait aussi prendre la fonction plus générale

$$f\left(\frac{u}{v}\right)=\int_a^{\frac{u}{v}} e^{G(\lambda)}\,d\lambda,$$

où $G(\lambda)$ désigne une fonction *entière* (de la variable réelle λ), telle que

$$G(\pm\infty)=-\infty.$$

Alors on aurait une formule finale

$$\iint \frac{S}{v^2} e^{G\left(\frac{u}{v}\right)}\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{G(\lambda)}\,d\lambda \sum_{v=0}\int \left|u\frac{\partial v}{\partial n}\right| ds,$$

de laquelle on obtient pour

$$G(\lambda)=-\lambda^2$$

la formule finale du § 10 comme un cas particulier. En supposant que la fonction v ne change pas de signe à l'intérieur du contour (§ 11), la formule générale n'est pas plus efficace que la particulière.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola.

ote sur les fonctions et les nombres algébriques.

Par HAKON GRÖNWALL.

[Communiquée le 10 Mars 1897 par G. MITTAG-LEFFLER.]

1.

Soit

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

élément de la fonction algébrique définie par l'équation

$$F(x, y) = 0 .$$

t élément de la fonction satisfait à une équation différen-e linéaire à coefficients rationnels, appartenant à la classe uations de M. FUCHS, et dont l'ordre est au plus égal au ıbre n des branches de la fonction. Au point $x = 0$, ladite ation donne, pour les coefficients a_ν, une formule linéaire et ogène de récursion, qui ne contient qu'un nombre fini k de co-ients a_ν consécutifs. Soit cette formule

$$a_{\nu+k} = c_0(\nu) \cdot a_\nu + c_1(\nu) \cdot a_{\nu+1} + \ldots + c_{k-1}(\nu) \, a_{\nu+k-1} ;$$

montre que si $k-1$ coefficients consécutifs sont égaux à , tous les coefficients suivants s'annulent aussi, de sorte que réduit à un polynome. Ce cas exclu, on voit que la série exposants dans le développement d'une fonction algébrique peut présenter des lacunes d'étendue infinie, ou bien:

Si, dans le développement

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{n_\nu} \qquad (a_\nu \neq 0,\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{3}$$

il existe des exposants n_ν tels que la différence $n_{\nu+1} - n_\nu$ tend vers l'infini avec ν, y est une fonction transcendante de x.

2.

A côté de cette proposition, on peut mettre un théorème analogue concernant les nombres algébriques. On appelle nombre transcendant tout nombre qui ne satisfait à aucune équation algébrique à coefficients entiers; leur existence a été démontrée par LIOUVILLE et par M. CANTOR [1]) par des méthodes qui ne donnent cependant pas de moyen pratique pour en construire des exemples. Dans les éléments, on démontre que si a est un entier plus grand que l'unité, tout nombre réel et positif peut être développé en une série

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^\nu} \qquad 0 \leqq a_\nu < a,$$

qui s'écrit, en mettant en évidence les termes où l'entier a_ν est différent de zéro

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}} \qquad 0 < a_\nu < a. \tag{4}$$

Cela posé, le théorème en question s'énonce ainsi:

Si, dans le développement

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}} \qquad 0 < a_\nu < a, \tag{5}$$

il y a une infinité d'indices ν pour lesquels

$$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} > \varphi(\nu) \tag{6}$$

---

[1]) Voir CANTOR, Acta math. T. 2 (1883) pp. 305—310 et 353—356.

la fonction $\varphi(\nu)$ tend vers l'infini avec ν, x est un nombre scendant.

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme sui-. [1]) Si, dans le développement

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{a^{k_\nu}} \qquad a > 1\,,\; 0 < \alpha_\nu < a$$

a une infinité d'indices ν pour lesquels la différence

$$k_{\nu+1} - k_\nu$$

vers l'infini avec ν, y ne peut être un nombre rationnel.

Car supposons $y = \frac{g}{h}$, g et h étant des entiers, et multi-ns les deux membres de l'égalité précédente par $h \cdot a^{k_\nu}$, ν t indéterminé. Il vient

$$G = H + \frac{h}{a^{k_{\nu+1} - k_\nu}} \cdot \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{\alpha_\mu}{a^{k_\mu - k_{\nu+1}}} = H + \eta\,,$$

G et H sont des entiers. La série entrant dans l'expression η est évidemment plus grande que zéro et plus petite que la ression géométrique $(a-1) \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{a^\mu} = a$; déterminons main-nt ν de sorte que $a^{k_{\nu+1} - k_\nu} > h \cdot a$, il s'ensuit $0 < \eta < 1$ équation $G = H + \eta$ devient absurde.

Supposons maintenant que le nombre (5) satisfasse à une tion algébrique à coefficients entiers, soit

$$c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m\,.$$

y portant l'expression de x, il vient

$$c_0 = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{a^\mu} \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \sum_{n_{\nu_1} + \ldots + n_{\nu_\lambda} = \mu} a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\lambda}\,.$$

---

[1]) Nous empruntons ce lemme, avec sa démonstration, d'une note de STERN: »Ueber Irrationalität von Reihen.» Crelle's Journal, Band 95 (1883) pag. 197.

Décomposons la série du second membre en deux parties, l'une obtenue en donnant aux $\nu_1, \ldots, \nu_\lambda$ des valeurs $\leqq \nu$ (lequel nombre est encore indéterminé), et l'autre provenant des termes où au moins un des $\nu_1, \ldots, \nu_\lambda$ est $\geqq \nu + 1$. La première partie comprend, quand on la réduit à la forme (4), un nombre fini de puissances de $\frac{1}{a}$, dont la plus élevée est $\frac{1}{a^{m \cdot n_\nu}}$.

Envisageons la seconde partie que nous appellons S_2. Comme le nombre des solutions de l'équation

$$n_{\nu_1} + \ldots + n_{\nu_\lambda} = \mu$$

dont au moins une est $\geqq n_{\nu+1}$, est égal à

$$\lambda \sum_{i=n_{\nu+1}}^{\mu} (\mu + 1 - i)(\mu - i) \ldots (\mu + 1 - i - \lambda + 1) <$$

$$< \lambda(\mu + 1 - n_{\nu+1})^{\lambda+1} \leqq m(\mu + 1 - n_{\nu+1})^{m+1};$$

et comme, de plus, $a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\lambda} < a^\lambda \leqq a^m$, on aura [1])

$$0 < S_2 < \sum_{\mu=n_{\nu+1}}^{\infty} \frac{1}{a^\mu} \sum_{\lambda=1}^{m} |c_\lambda| \, m(\mu + 1 - n_{\nu+1})^{m+1} a^m =$$

$$= \frac{1}{a^{n_{\nu+1}}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A \cdot (\mu + 1)^{m+1}}{a^\mu} = S_2' \left(A = m a^m \sum_\lambda |c_\lambda|\right).$$

Or la série entrant dans S_2' a une valeur finie que nous écrivons dans le système de numération dont la base est a: $\alpha_k a^k + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{a} + \frac{\alpha_{-2}}{a^2} + \ldots$; S_2' sera donc égale à $\frac{\alpha_k}{a^{n_{\nu+1} - k}} +$

---

[1]) Si $S_2 = 0$, l'équation (8) admet la racine rationnelle $x' = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{a_\mu}{a^{n_\mu}}$ et devient par suite réductible dans le domaine de rationnalité des nombres entiers. x satisfait donc à une équation de dégré $m - 1$ à coefficients entiers, et en répétant ce raisonnement on parvient à une équation de la forme (8) qui n'a plus de racine rationnelle et pour laquelle, par suite, $S_2 > 0$ pour toute valeur de ν.

$\frac{\alpha_{k-1}}{{}_{\nu+1}-k-1} + \ldots$ A fortiori, le développement de S_2 com-

ce par un terme dont le dégré en $\frac{1}{a}$ est au moins $n_{\nu+1} - k$.

c le développement du membre droit de (8) contient, pour ssez grand, une lacune entre les deux puissances de $\frac{1}{a}$ aux sants $m \cdot n_\nu$ et $n_{\nu+1} - k$; en vertu de (6) on peut choisir ν rand que la différence $n_{\nu+1} - k - m \cdot n_\nu$ dépasse toute limite iée quelque grande qu'elle soit.

L'application du lemme montre alors que l'égalité (8) est ssible, le membre gauche étant un nombre entier et le bre droit un nombre irrationel.[1] C. Q. F. D.

Ici se soulève naturellement une question curieuse et diffi- peut-on, pour les nombres e et π dont la transcendance constatée, trouver des entiers a tels que les développements le e et π jouissent de la propriété (6)?

[1] Ce théorème est plus restreint que l'analogue pour les fonctions algébriques, n ce qu'il exige non seulement $n_{\nu+1} - n_\nu > \psi(\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} \psi(\nu) = \infty$, mais ussi $\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} > \varphi(\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = \infty$. Or cette restriction est essentielle pour otre mode de démonstration; supposons en effet $x = \sum_\nu \frac{1}{a^{\nu^2}}$ pour lequel im $\psi(\nu) = \infty$, $\lim \varphi(\nu) = 1$. Comme tout nombre entier est la somme de uatre carrés, le développement de x^4 ne contient aucune lacune et le emme cesse d'être appliquable.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 4.

Onsdagen den 14 April.

INNEHÅLL:

Föredrogos inspektionsberättelser för de under Akademien lydande särskilda institutioner.

På tillstyrkan af komiterade antogos till offentliggörande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar och uppsatser:

dels i Akademiens Handlingar: »De hydrografiska förändringarne inom Nordsjöns och Östersjöns område under tiden 1893—1897», af Professor O. PETTERSSON och Ingeniör G. EKMAN;

dels i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Blastophysa polymorpha», af professor F. R. KJELLMAN; 2:o) Ueber den Oesophagus der Nematoden besonders bei Strongylus armatus och Dachmius duodenalis», af Docenten L. A. JÄGERSKIÖLD; 3:o) »Zur Kenntniss der Gattungen Glycera und Goniada», af Kandidaten J. ARWIDSSON;

och dels i Öfversigten: 1:o) »Triazolföreningar framställda af aldehyder och dicyanfenylhydrazin. II», af Kandidaten E. L. RINMAN; 2:o) »Die Polygalaceen der ersten Regnellschen Expedition. Pflanzengeographische und biologische Notizen», af Amanuensen G. O. MALME.

Herr RETZIUS öfverlemnade på författarens, Doktor HJ. STOLPES vägnar ett af denne från trycket utgifvet arbete: »Studier i Amerikansk ornamentik, ett bidrag till ornamentikens biologi».

Genom anställdt val kallades Professorn i fysiologi vid universitetet i Turin ANGELO MOSSO till utländsk ledamot af Akademien.

Genom val utsågs Professor CHR. LOVÉN till Præses under det ingående akademiska året, hvarefter afgående Præses Lektor TÖRNEBOHM nedlade præsidium med ett föredrag om den moderna petrografiens uppkomst och utveckling.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Ecklesiastik Departementet.*
Aarsberetning vedkommende Norges Fiskerier. 1895: H. 1—3. Kra. 8:o.
Tabeller vedkommende Norges Fiskerier. Aar 1894—95. Kra. 8:o.
HJORT, J., Hydrografisk-biologiske Studier over Norske Fiskerier. Kra 1895. 8:o.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd 18 (1896): H. 1—4; 19 (1896): 1—2. 8:o.
Nyt Magasin for Naturvidenskaberne. Bd 34 (1895): H. 3—4; 35 (1893—94): 1—3. 8:o.
Det k. norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1894. Trondhjem. 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 5 häften. 4:o.
— *Geologiska byrån*
Carte géologique internationale de l'Europe. Livr. 2. Berlin 1896. Fol.
— *K. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademien.*
Antiqvarisk tidskrift. D. 13: H. 2—3. 1896. 8:o.
Månadsblad. Årg. 21 (1892). 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. 1896: N:r 11—12; 1897: 1—3.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. Årg. 17 (1897): H. 1. 8:o.

(Forts. å sid. 224.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897. N:o 4.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

246. Triazolföreningar, framstälda af aldehyder och dicyanfenylhydrazin. II.

Af E. L. RINMAN.

[Meddeladt den 14 April 1897 genom P. T. CLEVE.]

2.

Inverkan af anisaldehyd på dicyanfenylhydrazin.

Om beräknade mängder dicyanfenylhydrazin, löst i alkohol och anisaldehyd få inverka på hvarandra, inträder efter tillsats af några droppar klorvätesyra genast reaktion. Dervid bildas efter omskakning en gul kristallinisk fällning. Vid denna aldehyd blir kondensationen fullständig redan vid rumstemperatur, men kan naturligen påskyndas genom uppvärmning. Den från moderluten befriade gula fällningen renas sedan genom några omkristallisationer ur benzol. Föreningen smälter vid 167°,5 C. Den löses lätt i varm isätticka, svårare i amylalkohol; mycket svårlöslig i alkohol och eter. Deremot löses föreningen ganska lätt i varm alkohol, försatt med några droppar klorvätesyra.

Analys:

0,2289 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,5803 gr. CO_2 och 0,1100 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	69,1	69,0
H_{14}	5,0	5,3
N_4	20,1	—
O	5,8	—
	100,0	

Analysen visar sålunda, det kondensation egt rum under utträde af 1 mol. vatten. Föreningen har således sammansättningen:

$$CH_3O\langle C_6H_4 \rangle CH=N-C(CN)=N-NH-C_6H_5$$

Denna förening kan liksom liknande oxideras till ett triazolderivat:

(1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-(3) cyantriazol.

$$CH_3O\langle C_6H_4 \rangle C \begin{matrix} N-C-CN \\ \| \quad \| \\ C \quad N \\ N-C_6H_5 \end{matrix}$$

Oxidationen utfördes på tvänne sätt. Antingen löste jag kondensationsprodukten i amylalkohol, försatt med litet alkohol och lät lapislösning inverka på densamma, eller ock löste jag kondensationsprodukten i alkohol, försatt med några droppar klorvätesyra samt utförde oxidationen med järnklorid eller silfvernitrat. Den senare metoden är att föredraga, då den ger godt utbyte, och man vid den förstnämnda måste använda stora mängder amylalkohol på grund af föreningens svårlöslighet. Triazolföreningen omkristalliserades ur alkohol och kristalliserar derur i färglösa, bladlika eller prismatiska kristaller. Den löses lätt i isätticka och benzol, svårare i eter. Smältpunkt 124°,5 C.

Analys:

0,2069 gr. vid 80° torkad substans gaf vid förbränning i
et rör 0,5330 gr. CO_2 och 0,0804 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	69,6	70,2
H_{12}	4,3	4,3
N_4	20,3	—
O	5,8	—
	100,0	

(1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-(3) triazolkarbonsyra.

$C_{13}H_{12}O.C_2N_3.C.O_2.H.$

Karbonsyran erhålles, om man kokar cyantriazolen i alkohol-
ng med stark kalilut. Då ammoniak ej längre bortgår, och
des all nitril är öfverförd till karbonsyra, utspädes lösningen
vatten och kokas tills alkoholen afdunstat. Utfäld ur den
ket utspädda vattenlösningen af kalisaltet medelst klorväte-
, är karbonsyran en halfgenomskinlig, mycket voluminös
ing. Denna löses dock vid uppvärmning till kokning, och
afsvalning utkristalliserar karbonsyran i hvita nålar. Syran
des genom omkristallisation först ur vatten och sedan ur
hol. Kristallerna ur alkohollösning äro små och hvita samt
ej kristallalkohol. Karbonsyran smälter under gasutveck-
vid 170° C.

Analys:

0,1973 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i
et rör 0,7751 gr. CO_2 och 0,0800 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	65,1	65,7
H_{13}	4,4	4,5
N_3	14,2	—
O_3	16,3	—
	100,0	

Karbonsyran löses lätt i isätticka, svårare i benzol samt är svårlöslig i eter och olöslig i gasolja. Den är något löslig i kallt vatten, lättare i varmt vatten.

Löses karbonsyran i varmt vatten, utfaller den vid tillsats af några droppar klorvätesyra. Detta förhållande är egendomligt, alldenstund karbonsyran är lättlöslig i 20 % klorvätesyra. Dervid erhålles ett hydroklorat. Bäst erhålles dock detta salt, om karbonsyran löses i varm konc. klorvätesyra. Efter afsvalning utkristalliserar det i hvita, glänsande nålar, förenade till bollar Hydrokloratet måste i och för analys torkas flere dagar, innan konstant vigt erhålles. Det lufttorkade saltet håller sedan 1½ mol. HCl.

Analys:

0,3741 gr. lufttorkad substans afgaf vid upphettning till 100° 0,0598 gr. HCl.

	Beräknadt:	Funnet:
1½.HCl	15,65 %	15,98 %

Karbonsyran är mycket beständig gent emot oxidationsmedel. Så angripes den ej af permanganat äfven i starkt alkalisk lösning, hvilket synes af följande försök: 3 gr. karbonsyra, försatt med 20 kbcm. 50 % kalilut, uppvärmdes med koncentrerad permanganatlösning under 3 dagar. Efter affärgning med alkohol och frånfiltrering af Mno_2, utfäldes syran med klorvätesyra. Vid vägning af den så erhållna produkten, hvilken utgjordes af oangripen syra, visade den sig utgöra i det närmaste 3 gr.

Ammoniumsaltet af karbonsyran är lättlösligt i vatten; *kalium-* och *natriumsalterna* ej fullt så lättlösliga.

Silfversaltet $C_{13}H_{12}O.C_2N_3.CO_2.Ag$ erhålles såsom en hvit amorf fällning vid tillsats af silfvernitrat till en neutral lösning af ammoniumsaltet. Saltet, hvilket svärtas af solljus, håller torkadt exsicator intet vatten.

Analys:

0,2846 gr.vid 80° torkad substans gaf vid förbränning 0,0765 gr. Ag.

	Beräknadt:	Funnet:
Ag	26,9 %	26,9 %

Kopparsaltet: $(C_{13}H_{12}O.C_2N_3.CO_2)_2$ Cu bildas vid tillsats af kopparsulfat till en lösning af ammoniumsaltet. Det erhålles dervid såsom mikroskopiska, blågröna, stafformiga kristaller utan kristallvatten.

Analys:

0,2573 gr. vid 120° torkad substans gaf vid förbränning 0,0307 gr. CuO.

	Beräknadt:	Funnet:
Cu	9,7 %	9,5 %

Etrar af (1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-(3) triazolkarbonsyra.

Etrarna erhållas, om man i lindrig värme behandlar det vid 80° torkade silfversaltet med alkyljodider.

Etyletern $C_{13}H_{12}O.C_2N_3.CO_2.C_2H_5$ bildar, på detta sätt framstäld, efter afdunstning af jodetyl, en hvit hård massa. Renad genom några omkristallisationer ur alkohol, erhålles föreningen i hvita, glänsande, små nålar, hvilka smälta vid 148° C.

Analys:

0,1566 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,3856 gr. CO_2 och 0,0718 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{18}	66,9	67,2
H_{17}	5,2	5,1
N_3	13,0	—
O_3	14,9	—
	100,0	

Metyletern $C_{13}H_{12}O.C_2N_3.CO_2.CH_3$ bildar, framstäld på liknande sätt, en ej fullt så lätt stelnande massa. Efter några omkristallisationer ur alkohol, bildar den rena föreningen hvita nålar, hvilka smälta vid 144° C.

Analys:

0,1931 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 21,5 kbcm. qväfgas vid 13°,2 C. och 765 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{17}	66,0	—
H_{15}	4,9	—
N_3	13,6	13,4
O_3	15,5	—
	100,0	

Amid af (1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-(3) triazolkarbonsyra.

$C_{13}H_{12}O.C_2N_3.CO.NH_2$

Föreningen erhålles på följande sätt. Etyl-(ell. Metyl-) etern löses i stort öfverskott af alkohol, och till denna lösning sättes koncentrerad amoniak. Blandningen får sedan stå 24 timmar i sluten kolf, hvarefter den uppvärmes på vattenbad ungefär 2 tim., under iakttagande af att amoniak då och då tillsättes. Efter alkoholens afdunstning erhålles en brun olja, hvilken, sedan den stelnat, renas genom omkristallisering ur alkohol. Föreningen smälter vid 169° C.

Analys:

0,1758 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 30,0 kbcm. qväfgas vid 15°,6 C. och 713 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	63,3	—
H_{14}	4,8	—
N_4	19,0	19,3
O_2	10,9	—
	100,0	

[T]iamid af (1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-(3) triazolkarbonsyra.

$$C_{13}H_{12}O.C_2N_3CS.NH_2.$$

Tiamiden erhålles, om man i en varm, amonialkalisk, alko[hol]-[l]ösning af cyantriazolen inleder svafvelväte till full mättning. [Den] med svafvelväte mättade lösningen hålles sedan ungefär 24 [timmar] i slutet kärl, hvarvid tiamiden erhålles i form af gula, blad[formiga] kristaller. Renad genom omkristallisation ur alkohol smäl[ter] föreningen vid 189° C.

Analys:

0,2596 gr. vid 130° torkad substans gaf vid förbränning [med] blykromat i slutet rör 0,5910 gr. CO_2 och 0,1209 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	61,9	62,1
H_{14}	4,5	5,2
N_4	18,1	—
O	5,2	—
S	10,3	—
	100,0	

(1)Fenyl-(5) parametoxifenyl-triazenyl-(3) amidoxim.

$$C_{13}H_{12}O.C_2N_3.C\begin{matrix}\diagup NH_2\\ \diagdown N.OH\end{matrix}$$

Amidoximen erhålles om cyantriazolen, löst i öfverkott af [alko]hol, försättes med hydroxylamin (af klorhydratet + soda) löst [i m]insta mängd vatten. Lösningen uppvärmes på vattenbad [tills] alkoholen afdunstat. Den hvita återstoden tvättas med [vat]ten och omkristalliseras några gånger ur alkohol. Föreningen, [som] är något löslig i kokande vatten, smälter under gasutveck[lin]g vid 206°—207° C.

Analys:

0,2280 gr. vid 120° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 43,6 kbcm. qväfgas vid 15°,6 C. och 756 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	62,1	—
H_{15}	4,9	—
N_5	22,6	22,4
O_2	10,4	—
	100,0	

Acetyl-(1) fenyl-(5) parametoxifenyl-triazenyl-(8) amidoxim.

$$C_{13}H_{12}O.C_2N_3.C\begin{matrix}\diagup NH_2 \\ \diagdown NO.OC.CH_3\end{matrix}$$

Vid 100° torkad amidoxim skakas ungefär 15 min. med acetanhydrid under uppvärmning till högst 40° C. Genom utspädning af den så erhållna lösningen med vatten, erhålles en hvit olja, hvilken stelnar. Den fasta återstoden omkristalliseras ur alkohol, hvarvid acetylderivatet erhålles i form af hvita nålar, hvilka under gasutveckling smälta vid 146° C.

Analys:

0,1218 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,2788 gr. CO_2 och 0,0540 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{18}	61,6	62,4
H_{17}	4,8	4,9
N_5	39,9	—
O_3	13,7	—
	100,0	

(1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-triazenyl-(3) azoximmetenyl.

$$C_{13}H_{12}O.C_2N_3.C\!\!\begin{array}{c}\diagup N \diagdown\!\!\!\diagdown \\ \\ \diagdown\!\!\!\diagdown N.O \diagup\end{array}\!\!C.CH_3$$

Föreningen erhålles, om man kokar vid 100° torkad amid-
n med acetanhydrid under kylrör ungefär 15 min. Efter
alning utspädes lösningen med vatten. Dervid erhålles en
mskinlig olja, hvilken efter 12 timmar vid omskakning ger
hvitt hartz. Detta renas genom omkristallisation ur al-
l. Azoximmetenylen bildar, kristalliserad ur alkohol, små,
a kristaller, ur alkohol + vatten i lika mängder hvita, fina
r, förenade till bollar. Smältpunkten är 166° C.

Analys:

0,1393 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i
t rör 0,3316 gr. CO_2 och 0,0544 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{18}	64,9	64,9
H_{15}	4,5	4,3
N_5	21,0	—
O_2	9,6	—
	100,0	

Benzoylderivatet af amidoximen lyckades jag ej isolera, der-
t erhöll jag:

(1) Fenyl-(5) parametoxifenyl-triazenyl-(3) azoximbenzenyl.

$$C_{13}H_{12}O.C_2N_3.C\!\!\begin{array}{c}\diagup N \diagdown\!\!\!\diagdown \\ \\ \diagdown\!\!\!\diagdown N.O \diagup\end{array}\!\!C.C_6H_5$$

eningen erhålles, om man under 5 min. kokar vid 100 gr. tor-
amidoxim med benzoylklorid. Efter afsvalning och neutrali-
ng med utspädd kalilut, erhålles en hvit olja, som efter några

timmar stelnar till en hvit massa. Torkad mellan papper oc omkristalliserad ur benzol, bildar azoximbenzenylen små, hvit kristaller, samlade till flockar. Smältpunkt 230° C.

Analys:

0,1892 gr. vid 130° torkad substans gaf vid förbrännin med kopparoxid 28,4 kbcm. qväfgas vid 16°,4 C. och 755 mn barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet·
C_{23}	69,9	—
H_{17}	4,3	—
N_5	17,7	17,5
O_2	8,1	—
	100,0	

3.

Inverkan af furfurol på dicyanfenylhydrazin.

Denna aldehyd inverkar på dicyanfenylhydrazin under fö medling af klorvätesyra först efter uppvärmning. Fösöket u fördes sålunda. Beräknade mängder dicyanfenylhydrazin, löst alkohol och furfurol blandades, och till denna lösning sattes klo vätesyra droppvis och i något större mängd än vid de förut b skrifna kondensationerna. Lösningen uppvärmdes på vattenba under flitig omrörning. Dervid bildades så småningom en rödg fällning, och efter ungefär 15 min. var kondensationen fullstän dig. Efter afsvalning frånskildes fällningen, torkades och löst för omkristallisering i öfverskott af alkohol. Då denna lösnin långsamt fick afdunsta, afskildes dels stora gula prismer, de röda nålar. Kristallerna torkades och skildes mekaniskt frå hvarandra, hvilket lyckades bra, då de gula kristallerna vo större än de röda. Efter några sådana omkristallisationer, e höll jag de gula kristallerna rena. De smälta vid 146°,5 C.

De röda kristallerna af olika fraktioner löste jag sedan för omkristallisation i benzol och erhöll dem efter några kristallisationer rena. Äfven de smälta vid 146°,5 C.

Både de gula och de röda kristallerna visade vid analys samma qvantitativa sammansättning, och vid oxidation gåfvo de samma triazolförening. Äfven vid de förut undersökta aldehyderna har jag märkt en inblandning af mörkare färgade kristaller i kondensationsprodukterna, isynnerhet vid kuminaldehyden, der förhållandet också anmärkts, men ej i så stora mängder, att jag erhållit tillräckligt till analys.

Analys:

1) 0,2050 gr. vid 100° torkad röd substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,4988 gr. CO_2 och 0,0774 gr. H_2O.

2) 0,2183 gr. vid 100° torkad gul substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,5226 gr. CO_2 och 0,0845 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet: 1.	2.
C_{13}	65,6	66,3	65,3
H_{10}	4,2	4,2	4,3
N_4	23,5	—	—
O	6,7	—	—
	100,0		

Analysen visar sålunda att kondensation egt rum under utträde af 1 mol. vatten. Kondensationsproduktens formel blir derför

```
HC—CH  N—C—CN
||  ||  ||  ||
HC   C—CH  N
  \/        |
  O        HN—C6H5
```

Denna förening kan sedan såsom liknande oxideras till:

(1) Fenyl-(5) furfuran-(3) cyantriazol.

```
HC—CH  N—C—N
||  ||  ||  ||
HC   C—C  N
  \/    \/
  O      N—C6H5
```

Oxidationen utföres bäst med järnklorid sämre med silfvernitrat på grund deraf, att i senare fallet oxidationen lätt går djupare än önskligt är. Vid oxidationen förfares så, att till en alkohollösning af kondensationsprodukten, hvilken hålles uppvärmd på vattenbad, småningom sättes något mera än beräknad mängd järnklorid, löst i alkohol. Lösningen afdunstas sedan på vattenbad under iakttagande af, att den bortgående alkoholen ersättes med vatten. Då nästan all alkohol afdunstat, låter man lösningen kallna, hvarvid triazolföreningen erhålles i form af en färglös kristallmassa, hvilken väl tvättas med vatten. Föreningen, som på detta sätt erhålles ganska ren, omkristalliseras ur alkohol, hvarur den bildar vackra, prismatiska kristaller. Smältpunkten 111° C.

Analys:

0,1789 gr. vid 70° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,4355 gr. CO_2 och 0,0550 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{13}	66,1	66,4
H_8	3,4	3,4
N_4	23,7	—
O	6,8	—
	100,0	

(1) Fenyl-(5) furfuran-(3) triazolkarbonsyra.

$$.C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2H.$$

Karbonsyran erhålles genom saponifiering af nitrilen i alkoholisk lösning med stark kalilut. Försättes efter saponifieringens slut den från alkohol afdunstade, utspädda vattenlösningen af kalisaltet med klorvätesyra i varm lösning, erhålles ej någon fällning. Vid lösningens afsvalning utkristalliserar likväl syran i hvita nålar. Kristallerna renas bäst genom omkristallisering ur alkohol. Dervid erhållas de såsom färglösa prismer, hvilka hålla

ıol. kristallalkohol. Kristallalkoholen bortgår dock, om kri-
lerna få ligga några dagar i öppet kärl. De ur vattenlös-
;en erhållna kristallerna hålla 1 mol. vatten, hvilket bortgår
största delen i exsicator och fullständigt vid 130° C. Kar-
syran smälter under gasutveckling vid 180° C.

Analys:

0,2237 gr. lufttorkad substans gaf vid förbränning i öppet
0,4925 gr. CO_2 och 0,0999 gr. H_2O.

	Beräknadt:		Funnet:
$C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2.H + C_2H_6O$			
	C_{15}	59,8	60,0
	H_{15}	5,0	5,0
	N_3	13,9	—
	O_4	21,3	—
		100,0	

Vattenbestämning:

0,4626 gr. lufttorkad substans afgaf vid 130° C. 0,0304 gr.
. Beräknadt för $C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2H + H_2O$ är 6,6 % H_2O;
ysen gaf 6,6 % H_2O.

Karbonsyran är lättlöslig i isätticka och alkohol, mycket svår-
g i eter och benzol samt olöslig i gasolja. Den löses något
llt vatten, men vid tillsats af några droppar klorvätesyra faller
åter ut. Deremot löses syran lätt i vanlig utspädd klorvätesyra.
ıa karbonsyra visar sålunda samma egendomliga förhållande,
den under 2. beskrifna. Äfven här bildas ett hydroklorat,
ket likväl bäst erhålles genom att lösa karbonsyran i konc.
vätesyra. Hydrokloratet erhålles dervid i form af små, hvit-
sande blad, hvilka dock vid förvaring i öppet kärl afgifva
sin klorvätehalt. Vid försök till analys, fann jag, att 0,3698
invägd substans på 4 dagar förlorade i vigt 0,1854 gr. Vid
gningen kunde jag likväl känna lukten af klorvätesyra.

I alkalisk lösning oxideras syran lätt af permanganatlösning
den af BLADIN framstälda fenyltriazoldikarbonsyran. Oxi-
ɔnen går glatt, om karbonsyran löses i 9 % natronlut.

Alkalisalterna af karbonsyran äro i vatten lätt lösliga.

Silfversaltet $C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2Ag$ erhålles såsom en hvit amorf fällning af en neutral lösning af amoniumsaltet och silfvernitrat. Saltet är något lösligt i vatten och sönderdelas af solljuset.

Analys:

0,3000 gr. i exsicator torkad substans gaf vid förbränning 0,0916 gr. Ag.

	Beräknadt:	Funnet:
Ag	29,8 %	30,5

Kopparsaltet $(C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2)_2Cu + \frac{1}{2}H_2O$ erhålles lätt af amoniumsaltet och kopparsulfat. Saltet bildar små, gröna nålar, hvilka hålla $\frac{1}{2}$ mol. kristallvatten.

Analys:

0,2315 gr. vid 130° torkad substans gaf vid förbränning 0,0315 gr. CuO.

	Beräknadt:	Funnet:
för $(C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2)_2Cu$		
Cu	11,1 %	10,9 %

Vattenbestämning:

0,3573 gr. lufttorkad substans afgaf vid 130° 0,0057 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
för $(C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2)_2Cu + \frac{1}{2}H_2O$		
$\frac{1}{2}H_2O$	1,6 %	1,6 %

Etrar af (1) Fenyl-(5) furfuran-(3) triazolkarbonsyra.

Etrarna kunna erhållas antingen af silfversaltet och alkyljodid eller ock af karbonsyran, genom mättning af densamma i alkohollösning med torkad klorvätegas. Den senare metoden är här att föredraga, då den lemnar godt utbyte, och silfversaltet deremot är svårt att erhålla på grund af dess löslighet och obeständighet mot solljus.

Etyletern $C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2.C_2H_5$ bildar, renad genom om-
stallisation ur alkohol långa, färglösa nålar eller prismer,
lka smälta vid 112° C.

Analys:

0,1471 gr. vid 70° torkad substans gaf vid förbränning i
et rör 0,3444 gr. CO_2 och 0,0611 gr. H_2O

	Beräknadt:	Funnet:
C_{15}	63,6	63,8
H_{13}	4,6	4,6
N_3	14,8	—
O_3	17,0	—
	100,0	

Metyletern $C_{10}H_8O.C_2N_3.CO_2.CH_3$ erhålles efter några om-
stallisationer ren i form af vackra, gulglänsande fjäll, hvilka
ilta vid 162° C.

Analys:

0,1102 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning
d kopparoxid 14,6 kbcm. qväfgas vid 14°,7 C. och 720 mm.
ometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{14}	62,5	—
H_{11}	4,1	—
N_3	15,6	15,8
O_3	17,8	—
	100,0	

Amid af (1) Fenyl-(5) furfuran-(3) triazolkarbonsyra.

$$C_{10}H_8O.C_2N_3.CO.NH_2.$$

Amiden erhålles, om man låter konc. amoniak inverka på
letern, löst i öfverskott af alkohol, under ungefär 24 tim.
slutet kärl. Afdunstas derefter denna lösning långsamt på
tenbad, under iakttagande af att amoniak då och då tillsät-

tes, erhålles amiden slutligen i form af bladlika kristaller. Renad genom omkristallisation ur alkohol, bildar föreningen rektangulära blad med afrundade hörn och väl synliga diagonaler eller ock prismer. Smältpunkten är 199°—200°.

Analys:

0,1928 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 35,8 kbcm. qväfgas vid 15°,1 C. och 759 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{13}	61,4	—
H_{10}	3,9	—
N_4	22,1	22,1
O_2	12,6	—
	100,0	

Tiamid af (1) Fenyl-(5) furfuran-(3) triazolkarbonsyra.

$$C_{10}H_8O.C_2N_3.CS.NH_2.$$

I en amonialkalisk alkohollösning af cyantriazolen inledes svafvelväte till full mättning under lindrig uppvärmning. Den så erhållna lösningen hålles derpå några timmar i slutet kärl, hvarvid tiamiden utkristalliserar i form af gula nålar. Dessa renas genom omkristallisering ur alkohol. Föreningen bildar blekgula nålar, hvilka äro lätt lösliga i isätticka och benzol. Smältpunkt 178° C.

Analys:

0,2240 gr. vid 120° torkad substans gaf vid förbränning med soda och kaliumklorat 0,2039 gr. Ba SO_4.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{13}	57,8	—
H_{10}	3,7	—
N_4	20,7	—
O	5,9	—
S	11,9	12,3
	100,0	

(1) Fenyl-(5) furfuran-(3) triazenyl-amidoxim.

$$C_{10}H_8O.C_2N_3.C\langle^{NH_2}_{N.OH}.$$

Amidoximen erhålles af cyantriazolen, löst i alkohol och be-
nad mängd hydroxylamin (af klorhydratet + soda), löst i minsta
ngd vatten under uppvärmning på vattenbad, tills alkoholen af-
stat. Den hvitgråa återstoden bildar, efter tvättning med
ten och omkristallisering ur alkohol, långa, ljust gulbruna
smer af amidoximen. Smältpunkt 190° C.

Analys:

0,2192 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning
d kopparoxid 47,4 kbcm. qväfgas vid 17° C. och 775 mm.
ometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{13}	58,0	—
H_{11}	4,1	—
N_5	26,0	26,1
O_2	11,9	—
	100,0	

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 206.)

Göteborg. *Högskola.*
Årsskrift. Bd 2 (1896). 8:o.
Lund. *Universitetet.*
Årsskrift. T. 32 (1896): Afd. 1—2. 4:o.
Berlin. *Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1896: 40—53. 8:o.
Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen. Bd 23. Berlin 1896. 8:o.
— *K. Botanischer Garten.*
Notizblatt. N:o 7. 1897. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 15 (1896): N:o 7; 16 (1897): 1—3. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Memoirs. Vol. 12: N:o 2—3. 1896. 4:o.
— *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 27: p. 201—241. 1896. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences.*
Bulletin. (3) T. 33 (1897): N:o 2. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad cientifica Argentina.*
Anales. T. 43 (1897): Entr. 2—3. 8:o.
Cambridge, U. S. *Astronomical observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 30: P. 4; 40: 5. 1896. 4:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 5 (1897): N:o 3—4. 8:o.
Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Abhandlungen. 1896: H. 1. 4:o.
Córdoba. *Academia nacional de ciencias.*
Boletin. T. 15 (1896): Entr. 1. 8:o.
Genova. *Musei di zoologia e anatomia comparata della R. università.*
Bollettino. 1895—96: N:o 28—55. 8:o.
Giessen. *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Bericht. 31. 1896. 8:o.
Haarlem. *Koloniaal Museum.*
Bulletin. 1897: 3. 8:o.
Halifax. *Nova Scotian institute of science.*
Proceedings and transactions. Vol. 9 (1895—96): P. 2. 8:o.
Helsingfors. *Sällskapet för Finlands geografi.*
Fennia. 12—13. 1896. 8:o.
Jekaterinburg. *Société ouralienne d'amateurs des sciences naturelles.*
Bulletin. T. 18: Livr. 1. 1895. 8:o.
Kjöbenhavn. *Kgl. danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. Naturvid.-math. Afd. (6) T. 8: N:o 3. 1896. 4:o.
» Hist. og filos. Afd. (6) T. 4: N:o 3. 1896. 4:o.
Oversigt over Forhandlinger. 1896: N:o 6; 1897: 1. 8:o.

(Forts. å sid. 273.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 4.
Stockholm.

e Polygalaceen der ersten Regnellschen Expedition. Pflanzengeographische und biologische Notizen

Von GUST. O. A:N MALME.

[Meddeladt den 14 April 1897 genom V. B. WITTROCK.]

Auf meinen ersten Exkursionen in die Umgebungen von rto Alegre, der Hauptstadt des brasilianischen Staates Rio ande do Sul, fand ich ein paar *Polygala*-Species — *P. adenoylla* ST HIL., *P. Duarteana* ST HIL. und *P. Wittrockiana* IOD. — die von den wenigen Arten dieser Gattung, die mir her bekannt waren, durch ihren Habitus sehr beträchtlich abichen. Dieser zufällige Fund gab mir die Veranlassung, der nannten und den damit verwandten Gattungen auf meiner eijährigen Reise in Brasilien und Paraguay meine besondere ıfmerksamkeit zu widmen und von ihnen ein möglichst reichltiges Material — nicht nur getrocknetes sondern auch Spiris-Material — zusammenzubringen.

Während meiner Abwesenheit von Europa war der zweite il der Monographia Polygalacearum von Prof. Dr. R. CHODAT schienen.[1]) Um sichere Bestimmungen der von mir gesamelten Arten der erwähnten Familie zu erhalten, wandte ich ch, bald nach meiner Heimkehr, an diesen bewährten Monoaphen mit der Bitte, er wolle dieselben zur Bearbeitung über-

) Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Tome XXXI. 2e partie. No 2. Genève 1898.

nehmen, und ich erhielt sogleich eine günstige Antwort. Die Resultate der Bearbeitung veröffentlichte Prof. CHODAT im Bulletin de l'Herbier Boissier, Tome III, N:o 10 und Tome IV, N:o 4. Da jedoch in diesen Schriften einige Arten ausgelassen worden sind, und meine Tagebuchsnotizen ausserdem noch einige Bemerkungen über die Verbreitung und die biologischen Verhältnisse der erwähnten Pflanzen enthalten, die vielleicht einen Wert haben können, erlaube ich mir die Sammlung nochmals in der Kürze zu besprechen.

Wie von allen übrigen Pflanzen der ersten Regnellschen Expedition, werden auch von den Polygalaceen die vollständigsten und besten Exemplare im Regnellschen Herbar des Reichsmuseums zu Stockholm aufbewahrt, wo sie den Forschern stets zu Verfügung stehen. Dasselbe Herbar enthält auch eine nicht geringe Anzahl hierhergehöriger Pflanzen aus den Staaten Minas Geraes und São Paulo, besonders aus der Umgegend von Caldas, wo bekanntlich Dr. REGNELL mehr als fünfzig Jahre lang wohnte und auch sein botanischer Gehülfe, Dr. HJ. MOSÉN, einige Zeit lang thätig war.

Aus dem Staate **Rio Grande do Sul** finden sich schon längst in den europäischen Herbarien recht viele Polygalaceen. Von einigen wird in der Flora brasiliensis und in der Monographie von CHODAT ausdrücklich hervorgehoben, dass sie in Rio Grande do Sul gesammelt sind. Von anderen wird angegeben, dass sie in Uruguay, Banda oriental und Brasilia meridionalis vorkommen; und von diesen dürfte man in vielen Fällen annehmen können, dass sie grade aus Rio Grande do Sul stammen, besonders wenn SELLOW und ST HILAIRE als Sammler angegeben sind, da diese sich längere Zeit — SELLOW sogar jahrelang — im diesem Staate aufgehalten haben. »Brasilia meridionalis» ist jedoch in der botanischen Litteratur ein sehr unbestimmter Begriff; es werden bisweilen Pflanzen, die sogar aus dem Staate Bahia stammen, als südbrasilianisch bezeichnet.

Die Sammlungen der ersten Regnellschen Expedition ent[hiel]ten folgende Polygalaceen aus Rio Grande do Sul:

Polygala adenophylla St Hil.
P. brasiliensis L.
P. campestris Gardn.
P. cyparissias St Hil.
P. Duarteana St Hil.
P. extraaxillaris Chod.
P. juncoides Chod.
P. lancifolia St Hil.
P. linoides Poir.
P. longicaulis H. B. K.
P. molluginifolia St Hil.
P. paludosa St Hil. var. *angustocarpa* Chod.
P. pulchella St Hil.
P. timoutoides Chod.
P. Wittrockiana Chod.
Monnina Tristaniana St Hil.

Mit Ausnahme von *P. extraaxillaris* Chod. sind die oben [er]wähnten Polygalae sämmtlich zu der Sektion *Orthopolygala* [Ch]od. zu zählen. Diese Art, die zu der *Hebeclada* Chod. ge[hö]rt, und der südlichste Ausläufer dieser in der brasilianischen [Ho]chebene durch mehrere Arten, z. B. durch *P. hebeclada* DC. [un]d *P. hirsuta* St Hil., vertretenen Sektion ist, wurde vor eini[ge]n Jahren aus Paraguay beschrieben, wo sie an zwei verschie[de]nen Plätzen von Balansa angetroffen worden ist. In Rio [Gr]ande do Sul fand ich sie teils bei Porto Alegre, auf den [H]ügeln zwischen Menino Deus und Belem Velho, teils in der [Nä]he von Cachoeira; an beiden Plätzen kam sie recht spärlich [vo]r. Die Blütezeit dieser Art tritt über einen Monat später ein [al]s die der anderen camposbewohnenden, mehrjährigen Polygala[ce]en dieser Gegend.

Unter den *Orthopolygalæ* sind die perennen *Linoideae* — [Ic]h habe vier Arten dieser Serie gesammelt: *P. brasiliensis* L., [P.] *linoides* Poir., *P. pulchella* St Hil. und *P. campestris* Gardn. —

hauptsächlich in Südbrasilien und Uruguay heimisch. Eine Ausnahme hat bisjetzt, abgesehen von anderen in Bezug auf die Verbreitung wenig bekannten Arten, die letztgenannte gebildet, da sie nur im Staate Rio de Janeiro angetroffen worden war. Ich fand sie jedoch, obgleich sehr spärlich, bei der Eisenbahn zwischen Porto Alegre und Canôas. Die drei übrigen kamen an mehreren Stellen in der Nähe von Porto Alegre vor; besonders häufig war *P. linoides* POIR. auf den Hügeln bei Parthenon. Die weiteste Verbreitung der hierhergehörigen Arten hat *P. brasiliensis* L., die gewöhnlich etwas feuchte, grasige Lokalitäten bewohnt; im Regnellschen Herbar finden sich Exemplare derselben auch aus Minas Geraes (Caldas).

Was Südamerika betrifft gehören die mehrjährigen *Galioideae* ebenfalls zu den Südstaaten Brasiliens und Paraguay. Meine Sammlung enthält drei riograndische Arten dieser Serie: *P. adenophylla* ST HIL., *P. molluginifolia* ST HIL. und *P. Wittrockiana* CHOD. Die letztgenannte, die der Wissenschaft neu ist, kam recht häufig, mit *P. adenophylla* ST HIL und *P. Duarteana* ST HIL. gesellig, auf den Hügeln bei Menino Deus und an der Pulverfabrik bei Porto Alegre vor. *P. adenophylla* ST HIL. ist ohne Zweifel eine der häufigsten *Polygalae* in Rio Grande; ich beobachtete dieselbe an mehreren Stellen sowohl in der Nähe von Porto Alegre als auch bei Cachoeira. Sie bewohnt fast immer trockene Plätze. *P. molluginifolia* ST HIL. bevorzugt dagegen feuchte, mit kurzem Gras bewachsene Lokalitäten und verhält sich auch in Bezug auf die geographische Verbreitung wie *P. brasiliensis* L.; im Regnellschen Herbar liegen Exemplare aus Minas Geraes (Caldas), und in Paraguay fand ich sie in der Colonia Risso in der Nähe vom Rio Apa, dem Grenzflüsschen zwischen Brasilien und Paraguay.

In Bezug auf Vorkommen und geographische Verbreitung schliesst sich die hemipterocarpe *P. Duarteana* ST HIL. der *P. adenophylla* ST HIL. eng an; ich habe dieselbe nur in den Umgebungen von Porto Alegre beobachtet, wo sie besonders auf den Hügeln bei Menino Deus recht häufig wuchs.

Die Blütezeit der jetzt erwähnten perennen *Linoideae* und *ioideae* (nebst *P. Duarteana* ST HIL.) fällt in den Monaten tember und Oktober und ist unter gewöhnlichen Umständen t kurz. Man findet zwar einzelne Individuen, die viel später h im Januar oder im Februar) blühen, die Verspätung ist · in den meisten Fällen nachweisbar dadurch hervorgerufen esen, dass die Pflanzen vom Vieh abgefressen, vom Feuer ver- ;t oder auf irgend eine andere Weise beschädigt worden .

Die hauptsächlich der brasilianischen Hochebene eigentüm- e Serie *Nudicaules* ist in Rio Grande do Sul einzig und in durch *P. juncoides* CHOD. vertreten, die im Februar 1893 den Campos bei Cachoeira gefunden wurde. Trotz emsigen hens konnte ich nur wenige Individuen finden. Nach der An- e der Monographie von CHODAT zu urteilen, sind alle ru- örmige *Polygalae* sehr selten; und ein sehr spärliches Auf- en ist unter den Campos-Pflanzen Brasiliens, zu denen die ihnten ohne Zweifel zu zählen sind, keine Seltenheit.

Die übrigen apterocarpen *Orthopolygalae* (*P. timoutoides* D., *P. longicaulis* H. B. K. und *P. paludosa* ST HIL.), die in Rio Grande do Sul fand, sind einjährige und haben eine t weite geographische Verbreitung, was im allgemeinen mit so beschaffenen Species dieser Gattung der Fall ist. Keine jedoch vorher so weit südlich gefunden worden. *P. timoutoides* D. ist vor einigen Jahren (im J. 1889) aus Paraguay be- ieben worden. In Rio Grande fand ich sie nur in der deut- n Kolonie Santo Angelo, am Fusse der Serra, in der Nähe von hoeria, wo sie in sandigem, etwas feuchtem Grascampo wuchs. der Umgegend von Cuyabá in Matto Grosso beobachtete ich elbe an mehreren Stellen, und sie ist als eine der gewöhn- sten *Polygalae* der letztgenannten Gegend anzusehen. *P. icaulis* H. B. K., die nach CHODAT »von Paraguay bis iko» verbreitet ist, fand ich ebenfalls in Santo Angelo; sie noch an mehreren Stellen in der Umgegend von Cachoeira und wenn ich mich nicht irre, sah ich sie auch auf Cima

da Serra zwischen Silveira Martins und Cruz Alta. Zu blühen beginnt sie im Januar oder im Februar und dies dauert Monate lang. In Rio Grande wächst sie am häufigsten in der schmalen, mit niedrigem, zartem Grase bewachsenen Zone,[1]) die die hier häufigen baumlosen Sümpfe der Campos umgeben. Dergleichen Plätze bewohnt auch *P. paludosa* ST HIL., die bisher von Paraguay bis Texas bekannt war. Schon im November und Dezember fand ich sie an mehreren Stellen in der Nähe des südlichen Teiles der Lagoa dos Patos (z. B. bei São José d'el Norte, Rio Grande und Pelotas). Ferner sah ich sie bei Porto Alegre; im Inneren des Staates beobachtete ich sie nur in Santo Angelo. In Matto Grosso ist sie noch nicht gefunden worden, und nach den bis jetzt bekannten Fundorten zu urteilen, bewohnt sie hauptsächlich die Küstengegenden.

Was endlich die pterocarpen Subsektionen anbetrifft, sind nur zwei hierhergehörige Arten in Rio Grande do Sul angetroffen worden. Die eine, *P. lancifolia* ST HIL. — ein Sträuchlein oder ein Halbstrauch, der bisher aus Minas Geraes, São Paulo und Rio de Janeiro bekannt war — wächst im Gegensatz zu den schon erwähnten *Polygalae* an schattigen Stellen. Ich fand sie nur in der deutschen Kolonie Hamburgerberg, an einem Wege im lichten Urwalde. Ihre Blütezeit, die wahrscheinlich lange andauert, beginnt schon im Oktober. Die zweite, *P. cyparissias* ST HIL., ist eine psammophile Pflanze, die an die unmittelbare Nähe des Meeres gebunden zu sein scheint. Als Verbreitungsbezirk derselben war bisher nur Bahia — Santa Catharina bekannt. (Aus São Paulo liegt sie im Regnellschen Herbar vor, MOSÉN N:o 2779.) Ich fand sie in den Umgebungen der Stadt Rio Grande, teils beim Seebade Estação balnear, teils auf der eigentümlichen Ilha dos Marinheiros, wo sie am Fusse der Flugsandwehen wuchs, die das Innere dieser Insel umgeben. Ihre Blütezeit beginnt schon im Oktober und November.

---

[1]) Vergl. WARMING, Lagoa Santa (D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidensk. og math. Afd. VI. 3.) pag. 344.

Wie aus dem obigen hervorgeht, habe ich nur einen einzi-
Repräsentanten der Gattung *Monnina* und zwar die süd-
ilianische *M. Tristaniana* St Hil. aus Rio Grande mitge-
ht. Die Art kam recht häufig in baumlosen, mit Halbgrä-
und Sträuchern bewachsenen Sümpfen in der Nähe von
o Alegre (z. B. zwischen Menino Deus und Belem Velho)
in Novo Hamburgo vor. Ihre Blütezeit beginnt schon im
ber (oder September) und dauert wenigstens bis in den De-
er hinein. Ob sie einjährig oder mehrjährig ist, kann ich
dem mitgebrachten Material nicht sicher entscheiden; so
ergiebt sich jedoch daraus, dass sie wenigstens bisweilen
n im ersten Jahre Blüten hervorbringen kann. Bei der Stadt
Grande, z. B. auf der Ilha dos Marinheiros, sah ich noch
Monnina, die der jetzt erwähnten recht ähnlich aber mit
äleren Blättern versehen war und wahrscheinlich zu einer
ren Art gehörte. Leider habe ich keine Belegexemplare
ebracht. Sie wuchs an trocknen oder etwas feuchten Plät-
im Sande und war ohne Zweifel mehrjährig.

In **Paraguay** hielt ich mich im Jahre 1893 während der
ate Juli—Oktober auf. Eine ungewöhnlich starke Dürre
e die Entwickelung der krautartigen Pflanzen, besonders die
einjährigen, beeinträchtigt und verspätet, und zudem hatte
Gegend, in der ich die letzte Zeit arbeitete, nur wenige den
galaceen günstige Lokalitäten. Meine Ausbeute hierherge-
ger Pflanzen war deshalb eine sehr geringe; ich fand nur
Species: *P. molluginifolia* St Hil., *P. pulchella* St Hil.
P. villa rica Chod., die schon früher aus diesem an Po-
laceen recht reichen Gebiete bekannt waren.[1]) Ich will nur
Aufmerksamkeit auf den Fund von *P. villa rica* Chod. in
Colonia Risso an der brasilianischen Grenze lenken, da
e Art noch nie in Brasilien angetroffen worden ist.

R. Chodat, Polygalacées (M. Micheli, Contributions à la flore du Paraguay.
lémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Tome
. N° 8. Genève 1889.).

Viel unvollständiger, als es mit Rio Grande do Sul und Paraguay der Fall ist, war bisjetzt die Kenntnis von der Polygalaceen-Flora in **Matto Grosso.** Soweit ich in der einschlägigen Litteratur habe finden können, waren im Jahre 1895 nur fünf *Polygalae* als in Matto Grosso einheimisch angegeben. Eine, *P. celosioides* MART., hatte schon WEDDELL gesammelt; die vier übrigen wurden erst durch The phanerogamic botany of the Matto Grosso expedition, 1891—92, by SPENCER LE MARCHANT MOORE[1]) aus diesem Staate bekannt. Drei mehrjährige Species, *P. angulata* DC., *P. hirsuta* ST HIL. und *P. hebeclada* DC., hatte Dr. MOORE selbst gefunden. Eine einjährige bisher unbestimmte lag im Herbarium des Kew Garden und wurde von Dr. MOORE unter dem Namen *P. hygrophiloides* als neu beschrieben; nach CHODAT ist sie aber mit *P. timoutoides* CHOD. identisch.

Die Sammlungen der ersten Regnellschen Expedition enthalten siebzehn Polygalaceae aus Matto Grosso:

Polygala angustifolia KUNTH.
P. celosioides MART.
P. galioides POIR.
P. gracilis H. B. K.
P. hebeclada DC.
P. herbiola ST HIL.
P. Lindmaniana CHOD.
P. longicaulis H. B. K.
P. Malmeana CHOD.
P. Regnelli CHOD.
P. subtilis H. B. K.
P. tenuis DC.
P. timoutoides CHOD.
P. timoutou AUBL.
P. violacea VAHL.
Monnina Malmeana CHOD.
Bredemeyera floribunda WILLD.

---

[1]) The Transactions of The Linnean Society of London. 2:nd Serie. Vol. IV. Part. 3. London 1895.

Während Dr. MOORE nur mehrjährige Arten fand, ist etwa
lälfte der von mir gesammelten einjährig. Diese Thatsache
hne Zweifel dadurch zu erklären, dass wir Matto Grosso,
nders die Plätze, wo Polygalaceen hauptsächlich zu finden
in verschiedenen Jahreszeiten besuchten. Dr. MOORE kam
Matto Grosso im August und kehrte schon in den letzten
n des Februars nach Buenos Aires zurück; ich begann meine
it in diesem Staate Ende November und reiste im August
Die Serra da Chapada, wo er die zwei von mir später
angetroffenen Arten sammelte, besuchte er im August, wo-
ich die beiden letzten Wochen des Februars und die erste
e des März sowie fast den ganzen Juni daselbst zubrachte.
erliess Matto Grosso, wenigstens die Gegenden, in denen ich
r botanisierte, ehe noch die einjährigen Species zu blühen
angen hatten, und ich kam zu spät, wenigstens nach Santa
da Chapada, um die Mehrzahl der mehrjährigen sammeln
önnen. Die letztgenannten blühen nämlich gewöhnlich bald
dem Eintritte der Regenzeit. Die einjährigen dagegen,
Samen ohne Zweifel erst nach dem Beginn des Regens
en können, haben eine längere Zeit von Nöten, um Blüten
rzubringen.

Während fast alle in Rio Grande do Sul angetroffene *Po-
ze* zu den Orthopolygalen gehören, ist in Matto Grosso die
on *Hebeclada* durch vier oder, wenn ich die von mir nicht
chtete *P. hirsuta* ST. HIL. mitzähle, durch fünf Arten ver-
n, von denen *P. hebeclada* DC. und *P. angustifolia* KUNTH
len häufigsten dieser Gegend gehören. *P. hebeclada* DC.
P. violacea VAHL sind echte Campospflanzen und haben eine
Verbreitung in der brasilianischen Hochebene. Die erstere,
in den »Campos limpos» wächst, fand ich im Dezember an
eren Stellen in der Umgegend von Cuyabá. Die letztere,
ie Cerrados zu bevorzugen scheint, beobachtete ich nur ein-
und zwar im Januar, und zu dieser Zeit war sie fast ganz
gar verblüht. *P. angustifolia* KUNTH ist dagegen einjährig
hat einen recht bedeutend wechselnden Habitus; besonders

schwankt die Breite der Blätter, je nach dem sie an ganz offenen (var. *typica*) oder an schattigeren Plätzen (var. *latifolia* CHOD.) vorkommt. Ich sammelte sie sowohl in der Umgegend von Cuyabá als auch in dem Dorfe Santa Anna da Chapada und in dessen Nähe. Ihre Blütezeit beginnt im Februar und dauert bis in den Mai. Nach ihrem Vorkommen in Matto Grosso zu urteilen ist sie eine synanthropische Pflanze. Ihr Verbreitungscentrum scheint Nordbrasilien zu sein; auf der Hochebene ist sie jedenfalls recht selten, da sie weder in Caldas noch in der Umgegend der Lagoa Santa gefunden ist. Von *P. Lindmaniana* CHOD. sammelte ich nur einige Individuen (im Februar) an einem Reitpfade in einem lichten, sandigen Cerrado. Ob sie einjährig ist, kann ich vorläufig nicht ganz sicher entscheiden; nach einigen der gesammelten Individuen zu urteilen scheint dies jedoch der Fall zu sein.

Mehrjährige *Orthopolygalae* kommen in Matto Grosso recht selten vor, und bis jetzt sind deren nur drei — alle aus der Serie *Ericoideae* — bekannt. Nur die von mir nicht angetroffene Art, die in der Hochebene weit verbreitete *P. angulata* DC., war schon früher beschrieben; die beiden übrigen haben sich als der Wissenschaft neu herausgestellt. Die eine, *P. Regnelli* CHOD., fand ich an einer beschränkten Lokalität in einem trockenen, sandigen oder griesigen Campo in der Nähe von Cuyabá. Sie ist somit, gleich wie die meisten *Ericoideae*, eine echte Campospflanze. Ihre Blütezeit ist der Monat November; schon in den letzten Tagen desselben war sie bereits zum grössten Teil verblüht. Die andere, *P. Malmeana* CHOD., sammelte ich an zwei verschiedenen Plätzen im Kirchspiele Santa Anna da Chapada, teils bei dem Dorfe desselben Namens, teils bei Buriti. An beiden Stellen wuchs sie in der Grenzzone zwischen einem mit Halbgräsern und anderen helophilen Pflanzen bewachsenen Sumpf und dem Cerrado oder am Rande des letzteren, wo der Boden aus Schwemmsand bestand. Im Gegensatz zu den spartiumartig ausgebildeten *Nudicaules*, die im trockenen Campo zu gedeihen scheinen, bevorzugt diese Art etwas feuchte Lokalitäten.

Blütezeit, März—Juni, ist auch eine andere als die der gen mehrjährigen Polygalae von Matto Grosso.

Die einjährigen Orthopolygalae von Matto Grosso wachsen mehr oder weniger feuchten Stellen: an sanft neigenden, offe- vom Regenwasser oft überspülten Abhängen der Hügel — war oft der Fall mit *P. longicaulis* H. B. K. und *P. ga-les* POIR. — in der sandigen, mit spärlichem, niedrigem se bewachsenen Zone, die die oft baumlosen Sümpfe der nposgegend umgiebt — *P. celosioides* MART., *P. galioides* R., *P. gracilis* H. B. K., *P. longicaulis* H. B. K., *P. subti-* H. B. K.[1]) und *P. timoutoides* CHOD. — am Rande der letzte- — *P. celosioides* MART. und *P. gracilis* H. B. K. — oder r in den bebeländigen Sümpfen selbst — *P. tenuis* DC. *P. timoutou* AUBL. Die meisten und zwar besonders *P. gra-* H. B. K., *P. longicaulis* H. B. K. und *P. subtilis* H. B. K. en massenhaft auf. Spärlich kommen nur *P. tenuis* DC. *P. timoutou* AUBL. vor. Die erstere, die übrigens wegen r winzigen, weissen oder gelblichen Blüten der Aufmerksam- leicht entgeht, besonders wenn sie unter recht hohen Halb- ern wächst, beobachtete ich nur an einem Platze, jedoch in t grosser Individuenzahl, im Kirchspiele Santa Anna da Cha- a; die letztere fand ich in derselben Gegend teils in der Nähe Kirchdorfes, teils bei der Fazenda Buriti, an beiden Stellen nur einige wenige Individuen.

Wie ich schon oben hervorgehoben habe, fällt die Blütezeit einjährigen Arten gewöhnlich viel später ein als die der

[1]) Der ganze Habitus dieser *Polygala* (die stark reducierten Blätter, die für die Assimilation keine Bedeutung haben können, die blasse Farbe, die wenig entwickelten assimilierenden Flächen des runden Stammes und das schwache Wurzelsystem) scheint den Schmarotzer oder wenigstens den Halbschmarotzer zu verraten. (Vergl. R. CHODAT, Monographia Polygalacearum I, pag. 103). Zuerst vermutete ich auch, es sei eine parasitische Pflanze etwa wie die Euphrasien. Trotz wiederholten Versuchen gelang es mir aber nie, irgend eine Verbindung mit den Wurzeln anderer Pflanzen zu entdecken oder Haustorien an den Wurzeln der *Polygala* selbst zu finden. Vielleicht ist es ein Saprophyt, gleich den an denselben Plätzen wachsenden Burmannien. In den Wurzeln finden sich jedoch keine Pilzmycelien, die sonst wenigstens oft bei den als chlorophyllhaltige Saprophyten beschriebenen Pflanzen vorhanden sind.

mehrjährigen. Einige, z. B. *P. gracilis* H. B. K. und *P. longicaulis* H. B. K., fangen jedoch schon im Dezember zu blühen an, die Mehrzahl aber beginnt erst im Februar oder im März. In Gegensatz zu dem, was im allgemeinen bei den mehrjährigen, die Campos bewohnenden der Fall zu sein scheint, ist bei den einjährigen Arten die Dauer des Blühens eine lange. Die beiden oben erwähnten *P. longicaulis* H. B. K. und *P. gracilis* H. B. K. fand ich noch im April und im Anfang des Mai, somit am Ende der Regenzeit, massenhaft blühend; und *P. timoutou* AUBL. sammelte ich noch in den letzten Wochen des Juni.

Die Anzahl der von jedem Individuum erzeugten Samen ist bei den einjährigen Polygalae gewöhnlich sehr beträchtlich. Ohne Zweifel hat dies eine grosse Bedeutung für die Erhaltung der Arten, die nur mittelst der Samen überwintern — ich hege kein Bedenken, die dürre Zeit mit dem Namen Winter zu bezeichnen — besonders da in vielen Fällen keine besonderen Vorrichtungen zum Befördern der Samenverbreitung vorliegen und ein grosser Teil der Samen folglich nie zur weiteren Entwicklung gelangen kann. Bei den Arten, deren Samen ein gut entwickeltes Haarkleid besitzen, dürfte dieses jedoch gute Dienste als Schwimmapparat leisten. Bei *P. longicaulis* H. B. K. habe ich beobachtet, dass die Samen, die wegen der ungleichen Länge und der Verteilung der Haare an die Achänen gewisser Compositen erinnern, längere Zeit auf dem Wasser schwimmen bleiben, und man dürfte, ohne Gefahr sich zu irren, annehmen können, dass sie über recht grosse Strecken vom Regenwasser mitgespült werden. Eine solche Art und Weise der Samenverbreitung dürfte wohl nicht eben selten sein. Ich erlaube mir nur ein Beispiel zu erwähnen und zwar *Ipomœa fistulosa* MART., die an den Ufern des Paraguay und in den mit diesem Flusse in Verbindung stehenden Lagunen, sehr häufig ist. Die zottigen Samen dieser Pflanze sieht man oft massenhaft auf dem Wasser umherschwimmen.

Hinsichtlich der geographischen Verbreitung giebt es einen bemerkenswerten Unterschied zwischen den einjährigen und den

jährigen Polygalae von Matto Grosso. Schon früher[1]) habe lie Aufmerksamkeit darauf zu lenken gesucht, dass die Ve-ion des Westens der brasilianischen Hochebene in vielen ichten von derjenigen des Ostens verschieden ist und dass ere in der Nähe von Cuyabá angetroffene Pflanzen sonst tsächlich in Guyana und in den Gebieten an der Münd- des Amazonenstromes vorkommen. Diese Fragen näher rörtern wird mir erst dann möglich sein, wenn die Samm-en der ersten Regnellschen Expedition vollständiger bear-t worden sind. Die letztgenannte Thatsache wird durch ere der einjährigen Polygalae beleuchtet. *P. galioides* . (*P. gracilis* H. B. K.), *P. subtilis* H. B. K. und *P. timou-* AUBL. liefern gute Beispiele einer derartigen Verbreitung, e bisher hauptsächlich nur aus Guyana und aus dem Staate bekannt waren. Dass übrigens die einjährigen Arten ein grösseres Gebiet als die mehrjährigen bewohnen können, ist t daraus erklärlich, dass sie als Samen überwintern und folg- von den Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnissen dieser eszeit unabhängiger sind.

Die mehrjährigen *Polygalae* von Matto Grosso, die schon er beschrieben sind, und deren Verbreitungsgebiet man folg- einigermassen kennt, gehören ohne Ausnahme der Vega-n der Hochebene an.

Aus der Gattung *Bredemeyera* WILLD. fand ich nur eine ies in Matto Grosso, und zwar die weit verbreitete *B. flori-a* WILLD. Hier trat sie immer als ein 3—5 *m* hohes Bäum- mit dünner, glatter Rinde und langen, schlanken, oft über-enden Zweigen auf. Obgleich sie, wie der ganze Habitus igt, keine Campospflanze ist, sondern gewöhnlich den Rand Jrwälder bewohnt, wuchs sie bei Cuyabá jedoch auch in den en Cerrados in der Nähe der Stadt. Diese weichen aber

---

ie Xyridaceen der ersten Regnellschen Expedition (Bih. till K. Sv. Vet.-kad. Handl. Band 22. Afd. III. N:o 2) Seite 5, und Die Burmannien er ersten Regnellschen Expedition (Bih. till K. Sv. Vet.-Akad. Handl. Band 2. Afd. III. N:o 8. Stockholm 1896.) Seite 11.

von den übrigen Cerrados in mehreren Hinsichten ab. Neben den echten Camposbäumchen, z. B. *Salvertia convallariaeodora* St Hil., *Qualea grandiflora* Mart., *Qualea pilosa* Warm. und *Kielmeyera coriacea* Mart., finden sich hier nicht nur mehrere synanthropische Pflanzen, sondern auch verschiedene Schling- und Kletterpflanzen, die sonst nur in den »Capueiras» oder an dem Rande der Wälder zu finden sind. Die Blütezeit der *Bredemeyera floribunda* Willd. sind die Monate Februar und März; reife Früchte fand ich im November.

Die Gattung *Monnina* Ruiz et Pavon ist nach unsrer jetzigen Kenntnis ebenfalls nur durch eine Art, die der Wissenschaft neue *Monnina Malmeana* Chod., in Matto Grosso vertreten. Diese Species, auf welche Prof. Chodat eine neue Untergattung, *Monninopsis*, gegründet hat, wuchs mehrfach an dem Wege zwischen Cuyabá und Santa Anna da Chapada, zwischen der neuen Brücke über den Coxipó Mirim und der Fazenda Arecá. Sie ist eine einjährige Pflanze, die die sandigen, mehr oder weniger feuchten Abhänge der niedrigen Hügel der Campos limpos bevorzugt, aber auch bisweilen recht trockene Plätze bewohnt. Ihre Blütezeit beginnt im Februar oder vielleicht schon im Januar. Am 9. Febr. sammelte ich Individuen, die schon eine kleine Anzahl von jungen Früchten trugen. Am 9. April waren viele Individuen schon verblüht und die Früchte zum Teil schon reif; und als ich im Juli denselben Platz wieder besuchte, war fast nichts mehr von der Pflanze zu sehen. Leider beobachtete ich nicht die Bestäubung, die nach dem Bau der Blüten, wie sie von Chodat beschrieben werden, grosses Interesse bieten muss.

Über das Vorkommen und die Blütezeit der von Oberlehrer Dr. C. Lindman in Matto Grosso gesammelten *Polygala herbiola* St Hil. kann ich leider nichts mitteilen, da ich keine Gelegenheit hatte, dieselbe zu beobachten.

Die Sammlungen der ersten Regnellschen Expedition enthalten noch eine *Polygala*, die weit verbreitete und wohlbekannte *P. paniculata* L., welche ich teils auf Corcovado bei

de Janeiro (18 15/8 92), teils bei Bahia (18 10/10 94) sam-
lte.

Wie aus dem oben gesagten hervorgeht, ist die Kenntnis der geographischen Verbreitung einiger brasilianischen (bezw. entinischen und uruguayischen) Polygalaceen durch die erste gnellsche Expedition in einigen Hinsichten erweitert worden. ch ist, wenigstens was die mehrjährigen Species anbetrifft, die hrheit der Worte CHODAT's; »Le plus grand nombre (des èces) est limité à un petit espace»,[1]) hierdurch nur bestätigt den. Die einjährigen dagegen scheinen oft eine weitere Ver-itung zu haben, als man aus den bisherigen sicheren Angaben Litteratur annehmen sollte.

Meine Notizen über die Blütezeit und deren Dauer habe ich führlich wiedergeben wollen, teils weil die in anderen Teilen brasilianischen Reiches gemachten Beobachtungen, deren htigkeit man keine Ursache zu bezweifeln hat, bisweilen ein eres Resultat gegeben haben,[2]) teils weil meines Erachtens diesbezüglichen Beobachtungen eine recht grosse Bedeutung eine allseitige Kenntnis des Pflanzenlebens (und der kli-ischen Verhältnisse) der besuchten Gegenden haben.

Zum Schlusse füge ich noch einige Notizen über die Blüten-e der von mir gesammelten und einiger anderen Polygalaceen Wenn auch diese Farben besonders bei einigen Species nt grossen Schwankungen unterworfen sind, wird jedoch kein aniker, der die Gelegenheit hat, die Pflanzen an Ort und lle zu studieren, dieselben ganz und gar vernachlässigen, denn nt selten tragen sie gleichwohl dazu bei, die Species oder so-ganze Gruppen zu charakterisieren. Dass ich diese Notizen lateinischer Sprache veröffentliche, hängt teilweise davon ab,

---

R. CHODAT, Sur la distribution et l'origine de l'espèce et des groupes chez les Polygalacées (Archives des sciences physiques et naturelles. 3me pér. Tom. XXV, page 695—714. Genève 1891.). Page 709.

Vergl. G. MALME, Die Burmannien der ersten Regnellschen Expedition, Seite 17.

dass ich während der Reise dergleichen Angaben (mit Hülfe der bekannten Chromotaxia von SACCARDO) häufig eben in dieser Sprache niederschrieb.

P. adenophylla ST HIL. Flores dilute rosei, carina apice ceracea, alis post florationem colore immutatis.

P. angustifolia KUNTH. Fl. rosei v. roseoviolacei, alis alboviridibus, apice purpureoviolaceis, post florationem virescentibus.

P. brasiliensis L. Fl. dilute rosei v. roseoalbi v. albi, alis post florationem albescentibus.

P. campestris GARDN. Fl. (speciminum in Rio Grande do Sul lectorum) albi v. alboviriduli, alis post florationem virescentibus (fl. speciminum Glaziovian. violacei esse videntur, alis post florationem coeruleoviolaceis).

P. celosioides MART. Fl. albi, alis post florationem colore immutatis.

P. comata BENNETT. Fl. secundum specimina Moseniana albi v. dilute sulphurei, alis post florationem colore immutatis.

P. cyparissias ST HIL. Fl. albi, alis post florationem colore immutatis.

P. Duarteana ST HIL. Fl. albi v. alboviriduli, alis post florationem colore immutatis.

P. extraaxillaris CHOD. Fl. carina — apice ceraceo excepto — ceterisque petalis purpureis v. purpureoviolaceis, alis extus roseoviridibus, intus roseoalbidis, apice purpureoviolaceis, post florationem virescentibus.

P. galioides POIR. Fl. albi v. dilute roseoviolacei, alis post florationem colore immutatis.

P. glochidiata H. B. K. Fl. secundum specimina Moseniana albi, alis post florationem immutatis.

P. gracilis H. B. K. Fl. rosei v. roseoviolacei, carina dilutiore, alis post florationem colore immutatis.

P. hebeclada DC. Quoad colorem floris fere = *P. extraaxillaris* CHOD.

P. hirsuta ST HIL. »Flores rosei» (MOSÉN).

P. herbiola St Hil. Fl. secundum specimina Lindmaniana i, alis post florationem immutatis.

P. juncoides Chod. Fl. albi, carina apice ceracea, alis post ationem colore immutatis.

P. lancifolia St Hil. Fl. albi, alis post florationem ± vicentibus.

P. leucantha Bennett. Fl. secundum specimina Anisitsiana i v. subsulphurei, alis post florationem immutatis.

P. Lindmaniana Chod. Quoad colorem floris = *P. hebela* DC.

P. linoides Poir. Fl. albi, alis post florationem vulgo coeeoviolascentibus, raro colore immutatis.

P. longicaulis H. B. K. Fl. rosei v. purpurei.

P. Malmeana Chod. Fl. dilute rosei, alis post florationem lescentibus.

P. molluginifolia St Hil. Fl. roseoviolacei, carina dilute eoviolacea v. ceraceoviolacea, alis post florationem colore imtatis v. saturatius coloratis.

P. paludosa St Hil. Flores speciminum e Santo Angelo ortatorum (N:o 496) albi, alis post florationem immutatis; ceterorum speciminum roseoviolacei, alis post florationem saatius coloratis.

P. paniculata L. Fl. dilute rosei v. albi, alis post floration immutatis.

P. pulchella St Hil. Fl. albi, alis post florationem imtatis.

P. Regnelli Chod. Fl. albi, alis post florationem imtatis.

P. sabulosa Bennett. Fl. secundum specim. Moseniana i (?).

P. subtilis H. B. K. Fl. albi, alis post florationem imtatis.

P. tamariscea Mart. Fl. secundum specim. Regnelliana di- rosei (?).

P. tenuis DC. Fl. albi v. subsulphurei, alis post florationem colore immutatis.

P. timoutoides CHOD. Fl. albi v. alboviriduli.

P. timoutou AUBL. Fl. roseoviolacei, alis post florationem ± virescentibus.

P. villa rica CHOD. Fl. albi v. alboviriduli, alis post florationem immutatis.

P. Weddelliana CHOD. Fl. secundum specimina Regnelliana albi (?).

P. violacea VAHL. Quoad colorem floris fere = *P. extra-axillaris* CHOD.

P. Wittrockiana CHOD. Fl. roseo-lilacini v. fere straminei, alis post florationem immutatis.

Bredemeyera floribunda WILLD. Fl. albi (fragrantes), carina saltem apice ceracea.

Monnina Malmeana CHOD. Fl. sordide diluteque lutei v. fere ochroleuci.

M. Tristaniana ST HIL. Fl. roseo-purpurei v. purpureo-violacei.

Exped. I:mæ Regnellian. Phanerogamæ:

Polygalaceæ,

quas determinavit R. CHODAT.

48		*Polygala pulchella* ST HIL.
56		*P. adenophylla* ST HIL.
56	B	*P. adenophylla* ST HIL.
76		*P. Duarteana* ST HIL.
78		*P. Wittrockiana* CHOD.
79		*P. paniculata* L.
114		*P. linoides* POIR.
114	β	*P. linoides* POIR.
114	B	*P. Duarteana* ST HIL.
128		*P. campestris* GARDN.
138		*P. molluginifolia* ST HIL.
138	β	*P. molluginifolia* ST HIL.
140		*P. brasiliensis* L.
140	β	*P. brasiliensis* L.
140	γ	*P. brasiliensis* L.
156		*Monnina Tristaniana* ST HIL.
156	β	*M. Tristaniana* ST HIL.
182		*Polygala lancifolia* ST HIL.
242		*P. extraaxillaris* CHOD.
242	β	*P. extraaxillaris* CHOD.
242	B	*P. adenophylla* ST HIL.
242	C	*P. adenophylla* ST HIL.
242	D	*P. adenophylla* ST HIL.
332		*P. cyparissias* ST HIL.
338		*P. paludosa* ST HIL., var. *angustocarpa* CHOD.

N:o	338	B	*P. paludosa* St Hil. var. *angustocarpa* Chod.
»	338	C	*P. paludosa* St Hil. var. *angustocarpa* Chod.
»	364	B	*P. cyparissias* St Hil.
»	496		*P. paludosa* St Hil.[1])
»	514		*P. timoutoides* Chod.
»	560		*P. longicaulis* H. B. K.
»	576		*P. juncoides* Chod.
»	618	B	*P. longicaulis* H. B. K.
»	636	B	*P. juncoides* Chod.
»	868	C	*P. pulchella* St Hil.
»	868	D	*P. molluginifolia* St Hil.
»	1082		*P. villa rica* Chod.
»	1082	B	*P. molluginifolia* St Hil.
»	1156		*P. Regnelli* Chod.
»	1228		*P. hebeclada* DC.
»	1228	β	*P. hebeclada* DC.
»	1260		*P. gracilis* H. B. K.
»	1294		*P. longicaulis* H. B. K.
»	1294	β	*P. longicaulis* H. B. K.
»	1294	γ	*P. longicaulis* H. B. K.
»	1330	B	*P. violacea* Vahl.
»	1376		*Monnina Malmeana* Chod.
»	1378		*Polygala angustifolia* Kunth.
»	1378	β	*P. angustifolia* Kunth.
»	1378	γ	*P. angustifolia* Kunth.
»	1400		*Bredemeyera floribunda* Willd.
»	1410		*Polygala augustifolia* Kunth f. ramosa.
»	1412		*P. subtilis* H. B. K.
»	1412	β	*P. subtilis* H. B. K.
»	1414		*P. galioides* Poir.
»	1414	B	*P. angustifolia* Kunth var.
»	1414	C	*P. Lindmaniana* Chod.
»	1438		*P. celosioides* Mart.

---

[1]) Non a Prof. Chodat determinata.

1444 *P. tenuis* DC.
1446 *P. timoutou* AUBL.
1446 B *P. timoutou* AUBL.
1448 *P. Malmeana* CHOD.
1448 * *P. Malmeana* CHOD.
1508 *P. timoutoides* CHOD.
1508 β *P. timoutoides* CHOD.
1512 *P. gracilis* H. B. K.
1534 B *P. angustifolia* KUNTH var. *latifolia* CHOD.
1534 B * *P. angustifolia* KUNTH var. *latifolia* CHOD.
1538 B *P. galioides* POIR.
1624 B *P. celosioides* MART.
3437 *P. galioides* POIR.
3439 *P. longicaulis* H. B. K.
3455 *P. herbiola* ST HIL.
3849 *P. timoutoides* CHOD.[1])
Sine numero (Bahia 18¹⁰/10 94) *P. paniculata* L.

---

[1]) *araguay:* Paraguari, 1894, collectore ignoto, cur. C. LINDMAN. Non a Prof. AT determinata.

Nachtrag.

Wie schon oben erwähnt worden ist, enthält das Regnellsche Herbar noch recht viele *Polygalae* hauptsächlich aus den Staaten Minas Geraes und São Paulo. Die Mehrzahl derselben ist von Prof. R. CHODAT bestimmt worden. Da diese Bestimmungen bisjetzt noch nicht veröffentlicht worden sind, teile ich sie im folgenden mit.

Polygalæ

præsertim in civitatibus Brasiliæ Minas Geraes et São Paulo collectæ, in

Herbario Regnelliano

Musei botanici Stockholmiensis asservatæ, quas p. p. maj. determinavit R. CHODAT.

Polygala angulata DC. *Minas Geraes:* Caldas, LINDBERG 209 (»In campo», Sept. 1854), REGNELL I: 9 (18 $^{15}/_{9}$ 59, 18 $^{22-26}/_{9}$ 64), MOSÉN 408 (»Im campo sicco», 18 $^{25}/_{9}$ 93).

P. brasiliensis L. *Minas Geraes:* loco non indicato, WIDGREN 734.[1])

P. carphoides CHOD. *Minas Geraes:* Caldas, REGNELL III: 157 p. p. (18 $^{12}/_{8}$ 47); loco non indicato, WIDGREN s. n., 735 et 1069.[2])

---

[1]) Hujus loci, nostra sententia, sunt REGNELL II: 10 & II: 10 * et LINDBERG 211 (omnes e vicinitate oppidi Caldas civit. Minas Geraes reportatæ); a celeberr. CHODAT ad *P. pulchellam* ST HIL. relatæ sunt, at nullo modo a WIDGREN 734 differunt.

[2]) Specimina Widgreniana 735 et 1069 a celeberr. CHODAT ad *P. Radlkoferi* CHOD. sunt relata. Quoad folia, flores seminaque omnino congruunt cum speciminibus Regnellianis ceterisque Widgrenianis, abs quibus non nisi statura humiliore (altitudine circiter 15 *cm.*) recedunt. Omnia ad *P. carphoidis* CHOD. var. *sublatifoliam* CHOD. pertinent. Planta perennis esse videtur.

P. comata BENNETT. *Minas Geraes:* Caldas, LINDBERG 209 /1 55), REGNELL I: 11 (1846, 18 16/2 61), MOSÉN 1785 (In- Caldas et Capivary, »in campo sicco aprico, 18 5/5 74); loco indicato, WIDGREN s. n. (1845).[1])

P. cyparissias ST HIL. *Rio de Janeiro*, WIDGREN s. n.; *Paulo:* Santos, MOSÉN 2779 (»In litore arenoso Maris atlan-, 18 25/11 74).

P. gallioides POIR. *São Paulo:* Cajurú ad Lagem, REG-. III: 158 (Febr. 1858).

P. glochidiata H. B. K. *Minas Geraes:* Caldas, MOSÉN 4015 pra rupes apicas humo tenui tectas», 18 1/2 76).

P. gracilis H. B. K. *Minas Geraes:* Caldas, REGNELL 1748 (18 1/4 74).[2])

P. hebeclada DC. *Minas Geraes:* Uberaba, REGNELL II: 13* 9/11 48); Caldas: REGNELL II: 13 (18 /2 47, 18 /11 68 leg. HENSCHEN), MOSÉN 407 (»In campo sicco aprico sparsa», /11 73); loco non indicato, WIDGREN s. n.

P. hirsuta ST HIL. *Minas Geraes:* Caldas, LINDBERG 207 campis» Octob. 1854), MOSÉN 816 (»In campo sicco aprico Capivary», 18 30/11 73).

P. Klotschii CHOD. *São Paulo:* Campinas, MOSÉN 3693 (18 30/7 75).

P. lancifolia ST HIL. *Minas Geraes:* Caldas, REGNELL 2 (18 /6 45), REGNELL I: 8 (»Loco humido umbroso», /11 74), LINDBERG 210 (18 /6 54), MOSEN 406 (»In fruticeto umido», 18 13/10 73), MOSÉN 810 (18 5/12 73); loco non indi- WIDGREN 1073.

P. Laureola ST HIL. *Rio de Janeiro:* REGNELL Rio 8 3), WIDGREN 732 & 733 (1844); *São Paulo:* Santos, Mo- 2778 («In ripa umbrosa amnis Buturoca», 18 30/11 74).

P. leucantha BENNETT. *Paraguay:* in ripa rivi Y-aca, D. ANI- (18 27/1 94).

[1]) REGNELL I: 11, WIDGREN s. n. (1845), verisimiliter lapsu quodam, a celeberr. CHODAT ad *P. cuspidatam* DC. relatæ sunt. At neque habitu neque florum structura ullo modo a MOSÉN 1785 et LINDBERG 209 recedunt; sine dubio ad *P. comatam* BENNETT (CHODAT, Monograph. II, pag. 162) referendæ sunt.

[2]) Non a celeberr. CHODAT determinata.

P. longicaulis H. B. K. *Minas Geraes:* Uberaba, REGNELL I: 155 p. p. (18 $^{15}/_{11}$ 48); *São Paulo:* prope Cajurú, REGNELL I: 155 p. p. (Febr. 1858).

P. mollugînifolia ST HIL. *Minas Geraes:* Caldas: WIDGREN 1071, REGNELL III: 159 (18 $^{15}/_{1}$ 57, 18 $^{18}/_{11}$ 64), MOSÉN 811 (»In campo sicco aprico», 18 $^{5}/_{12}$ 73), MOSÉN 815 (»In uliginosis apricis», 18 $^{1}/_{12}$ 73), MOSÉN 4013 (»In campo sicco aprico», 18 $^{5}/_{2}$ 76).[1])

P. paniculata L. *Rio de Janeiro:* REGNELL Rio 6, MOSÉN 2407 (Catumby, »locis umbrosis», 18 $^{30}/_{8}$ 74); *São Paulo:* Santos, MOSÉN 3159 (»In litore Maris atlantici», 18 $^{10}/_{12}$ 75).

P. sabulosa BENNETT. *Minas Geraes:* Caldas, MOSÉN 817 (»In uliginosis apricis», 18 $^{25}/_{11}$ 73), WIDGREN 1070.

P. tamariscea MART. *São Paulo:* Cajurú, REGNELL III: 156 (Mart. 1857).

P. tenuis DC. *Minas Geraes,* Caldas: REGNELL I: 7 bis (18 $^{4}/_{12}$ 54), MOSÉN 812 (»In uliginosis apricis», 18 $^{1}/_{12}$ 73), 813 (18 $^{1}/_{12}$ 73), 814 (18 $^{25}/_{11}$ 73); loco haud indicato, WIDGREN 1066 p. p. (p. p. est *P. brasiliensis* L.), 1067 & 731.

Interdum perennis esse videtur.

P. Weddelliana CHOD. *Minas Geraes:* Uberaba, REGNELL III: 157 * (Novembr. 1848).[2])

---

1) Sub nomine *P. mollugînifoliæ* celeberr. CHODAT duas conjugit formas, habitu inter sese sat differentes. Altera (REGNELL III: 159, MOSÉN 811 & 4013 — *P. galioides β major* BENNETT Flor. brasil.), quæ loca sicca incolit, foliis latioribus (mediis circiter 20 *mm.* longis 6—8(—10) *mm.* latis), altera (*P. galioides γ mollugînifolia* BENNETT l. c.), quæ in locis uliginosis v. subhumidis habitat, foliis multo angustioribus (mediis circiter 15 *mm.* longis, 1—2 (—3) *mm.* latis) est instructa. Etiam quoad flores seminaque differunt. In forma latifolia flores sunt minores, alis latioribus trinervibus, nervo medio simplice, instructi, semina pilis longis, rectis adpressis, appendicibus angustioribus munita; in forma angustifolia alæ florum longiores, trinerves, nervo medio ramoso, semina pilis brevioribus, ± recurvatis, paullulum crispatis, appendicibus brevioribus munita.

1 In Monographia Polygalacearum (part. II) duas species sub nomine *P. Weddellianæ* CHOD. describit celeberr. CHODAT, quarum altera ad *Timoutoideas* altera ad *Nudicaules* pertinet. Planta Regnelliana est *P. Weddelliana* CHOD. Monogr., pag. 159, *P. hygrophilæ* H. B. K. secundum descriptionem valde affinis. Sine dubio annua.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 4.
Stockholm.

rättelse om hvad sig tilldragit inom Kongl. Vetenps-Akademien under året 1896—1897. Af Akadeens ständige Sekreterare afgifven på högtidsdagen den 31 Mars 1897.

Vid ett tillfälle sådant som detta, då Vetenskaps Akademien ntligen begår minnet af sin stiftelse och dervid har att redoa för sin verksamhet under det sist förflutna året, är det nes främsta pligt att uttala sin tacksamhet för det oafbrutna rilliga hägn, hvarmed hon och de vetenskaper, som hon föreiesvis omfattar, omhuldas af våra höga statsmakter — ett n, som torde hafva sin fulla förklaring i det stora inflytande, ı dessa vetenskaper med deras mångfaldiga praktiska tillämpgar utöfva på de menskliga lefnadsförhållande i olika rigtgar. Bland de vedermälen af detta mäktiga hägn, hvilka ler det gängna året kommit Akademien och henne underande institutioner till del, må här särskildt omförmälas, att ɩsdagen på Kongl. Majt:s derom aflåtna framställningar anat följande anslag:

dels på ordinarie stat en förhöjning med 800 kronor af det det Naturhistoriska Riksmuseets Entomologiska afdelning utnde årsanslag till materiel, till inköp af sällsynta föremål och vetenskapligt biträde vid samlingarnas ordnande;

och dels på extra stat för innevarande år:

till inköp och insamling af naturalier samt andra behof vid Riksmuseets afdelning för arkegoniater och fossila växter 2,000 kronor;

till vård, underhåll och förkofran af Riksmuseets Etnografiska samling 2,800 kronor;

till amortering af återstående brist i Riksmuseets expensanslag 750 kronor;

till upprätthållande af fullständigt ordnad vädellekstjenst vid statens, under Akademiens inseende ställda Meteorologiska Centralanstalt 7,950 kronor;

till utrustande och utförande af en vetenskaplig expedition för anställande af iakttagelser vid den totala solförmörkelse, som egde rum den 9 Augusti förlidet år och var synlig inom de nordligaste delarne af den Skandinaviska halfön, en summa af 9,800 kronor, hvilket belopp, såsom varande behöfligt redan under förra året, blifvit på Kongl. Majt:s befallning då af Kongl. Statskontoret förskotteradt, hvarjemte Kongl. Majt: täckts låta ställa en Kongl. Flottans kanonbåt till förfogande för expeditionens transporterande till observationsorten Vadsö och tillbaka.

Riksdagen har dessutom på Kongl. Majt:s framställning och efter af Akademien afgifvet förord för utgifvande under år 1897 af tidskriften Acta mathematica anvisat ett fortsatt anslag af 3,000 kronor till förfogande af tidskriftens hufvudredaktör Professor MITTAG-LEFFLER.

Med tillfredställelse och erkänsla har Akademien äfven denna gång att omförmäla, att hennes verksamhet till främjande af vetenskaplig forskning blifvit frikostigt gynnad jemväl af enskilda personer. Sålunda har Akademiens framlidne Astronom Professor H. GYLDÉN redan år 1873 låtit i Lifförsäkringsbolaget Thule genom en så kallad donationsförsäkring assurera sitt lif på vilkor, att försäkringssumman, 10,000 kronor, skall till Akademien utbetalas 45 år derefter, således år 1918, men utan någon närmare föreskrift angående donationens användning, hvaröfver Akademien således eger att i sinom tid besluta. — Vidare har den nyligen aflidne Medicine Doktorn CONRAD HAHN i efter-

nadt testamente förordnat, bland annat, att en summa af
)00 kronor skall efter hans död utaf hans qvarlåtenskap till-
Akademien, äfvenledes utan föreskrift angående donationens
mare ändamål, som således också kommer att af Akademien
nare bestämmas.

Öfver åtskilliga till den allmänna administrationen hörande
iden, vid hvilka någon vetenskaplig utredning ansetts erforder-
har Akademien under året haft att afgifva utlåtanden,
m:

på Kongl. Majt:s befallning rörande de hydrografiska under-
ningarnes fortsättning och derför erforderligt anslag;

på anmodan från Kongl. Ecklesiastik-Departementet an-
nde dels en ny internationel konvention för den internationela
mätningen, dels i fråga om stadga för offentliga arkiv, och
angående några sökta anslag för vetenskapliga ändamål; samt

på anmodan af Kongl. Domänstyrelsen i fråga dels om för-
under viss årstid mot jagt efter dykänder, och dels om en
slagen internationel gemensam lagstiftning till skyddande af
åkerbruket nyttiga fåglar.

Om resor, som för vetenskapliga ändamål blifvit utförda på
stnad af Akademien utaf medel, som hon för sådant ända-
eger till förfogande, har Akademien fått mottaga och låtit
föredragas följande berättelser:

af Amanuensen DR. B. SALIN, som i egenskap af Letter-
tsk stipendiat under resor i Norge, Danmark, Finland,
sland, Tyskland, Schweiz, Frankrike, Belgien, Holland, Eng-
l, Skottland och Irland vid dervarande museer och samlingar
lerat ej mindre de arkeologiska förhållandena närmast före
efter Kristi födelse än äfven de ornamentala företeelserna
er olika tider;

af Docenten R. SERNANDER, som i Herjedalen anställt under-
ningar öfver trädgränsens förlopp och postglaciala förskjut-
gar;

af Med. Kandidaten E. HOLMGREN, som vid Kristinebergs
logiska station studerat vissa grupper af hafsevertebrater;

af Doktor K. O. E. STENSTRÖM, som idkat hieraciologiska och växtbiologiska studier i nordligaste Jemtland;

af Doktor M. FLODERUS, som vid Kristineberg anställt undersökningar öfver ascidiemantelns byggnad och utveckling;

af Doktor J. ERIKSON, som idkat fortsatta studier öfver Ölands alvarvegetation;

af Amanuensen H. DAHLSTEDT, som anställt hieraciologiska forskningar inom Femsjö socken i Småland samt i Bohuslänska skärgården;

af Filos. Kandidaten ASTRID CLEVE, som idkat biologiska fanerogamstudier och undersökningar öfver alpina diatomaceer;

af Filos, Kandidaten E. HEMMENDORFF, som på Öland anställt fysiognomiska och utvecklingshistoriska undersökningar af dess alvarvegetation.

Utgifvandet från trycket af *Akademiens skrifter* har under året i regelbunden ordning fortgått. Af Akademiens Handlingar hafva såväl det 27:de som det 28:de bandet fullständigt utkommit, omfattande tillsammans 15 större afhandlingar, hvarförutan någon del af det 29:de bandet redan lemnat pressen. — Af Bihanget till Handlingarne har det 21:sta bandet, för år 1895, omfattande icke mindre än 35 större och mindre afhandlingar, fullständigt och af 22:dra bandet den aldra största delen utkommit. — Af öfversigten af Akademiens förhandlingar har 53:dje årgången, eller den för år 1896, innehållande 51 mindre afhandlingar, i sin helhet utkommit, hvarjemte tryckningen af innevarande års öfversigt blifvit påbörjad. — Af arbetet »Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms Observatorium» har 5:de häftet af 5:te bandet lemnat pressen och dermed detta band blifvit afslutadt. — Af arbetet »Meteorologiska iakttagelser i Sverige» har 33:dje bandet utkommit.

På Akademiens *Observatorium* har under året den sorgliga tilldragelsen egt rum, att detsamma genom döden förlorat sin dittillsvarande förtjenstfulle föreståndare Professor HUGO GYLDÉN, som afled den 9 sistlidne November. — Verksamheten derstädes har dock under hela året oafbrutet fortgått och har före-

trädesvis tagits i anspråk för fortsatta beräkningar och redaktionsbestyr i och för de två större arbeten, hvarmed Professor GYLDÉN under en längre följd af år varit sysselsatt, nämligen dels ett omfattande, genom statsanslag befordradt arbete öfver hufvudplaneternas absoluta banelementer, hvaraf en 1:sta del redan sedan några år föreligger färdigtryckt, och af hvars 2:dra del omkring en tredjedel lemnat pressen, samt dels ett efter öfverenskommelse med Tyska Astronomiska Sällskapet öfvertaget arbete, innefattande hjelptabeller till underlättande af beräkningen af de små planeternas rörelser. — Såsom redan i det föregående blifvit omnämndt, har dessutom under året det 5:te bandet af »Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms Observatorium» blifvit afslutadt genom utgifvande af dess 5:te häfte. — Observatoriets meridiancirkel har hufvudsakligen blifvit använd för tidsbestämningar, hvilka enligt åtagande blifvit i öfvenskommen ordning på telegrafisk väg signalerade dels till Kongl. Telegrafverkets härvarande centralstation och dels till Kongl. Flottans station i Karlskrona. Iakttagelserna med observatoriets refraktor för bestämning på fotografisk väg af vissa stjernors afstånd hafva blifvit fortsatta, så att för närvarande närmare 300 fotografier af stjernhimmeln föreligga. — Under aret har Filos. Doktor V. CARLHEIM-GYLLENSKÖLD varit anställd såsom Observatoriets Amanuens, hvarjemte Filos. Kandidaten K. DICKMAN tjenstgjort såsom räknebiträde intill 1896 års slut, hvarefter Filos. Kandidaten H. VON ZEIPEL blifvit för samma ändamål antagen. För öfrigt hafva Tyska Doktorerna W. EBERT och K. VON BUCHHOBZ under någon tid af året uppehålit sig härstädes för astronomiska studiers indkande under Professor GYLDÉNS ledning, hvarförutom Kandidaterna H. VON ZEIPEL och FR. RUBIN deltagit i de för elever vid Stockholms Högskola anordnade praktiska öfningarne i anställande af astronomiska observationer.

Vid Akademiens *Fysiska Institution* har den systematiska undersökningen öfver metallernas spectra i elektriska ljusbågen äfven under sistförflutna året fortgått, ehuru till följd deraf, att

största delen af sistlidne sommar måst användas för förberedelserna till solförmörkelse-expeditionen i Augusti månad, utbytet blifvit mindre än eljest skulle hafva varit händelsen. Den tredje afdelningen, behandlande cobolt och nickel, har emellertid blifvit offentliggjord i Akademiens Handlingar, och i afseende på mangan har undersökningen så långt framskridit, att en redogörelse derför rätt snart torde kunna komma att offentliggöras. Studiet af vanadins spectrum, som äfvenledes ej obetydligt fortskridit, har derjemte ledt till en särskild undersökning af en hel serie rutilarter från Riksmuseum, i hvilkas kemiska sammansättning vanadin och chrom befunnits ingå, ett förhållande som hittills varit för mineralogerna obekant. Äfven härom har en afhandling blifvit under året offentliggjord i Akademiens skrifter. — Det i förra årets berättelse omförmälda instrument, kalladt siderostat, som blifvit levereradt från den bekanta Repsoldska instrumentfabriken i Hamburg för den då förestående svenska solförmörkelse-expeditionen, har före denna expeditions afgång blifvit försedt med några nödiga biapparater och derefter underkastadt en sorgfällig profning, hvarvid det visat sig utmärkt väl motsvara sitt ändamål, som är att låta en med instrumentet förbunden och mot en himmelskropp rigtad astromisk tub noga följa denna himmelskropps skenbara dagliga rörelse och således låta densamma intaga ett under någon längre tid oförändradt läge inom tubens synfält. Denna egenskap gör instrumentet synnerligen tjenligt för utförande af celesta fotograferingar, för hvilket ändamål instrumentet äfven härstädes, efter erhållen lämplig uppställning, skall komma till särdeles nyttig användning. — Under sistförflutna sommar har Lektor RANCKEN från Finland vid institutionen sysselsatt sig med spectroskopiska undersökningar, särskildt med afseende på svafvel, äfvensom Lektor S. FORSLING under en kortare tid fortsatt sina spectralstudier öfver de sällsynta jordarterna. — De *Thamiska* föreläsningarne hafva, åtta till antalet, blifvit hållna af Akademiens fysiker under nästförflutna Januari och Februari månader och haft till ämne: »Astronomiens historia under senare hälften af nittonde

seklet» eller en fortsättning af föregående års föreläsningsämne.

Vid *Bergianska Stiftelsens* trädgårdsskola har antalet elever under året varit 16. Undervisningen har omfattat den praktiska hortikulturens olika grenar samt botanik, geografi, geologi, kemi, fysik, aritmetik, fältmätning, trädgårdsritning, bokföring och svenska skriföfningar. — Bland verkställda nyanläggningar i trädgårdens botaniska del må nämnas en afdelning för psammofila växter på nordöstra sidan vid strandvägen samt en anläggning för sydamerikanska annuela fanerogamer på trädgårdens sydvestra sluttningar. — Stiftelsen har under året ihågkommits med talrika gåfvor. Samlingar af lefvande växter hafva lemnats af Professor E. ALMQVIST, Rektor S. ALMQVIST, Docent G. ANDERSSON, Amanuens H. DAHLSTEDT, Redaktör F. J. HUSS, Kollega N. G. W. LAGERSTEDT, Docent K. LJUNGSTEDT, Professor CHR. LOVÉN, Adjunkt A. W. A. LUND, Amanuens G. O. MALME, Professor A. G. NATHORST och Apotekaren H. THEDENIUS. Frön hafva erhållits af Deras Kongl. Högheter Arffurstarne GUSTAF ADOLF och WILHELM, Amanuens G. FORSBERG, Adjunkt T. O. B. KROK, Professor G. LAGERHEIM, Lektor C. A. M. LINDMAN, Baron F, VON MUELLER från Nya Holland, Kandidat O. ROSENBERG, Doktor K. O. E. STENSTRÖN, Professor J. SZYSZYLOWICZ från Österrike och Direktör A. U. WESTFELT. Morfologiska föremål hafva lemnats af Herr A. BAGGE, Artist A. EKBLOM, Lektor J. ERIKSON, Adjunkt K. JOHANSSON, Justitieråd C. G. HAMMARSKJÖLD, Doktor A. LEVIN, Fru G. LJUNGBERG, Riksdagsman E. Åkerlund och Jägmästare V. T. ÖRTENBLAD. Såsom deltagare i det allmänna internationela fröbytet har trädgården utdelat frön till och mottagit frön från 80 botaniska trädgårdar och likartade institutioner i Europa, Amerika, Asien och Australien.

Akademiens *Bibliotek* har under året hållits tillgängligt på stadgade tider. Statistiken öfver dess begagnande utvisar, att under tillsammans 257 tjenstgöringsdagar de besökandes antal varit 2500, att till begagnande framtagits 4521 volymer, af hvilka 2144 ut-

lemnats till hemlån, samt att 2166 låntagna volymer blifvit återställda. Vid årets slut voro omkring 9800 band och häften utlånta. Genom inköp, gåfvor och byten har boksamlingen tillväxt med 5067 band och småskrifter. — Uti Akademiens litterära bytesförbindelser har under året ingen förändring inträffat; hennes skrifter utdelas alltså fortfarande till 907 institutioner och personer, af hvilka 264 inom och 643 utom landet. — Akademiens Bibliotekarie har, på grund af Kongl. Majt:s nådiga förordnande, såsom ombud för Sverige deltagit i den internationella konferens, som i sistlidne Juli månad sammanträdde i London för öfverläggning angående utgifvandet af en fortlöpande bibliografi öfver naturvetenskaplig litteratur, och efter nämnda konferens' slut med understöd af Akademien företagit en resa i Frankrike och Tyskland för bibliotekstudiers idkande.

Meteorologiska Centralanstaltens verksamhet har fortgått efter samma utvidgade plan, som infördes med år 1894. De dagligen inkommande morgontelegrammen innehålla afton- och morgonobservationer öfver väderleken vid 12 inländska och 46 utländska stationer. På grund af dessa telegram hafva dagligen två synoptiska kartor blifvit konstruerade, af hvilka morgonkartan jemte en sammanfattning af väderlekstillståndet och utsikter för närmast följande dygn blifvit inom hufvudstaden offentliggjorda dels genom anslag å offentliga platser och dels genom införande i de större dagliga tidningarne. Nämnda sammanfattning tillika med utsigter har derjemte blifvit på telegrafisk väg öfversänd till 15 kommuner i riket, till de flesta af dem dock endast under sommarmånaderna. En mera kortfattad sammanfattning af väderlekstillståndet jemte utsigter har äfven blifvit öfversänd till styrelsen för statens jernvägstrafik, som på egen bekostnad låtit anslå densamma å alla större jernvägstationer. Denna anordning har äfven blifvit vidtagen på flere privata banlinier, af hvilka de flesta erhållit sina uppgifter från närmaste statsstation. — I öfverenstämmelse med förhållandet under föregående år anordnades äfven under Juni—September månader vid anstalten en särskild väderlekstjenst till jordbrukets gagn. För detta ända-

mål erhöll anstalten under denna tid morgontelegram innehållande afton- och morgonobservationer från ytterligare 7 inländska och en utländsk station samt eftermiddagstelegram från 17 inländska och 16 utländska stationer. Med stöd af dessa telegram dels kompletterades de ofvannämnda synoptiska kartorna och dels upprättades en särskild karta öfver eftermiddagens väderlek, i enlighet med hvilken kl. 6 e. m. utfärdades särskildt för jordbruket afsedda väderleksutsigter beträffande nederbörd och nattfrost under påföljande dygn. Dessa eftermiddagsuppgifter hafva i likhet med morgonuppgifterna blifvit dels anslagna å några offentliga platser i hufvudstaden och dels meddelade i ett par här utkommande dagliga morgontidningar, hvarjemte desamma blifvit genom Kongl. Telegrafstyrelsens försorg delgifna flere kommuner i riket äfvensom Kongl. Jernvägstyrelsen. — De till anstalten ankomna morgontelegrammen hafva fortfarande och till samma utsträckning som förut publicerats i »Bulletin du Nord», en tidskrift som bekostas af de tre skandinaviska meteorologiska anstalterna gemensamt. — Statens meteorologiska stationer äro för närvarande 34 till antalet, hvarförutom observationer öfver nederbörd och temperatur med egna eller från anstalten till låns bekomna instrumenter anställas å flera privatstationer. Fullständiga observationsserier hafva inlemnats af Läroverksrektorn P. R. BILLMANSON i Nora, Jägmästaren J. J. VON DÖBELN i Björkholm, Grosshandlaren G. KLING i Hinsehind, Telegrafkommissarien G. A. LARSSON i Nässjö, från Ronneby helsobrunn, Gysinge bruk och Ulricehamns sanatorium, samt från Landtbruks Akademiens Experimentalfält vid Stockholm, från en station i Hallands och en i Upsala län, de två sistnämnda inrättade och uppehållna på de respektive Hushållningssällskapens bekostnad. — Af de med skogsmedel bekostade försökstationerna hafva iakttagelser öfver nederbörd, afdunstning och jordtemperatur fortfarande utförts. Af det i samband med dessa iakttagelser stående arbete, som under titel: »Om skogarnes inflytande på Sveriges klimat» utgifves af anstaltens Amanuens DR. H. E. HAMBERG, hafva under året utkommit delarne IV, »Nederbörd»

och V, »Snötäcke», hvilka äro tryckta såsom bihang till K. Domänstyrelsens berättelse för år 1895 rörande skogsväsendet. — Det system af stationer för iakttagelser öfver nederbörden och delvis öfver lufttemperaturen, som bekostas af K. Hushållningssällskapen i riket, hvilka observationer togo sin början år 1878, äro ännu i oförminskad verksamhet. Om till hithörande stationer läggas statens meterologiska stationer, så väl de, hvilka lyda under Centralanstalten, som de under K. Nautisk-meteorologiska Byrån, samt de privata stationerna och skogsstationerna, vid hvilka alla nederbörden observeras efter samma plan, blir antalet nederbördsstationer i riket inalles 436, således 20 mindre än under föregående året. Utaf den under titel: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige» af Amanuensen Dr. Hamberg redigerade och hufvudsakligen genom prenumeration af Hushållningssällskapen uppehållna tidskrift, hvilken omfattar alla vid dessa stationer anställda observationer, hafva hittills 16 årgångar utkommit, nämligen för åren 1881—1896. — Det system af iakttagelser öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser, som år 1881 öfvertogs af Centralanstalten, har fortgått efter oförändrad plan, och hafva till Anstalten inkommit journaler från 49 observatörer öfver isläggning och islossning, från 62 öfver iakttagna åskväder och från 71 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurverlden. — Synoptiska tabeller hafva upprättats för hvarje dag af året 1895, upptagande nederbördens art och mängd, åskväder, dimma, dagg, rimfrost, luftens genomskinlighet, solrök, norrsken m. m. I dessa tabeller ingå samtliga stationer. — Under året har Amanuensen Dr. Hamberg besökt och inspekterat följande stationer: Vesterås, Upsala, Gysinge, Gefle, Falun, Karlstad, Bjuråker, Östersund, Huså, Jönköping, Ulricehamn, Skara, Venersborg, Strömstad, Göteborg och Halmstad. — Anstalten har, såsom vanligt, äfven under detta år haft att meddela en mängd upplysningar åt såväl in- som utländska myndigheter och enskilda personer.

Det *Naturhistoriska Riksmuseum* har i vanlig ordning hållits tillgängligt för allmänheten och har äfven fortfarande varit tal-

rikt besökt, särskildt vid de tillfällen, då tillträdet varit afgiftsfritt. Äfven på andra än de regelbundna tiderna hafva på derom gjorda särskilda framställningar museets samlingar fått afgiftsfritt besökas, såsom af skolungdom under lärares ledning. Sålunda hafva 1330 skolelever under ledning af 63 lärare under året begagnat sig deraf. Dessutom hafva 200 rekryter från Svea Lifgarde under juldagarne haft fritt tillträde.

Vid Riksmusets *Mineralogiska* afdelning har samlingarnes förökning fortgått, ehuru antalet af nya mineralfynd eller märkliga fynd af förut kända stenarter inom Skandinavien under året ej varit synnerligen betydligt. Till följd häraf har ej heller årsinköpet af inhemska mineral varit så omfattande som vanligt. Bland förvärf af detta slag förtjena dock att nämnas sviter af kainosit och svabit jemte åtskilliga andra mineral från Nordmarken och Jakobsberg inköpta från arbetare vid grufvorna; mineral från Ransäters grufvor i Vermland inköpta från Bergskonstruktör L. I. IGELSTRÖM; vackra kristaller af apatit från Gellivara, erhållna dels såsom gåfva af Grufingeniör A. DELLVIK och dels genom inköp; en del stuffer vanadinit från mangangrufvorna vid Böhlet, erhållna af Brukspatron WÆRN, vackra apofyliter från Skottvångs grufvor i Åkers socken skänkta af Grefvinnan POSSE; några stora kristaller thorit från Brevig inköpta från Herr G. FLINK, m. m. Vidare har ett större antal amerikanska mineral blifvit inköpta från Geo. L. English & C:o; en synnerligen vacker samling af zeoliter och andra isländska mineral till skänks erhållna af Apotekaren H. G. ERNST i Seydisfjord på Island; ett prof på den intressanta jernmeteoriten från Sivalik Hill nära Kap York, skänkt af Fröken ASTRID ANDERSEN i Godhavn; några mineral från Utah skänkta af Herr D. K. BROWN; guldmalmer från Australien insända af DR. N. O. HOLST, m. m. Äfven genom byte hafva några om ock mindre betydande mineral förvärfvats. — Såsom vanligt har af afdelningens rika duplettförråd åtskilligt forskningsmaterial blifvit utlemnadt till in- och utländska vetenskapsmän. — Sedan åtskilliga rum i Akademiens hus blifvit ställda till förfogande för uppläggande

af afdelningens duplettförråd, har flyttningen och granskningen af de i källare hittills förvarade dupletterna påbörjats. För underlättande af kristallografiska studier har en särskild samling af mineralprof, utvalda för ändamålet, börjat att utläggas. Afsigten vore att sålunda bilda en i afseende på skandinaviska mineral enastående samling, som, när engång nya tidsenliga lokaler stå till buds, kan i lämpliga glasfack utställas för allmänheten.

Riksmuseets *Botaniska* afdelning har under året vunnit förkofran såväl genom skänker som genom köp och byten. Akademien har till afdelningen låtit aflemna de samligar, som Kandidat ASTRID CLEVE, Amanuens H. DAHLSTEDT och Doktor K. O. E. STENSTRÖM, hvilka af Akademien åtnjutit reseunderstöd, under sina resor hopbragt. Bland öfriga gåfvor må nämnas: alger erhållna af Magister K. E. HIRN och fröken E. QVARNSTRÖM; lafvar af Professor CHR. AURIVILLIUS och Friherre A. E. NORDENSKIÖLD; fanerogamer af Lektor E. ADLERZ, Adjunkt F. R. AULIN, Apotekare J. BAAGÖE, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Kamrer C. H. BRANDEL, Kyrkoherde S. J. ENANDER, Kandidat H. A. FRÖDING, Hofkamrer H. HAFSTRÖM, Pastor O. HAGSTRÖM, v. Lektor E. KÖHLER, Kapten O. KÖHLER, Lektor C. A. M. LINDMAN, Doktor W. A. G. WÆTTER, och Regementsläkare H. O. WALDENSTRÖM; morfologiska föremål af Deras Kongl. Högheter Arffurstarne GUSTAF ADOLF och WILHELM, Kamrer G. A. LINDBERG, Professor G. LINDSTRÖM, Baron F. VON MUELLER och Kyrkoherde V. E. NORÉN. Bland samlingar, som genom köp förvärfvats, må nämnas: fanerogamer från Krim, samlade af A. CALLIER, Plantæ Schlerechterianæ från Sydafrika, PRINGLE'S Plantæ mexicanæ, samt exsiccatverken: »Funghi parasiti XI» af BRIOSI och CAVARA, »Phycotheca boreali-americana IV et V» af COLLINS, HOLDEN och SETCHELL, »Herbarium Hieraciorum Scandinaviæ X» af H. DALHSTEDT, »Phycotheca universalis XIV et XV» af HAUCH och RICHTER, »Algæ Britannicæ rariores exsiccatæ IX» af E. M. HOLMES, »Set of British Hieracia I et II» af E. och W. LINTON, »Characeæ exiccatæ IV» af MIGULA, SYDOW och WAHLSTEDT, »Herbarium cecidiologicum III et IV» af F. PAX,

»Flora polonica exiccata V» af WOLOSCZAK. — Genom byte hafva erhållits extraeuropeiska fanerogamer från Botaniska museum i Berlin och från Professor J. URBAN, Abyssiniska växter från Herbier Boissier i Genève, hafsalger af Konservator M. FOSLIE i Trondhjem samt exsiccatverket: »Algæ aquæ dulcis exsiccatæ XXVI—XXIX» af WITTROCK, NORDSTEDT och LAGERHEIM. — Delar af de skandinaviska, allmänna och Regnellska herbarierna hafva för bearbetning varit utlånade till specialister i Sverige, Danmark, Tyskland, Schweiz och Belgien. — Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen blifvit utförda, utom af Intenten sjelf, af Lektor E. ADLERZ, Docent G. ANDERSSON, Amanuens H. DAHLSTEDT, Doktor E. HENNING, Magister K. E. HIRN, Adjunkt K. P HÄGERSTRÖM, Adjunkt T. O. B. N. KROK, Professor G. LAGERHEIM, Lektor C. A. M. LINDMAN, Amanuens G. O. MALME, Kandidat O. ROSENBERG, Kandidat N. SVEDELIUS, Kandidat G. THORSTENSSON och Skolläraren M. ÖSTMAN. — Såsom Regnellsk Amanuens har Doktor G. O. MALME varit anställd.

Riksmuseets *Vertebrat-afdelning* har under året varit med skänker ihågkommen af Kejserl. Ryska Krigsstyrelsen, som genom härvarande Ryske Ministern låtit öfverlemna däggdjur och fåglar från Högasien, af Baron LOUIS DE GEER på Hanaskog, Kyrkoherden V. NORÉN i Alingsås, Stationsinspektor OLSSON vid Linderöd, Studeranden M. BENZELIUS, Herr C. LANDQVIST från Vallentuna, Herr V. Ljungvall, Direktör C. A. LAMM, Menageriägaren LYTZE, Vildthandlanden C. TIBERG och Trädgårdsmästaren A. WAHLBERG. Från den under Doktor O. NORDENSKIÖLDS ledning företagna svenska expeditionen till Eldslandet, under hvilken Doktor OHLIN och Herr ÅKERMAN tjenstgjort såsom zoologer, har afdelningen inlöst de derunder hopbragta, högst värdefulla samlingarne af vertebrater. Genom Intendentens anordning under en föregående år utförd resa till Italien hafva flera betydliga sändningar af fiskar från Medelhafvet ankommit. En samling fiskar från Svarta Hafvet och dess tillflöden har erhållits genom Direktören för Kaukasiska museet i Tiflis Doktor G. F. RADDE.

Genom Provinsialläkaren Dr. G. M. LUNDQVIST har afdelningen kommit i tillfälle att från Möllskären utanför Oxelösund inlösa en mycket sällsynt raritet af utter, en unge i helt ljusgul albinosdrägt. — Till utredning af ålens fortplantningsförhållanden inom Stockholms skärgård, hvilken fråga ånyo upptagits af Baron C. J. N. CEDERSTRÖM, har Afdelningen bidragit genom bekostandet af den derför nödiga utrustningen. — Med anledning af framställd begäran har af Afdelningens duplettförråd en för ett högre elementarläroverks behof lämpad samling af vertebrater blifvit iordningställd för att såsom typsamling för undervisning i zoologi utställas vid den instundande allmänna konst- och industri-utställningen härstädes.

Den till Vertebrat-Afdelningen hörande *Etnografiska samlingen* har fått mottaga gåfvor af Professor A. G. NATHORST, Enkefru ANNA MARTIN och Baron A. E. NORDENSKIÖLD. — I den för denna samling upplåtna äldre lokalen, som för närvarande innesluter 18000 förtecknade föremål, hafva fem nya förvaringsskåp anskaffats. Katalogiseringsarbetet har under Fröken G. CEDERBLOMS händer fortskridit, och den för allmänheten afsedda katalogen har tillökats med en ordnad redogörelse för innehållet i ännu ett rum. Större delen af inventariet har blifvit omredigeradt i öfverenstämmelse med de af Dr. HJ. STOLPE och Amanuensen F. R. MARTIN uppgjorda förteckningarne. Katalog är uppgjord öfver alla till samligen inkomna föremål och uppställd i tidsföljd med uppgifter om lokal samt föremålens antal. — I den senare förhyrda lokalen hafva Kina-skåpen anordnats af Dr. STOLPE. Det till denna lokal hörande köket har blifvit försedt med fyra skåp samt inredt till utställningsrum, som inhyser den från Amanuensen MARTIN förvärfvade samlingen, uppgående till 850 nummer från Kaukasien och Turkestan. — Äfven den Etnografiska Samlingen kommer att blifva representerad vid den förestående konst- och industri-utställningen, då Amanuensen MARTIN erhållit tillstånd att mot bekostande af försäkringspremien och andra utgifter till förevisning låna de af honom under hans resor sam-

manbragta etnografiska samlingar, som numera tillhöra Riksmuseum.

Riksmuseets *afdelning för lägre Evertebrater* har under året förkofrats genom skänker, inköp och byten. Professor T. TULLBERG har förärat flere vackra exemplar af en sällsynt, fritt simmande Actinia, Aracnactis. Statveterinären K. KJERRULF har öfverlemnat ett antal lefvande lefvermaskar samt exemplar af en nematod, Strongylus paradoxus; Konservator C. A. HANSON har gifvit en mindre samling djur från trakten af Strömstad, och af Amiral C. P. VIRGIN har afdelningen fått mottaga en samling torkade bryozoer från kusten af Tasmanien. Genom byte med Upsala universitets zoologiska institution hafva förvärfvats tre exemplar af en egendomlig Holothuria, Psolus ephippifer, som föder lefvande ungar, hvilka bäras i ett marsupium på ryggsidan; med Vetenskaps Akademiens i St. Petersburg zoologiska museum en samling hafsmollusker från Hvita hafvet, och med Mc' MURRICH vid universitetet i Michigan en del actinier. Afdelningen har derjemte fått mottaga betydande samlingar från Kristinebergs zoologiska station, hvaribland särskildt förtjenar framhållas en del stora sällsynta manetdjur, som förut aldrig anträffats vid våra kuster. Genom inköp hafva förvärfvats flere exemplar af den japanska jättekrabban Inachus Kæmpferi, aflidne Lektor C. HARTMANS samling af mollusker från Skandinavien och Österrike samt några ostronliknande musslor från Kamerun. — För vetenskapliga arbeten hafva större eller mindre samlingar varit utlånade till Professorerna W. LILLJEBORG, P. T. CLEVE, A. WIRÉN och D. BERGENDAL; Docenterna C. AURIVILLIUS, L. JOHANSSON, H. WALLENGREN, L. JÄGERSKJÖLD, A. H. Hennig och A. OHLIN; Filos. Kandidaterna HJ. ÖSTERGREN, N. G. LINDGREN och J. ARWIDSSON samt Studeranden GUNNAR ANDERSSON; vidare till Konservator A. APPELLÖF i Bergen, Dr. H. J. HANSEN, Herr G. BUDDE-LUND i Köpenhamn och Professor R. BLANCHARD i Paris, samt till Professor E. EHLERS och Dr. J. THIELE i Göttingen. — Arbetet med ordnande och inregistrerande af samlingarne har oafbrutet fortgått. Foraminifer-

samlingen, som af Dr. A. von Goës bearbetats och numera är under inordnande i ett nytt för ändamålet passande skåp, torde blifva en af de förnämsta i verlden. — Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen utförts af Docenterna C. Aurivillius, O. Carlgren och H. Wallengren, Doktor A. von Goës, Kandidat Hj. Östergren och Studeranden G. Andersson.

Akademiens zoologiska station *Kristineberg* har under sistlidne sommar för vetenskapliga undersökningar och studier varit begagnad, utom af föreståndaren sjelf, af Professorne W. Leche och J. A. Hammar, Docenterne C. Aurivillius och L. Jägerskjöld, Dr. M. Floderus, Kandidaterne A. Bergman, H. A. Rosander, J. Arwidsson, A. Arnbäck, F. Cederblom, E. Holmgren, I. E. Stigler och A. P. Vinge samt studerande G. Andersson och J. Lindqvist. Under vintern från början af Januari till slutet af Februari hafva undersökningar utförts vid stationen af Docenten C. Aurivillius och Doktor M. B. Swederus. Dessutom har den förre af dem uppehållit sig vid stationen under hela hösten från och med September månads början till inemot medlet af December för att fullfölja under föregående år påbörjade undersökningar, som med understöd från Stiftelsen »*Lars Hiertas minne*» blifvit honom anförtrodda att utföra beträffande hafsfaunans sammansättning under olika tider af året och dermed sammanhängande biologiska frågor. — Stationen har under året undergått flere vigtiga, af behofvet påkallade förändringar. Sålunda har en af de gamla, utslitna pumparne ersatts af en ny kraftig sådan, och har denna under sommaren och hösten äfven vid jemförelsevis svag vind lemnat rikligt med vatten. För att förebygga vattenbrist i händelse af total vindstilla har en mindre s. k. colibripump, som drifves med ånga, anskaffats och ett litet pumphus uppförts. Under sommarens lopp, då full vindstilla rätt ofta inträffade, har denna pump visat sig vara till ovärderlig tjenst. — Sviter af under sommaren och hösten insamlade naturföremål hafva i första hand kommit Riksmuseum till godo. Då tillgången det medgifvit, hafva äfven museerna vid rikets Högskolor ihågkommits, och till de

med dem förbundna zoologiska och anatomiska institutionerna har nödigt arbetsmaterial öfverlemnats.

Den *Entomologiska* afdelningen af Riksmuseum har genom Riksdagens bifall till Kongl. Majt:s proposition om en förhöjning af afdelningens årsanslag med 800 kronor blifvit satt i tillfälle att bättre än hittills motsvara en del af de kraf, som från den studerande allmänhetens sida ställas på densamma. — Såsom gåfva eller i byte har afdelningen under året mottagit: talrika exemplar af en för Chrysanthemum skadlig Phytomyza-art af Folskoleläraren J. A. ÖSTERBERG; några nya curculionider af F. HARTMAN i Fahrnau; en samling sydafrikanska skalbaggar af L. PÉRINGUEY i Capstaden; några sällsynta afrikanska dagfjärilar af O. STAUDINGER; 50 arter hemiptera från A. L. MONTANDON i Bukarest; diverse coleoptera från R. OBERTHÜR i Rennes; några afrikanska lepidoptera från H. LANZ i Friedrichshafen; en större samling cynipider och formicider samt en synnerligt värdefull samling af noggrant bestämda österrikiska gallbildningar från Professor G. MAYR i Wien; den sällsynta satyriden Heteropsis drepana från Madagascar af E. SUFFERT i Berlin; en samling fjärilar och skalbaggar från E. SEELDRAYERS i Brüssel; några sällsynta afrikanska lepidoptera från museet i Brüssel; åtskilliga insekter och en spindel från Natal af Kyrkoherden V. E. NORÉN i Alingsås; några afrikanska fjärilar från »Museum für Naturkunde» i Berlin, samt några nya arter curculionider från Ingeniör J. FAUST i Libau. Genom inköp har afdelningen förvärfvat: en samling cerambycider och lepidoptera från O. STAUDINGER, några insekter från Kamerun af Herr ALANDER, samt andra hälften af framlidne franske entomologen Aug. CHEVROLAT's stora samling af curculionider, hvarigenom åt Riksmuseum räddats typerna till en stor mängd af de i SCHÖNHERRS bekanta verk beskrifna arterna. — Likasom under närmast föregående år har utlåningen af material till forskare i in- och utlandet varit mycket betydande. Bland dem, som på detta sätt begagnat sig af hithörande samlingar, må nämnas: Professor G. MAYR i Wien, Herrar E. FLEUTIAUX i Paris, L.

PÉRINGUEY i Capstaden, G. MÖLLER i Helsingborg, A. L. MONTANDON i Bukarest, Dr. Y. SJÖSTEDT i Upsala, Kandidat HJ. BORG i Upsala, Konservator C. RITSEMA i Leyden, Ingeniör J. FAUST i Libau, Öfverste A. SCHULTZE i Detmold samt Dr. A. HANDLIRSCH vid Kejserl. Hofmuseum i Wien. — För studier och undersökningar har afdelningen besökts af Landtbruksstyrelsens entomolog S. LAMPA, Dr. E. HAGLUND i Norrköping, Amanuens S. BENGTSSON i Lund, Mr. G. H. VERRALL från England, Kapten C. GRILL, Kandidat HJ. BORG från Upsala, Förste Fiskeriassistenten F. TRYBOM, Byråchefen J. MEVES, Regementsläkaren C. H. NERÉN m. fl.

Riksmuseets *Paleontologiska afdelning* har såsom vanligt hufvudsakligen riktats genom inköp af försteningar. Sådana hafva i stor mängd erhållits från Gotland, äfvensom från Italien under Intendentens resor derstädes sistlidet år, samt vidare från Böhmen, Tyskland och Nordamerika. Särskildt torde böra omnämnas den betydande skörd af material för undersökning af Gotlands siluriska cephalopodfauna, som afdelningen blef i stånd att förskaffa sig genom det anslag från Letterstedtska donationen, hvilket Akademien för ändamålet anvisat. Denna samlingarnes tillökning består af fjorton större lådor, innehållande försteningar från de öfversta kalkstensbäddarne, företrädesvis från Samsugn i Othems socken, hvilkas uppackande samt det derpå följande preparerandet af innehållet dock ännu icke medhunnits. Bristen på utrymme för att förvara dessa och öfriga under sednaste tider tillkomna förvärf gör sig alltmera kännbar. För den närmaste framtiden torde knappast annan utväg förefinnas än att utrymma ett af gallerien i expositionslokalen och i dess skåp inflytta duplettsamlingar. — Såsom gåfvor har afdelningen fått mottaga: af Licentiat GRÖNVALL en trilobit från Skåne, af Dr. G. HOLM en samling svenska graptoliter, af Akademiker FR. SCHMIDT i St. Petersburg ryska trilobiter, af Konsul SINGRIMANI i Mersina två sändninger tertiärfossil från Bulgar-Dagh i Mindre Asien, af Lektor TÖRNQVIST en större samling svenska undersiluriska cystidéer, samt af Mr. STUART WELLER i Chicago några gipsaf-

tryck af en nyupptäckt nordamerikansk crinoidé. Den dyrbaraste gåfvan är dock den, som vid årets slut lemnades af Mr C. E. BEECHER i New Haven N. Am., bestående af två särdeles vackra exemplar af den på sednaste tiden i närheten af New York upptäckta trilobiten Triarthrus Bechi GREEN med väl bibehållna extremiteter. — Genom byte har vunnits från Professor R. BECK i Freiburg i Sachsen ett utmärkt exemplar af Mallotus villosus, som visar sidoliniernas »villi», samt från det Geologiska Museet vid »R. Istituto di Studi Superiori» i Florens en rikhaltig samling medelitalienska tertiärförsteningar. Dylika byten hafva äfven blifvit inledda med de geologiska museerna vid universiteten i Rom och Pisa. — Samlingarne hafva för vetenskapliga arbeten under årets lopp begagnats af studeranden J. G. ANDERSSON, Mr. F. A. BATHER, samt Doktorerna A. VON GOËS, J. W. GREGORY från London, A. HENNIG, G. Holm, O. JAEKEL från Berlin, KJÆR från Kristiania, STOLLEY från Kiel och C. WIMAN. — Det hufvudsakliga arbetet inom sjelfva afdelningen har, utom inordnandet af inkomna samlingar, bestått i ordnandet, beskrifvandet och afteckuandet af Gotländska koraller, företrädesvis den mycket rikhaltiga gruppen Heliolitidæ.

Riksmuseets *afdelning för Arkegoniater och fossila växter* har under året fått mottaga följande gåfvor: en större värdefull samling växtfossil från Nordgrönland af Inspektor N. A. ANDERSEN i Godhavn; Sphenophyllum från Italien af Professor CANAVARA i Pisa, roströr från Vermland af Lektor K. B. F. FORSSELL, fossilt blad af dvergbjörk från Mecklenburg af Professor E. GEINITZ i Rostock; fotografier öfver en kalkstuffaflagring i Vestergötland af Biblioteksamanuensen J. M. Hulth; mossor från Amerika och andra länder af Lektor N. C. KINDBERG; stenkol från Brasilien och några pressade växter från Madeira af Lektor C. M. LINDMAN; fossilt trä och en fossil kalkalg från Italien af Professor G. LINDSTRÖM; friska exemplar af Trapa natans, odlad i Småland, af Godsegaren H. NORDENSKIÖLD; fossila juraväxter från östra Grönland af mineralogiska universitets-museum i Köpenhamn genom Professor N. O. USSING; diverse torkade arkegoni-

ater af Professor V. WITTROCK. Derjemte har Akademien öfverlemnat den samling qvartära växtfossil, som hopbragts i Dalarne under den resa, som Doktor G. ANDERSSON med understöd af Akademien dit företagit. — Genom inköp och insamlingar hafva förvärfvats växtfossil från Spetsbergen, torf från Färöarna, kalktuff med växtfossil från Vestergötland, fossila Trapa-frukter och andra qvartära växtfossil från Södermanland, växtfossil ur ancylusleran vid Skattmansö i Upland. — För vetenskapligt ändamål hafva samlingarne anlitats af Kammarrådet S. BORGSTRÖM, Doktor J. W. GREGORY från London, Doktor N. HARTZ från Köpenhamn, Biblioteksamanuensen J. M. HULTH, Doktor K. P. HÄGERSTRÖM, Oberlehrer G. LIMPRICHT i Breslau, Lektor C. A. LINDMAN, Professor J. VON SZYSZYLOWICZ från Lemberg och Professor V. Wittrock.

De medel, hvilka Akademien på grund af donationer under året haft till förfogande, hafva för sina föreskrifna ändamål blifvit på efterföljande sätt använda.

Årsräntan af den donation, som H. M. Konung OSCAR II och några enskilda personer till Akademien öfverlemnat för anordnande af astronomiska föreläsningar i hufvudstaden, har anvisats åt frmlidne Professor GYLDÉNS sterbhusdelegare, enär bemälte Professor ända till kort tid före sin död hållit dylika föreläsningar för elever vid Stockholms Högskola.

Den *Letterstedtska* donationens årsränta har blifvit fördelad i öfverenstämmelse med donators föreskrifter. Sålunda har Letterstedtska resestipendiet, öfver hvilket Kongl. Landtbruks-Akademien varit i tur att förfoga, blifvit af denna Akademi tilldeladt Adjunkten vid Ultuna Landtbruksinstitut ERNST PETTERSSON, med uppgift att i Danmark, Tyskland, Schweiz och Frankrike egna sig åt studier i mejerihandtering och bakteriologi. — De Letterstedtska räntemedlen till pris för förtjenstfulla originalarbeten och vigtiga upptäckter hafva tillerkänts Professorn GUSTAF RETZIUS såsom pris för hans under året utkomna arbete:

s Menschengehirn». — Letterstedtska räntemedlen till pris förtjenstfulla öfversättningar till svenska språket hafva, förade i två lika pris, tilldelats Docenten E. LAGERLÖF, för s öfversättning af Juvenalis med titel: »Juvenalis satirer», litteratören A. JENSEN för hans öfversättning från slaviska åken med titel: »Ur slavernas diktverld». — Letterstedtska llen för maktpåliggande undersökningar hafva blifvit ställda Professor O. WIDMANS förfogande för fullgörande af de ersökningar öfver usninsyrans konstitution, hvilka han redan örjat. — Det Letterstedtska slägtstipendiet har fortfarande ått med 2000 kronor till testators dotterson, ynglingen YVES RI GABRIEL LETTERSTEDT DE MONTMORT. — Utaf donationens änta hafva för öfrigt föreskrifna andelar blifvit öfverlemnade Domkapitlet i Linköping för utdelande af belöningar åt förta folkskolelärare inom detta stift, till Pastorsembetet i Wallerls församling af samma stift för utdelande af premier i förlingens folkskola och bildande af ett sockenbibliotek m. m., nsom till Direktionen öfver Serafimer-Lasarettet i Stockn för nödlidande sjuke resandes vård derstädes.

Letterstedtska Föreningens fonder, som äro ställda under ademiens förvaltning, uppgingo vid 1896 års slut till ett manlagdt kapital af 687,553 kronor 80 öre, hvarförutom samma tid fanns en disponibel räntebehållning af 18,019 nor, som blifvit till Föreningens styrelses förfogande öfverlemnad.

Årsräntan af *Wallmarkska* donationen har i sin helhet bliftillerkänd Lektorn vid Tekniska Högskolan A. E. TÖRNEBOHM om pris för hans i Akademiens Handlingar under året offentjorda omfattande arbete: »Grunddragen af det centrala Skanaviens bergsbyggnad».

Den *Edlundska* belöningen har blifvit öfverlemnad åt dåande Docenten i astronomi vid Upsala universitet, numera ademiens Astronom Professor K. BOHLIN för hans i Upsala enskaps Societets Acta offentliggjorda arbete: »Formeln und eln zur gruppenweise Berechnung der allgemeinen Störungen achbarter Planeten».

Den *Fernerska* belöningen har tilldelats Professorn vid Stockholms Högskola E. PHRAGMÉN för en af honom författad och i Öfversigten af Akademiens förhandlingar införd afhandling med titel: »Sur la théorie des élections multiples».

Den *Lindbomska* belöningen har tillerkänts Filos. Licentiaten D. STRÖMHOLM för hans jemväl i nämnda Öfversigt införda uppsatser om sulfin- och tetinföreningar I—III.

Den *Flormanska* belöningen har öfverlemnats åt e. o. Professorn vid Upsala universitet J. A. H. HAMMAR för hans i Upsala Läkareförenings förhandlingar intagna arbete: »Om förekomsten af ett primärt protoplasmatiskt sammanhang mellan äggets klyfningsceller».

Det *Beskowska* stipendiet har Akademien denna gång icke haft anledning att bortgifva, utan kommer årets stipendiebelopp att enligt föreskrift läggas till kapitalet.

Scheelefondens ränteafkastning har blifvit öfverlemnad åt Farmaceutiska Institutet, som varit i tur att deröfver förfoga.

Af *Regnells zoologiska gåfvomedel* har Akademien anvisat följande understöd:

åt Doktor A. GOËS 800 kronor för att studera och ordna Riksmuseets foraminiferer;

åt Doktor O. CARLGREN 500 kronor för att i Englands museer studera Actinier;

åt Doktor Y. SJÖSTEDT 500 kronor för att i Riksmuseum bearbeta vissa af honom från Kamerun i Afrika hemförda insektgrupper; och

åt Amanuensen S. BENGTSON 300 kronor för utförande af taflor till ett af honom författadt arbete öfver utvecklingen af Phalacrocera replicata.

För utförande af resor inom landet med ändamål att undersöka dess naturförhållanden har Akademien anvisat följande understöd:

åt Filos. Licentiaten F. E. AHLFVENGREN 150 kr. för växtfysiognomiska studier i Jemtland och Lappland;

åt studeranden J. G. ANDERSSON 100 kr. för att vid Koster-
ne och Kristinebergs zoologiska station studera Bohusläns
racoder;

åt Filos. Kandidaten J. ARVIDSSON 100 kr. för att äfven-
es vid Kosteröarne och Kristineberg idka studier öfver vissa
pper af polychæta maskar;

åt Filos. Kandidaten H. BORG 175 kr. för att i Ångerman-
d, Vesterbotten och Lappland insamla och studera Neurop-
ı och Orthoptera;

åt Filos. Doktor O. BORGE 150 kr för undersökning af
loran i norra delen af Bottniska viken;

åt Docenten A. HENNIG 150 kr. för att i sydvestra Skåne
ersöka skrifkritans fauna;

åt Filos. Doktor B. LIDFORSS 150 kr. för fytobiologiska
lier i Jemtlands fjelltrakter;

åt Docenten A. OHLIN 100 kr. för att vid Kristineberg
lera krustaceernas och särskildt amphipodernas utveckling;

åt Filos. Kandidaten O. ROSENBERG 125 kr. för fysiologiska
ersökningar öfver halofyter vid Sveriges vestkust; och

åt Docenten H. WALLENGREN 100 kr. för att vid Kristine-
; fortsätta sina undersökningar öfver de ciliata infusorierna
t studera Gullmarens Sipunculider.

Statsanslaget till instrumentmakeriernas uppmuntran har
rit lika fördeladt mellan matematiska och fysiska instru-
ıtmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Den minnespenning, som Akademien till denna sin högtids-
låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne leda-
, Chefen för Sveriges geologiska undersökning Professor AXEL
CHIM ERDMANN.

Genom döden har Akademien bland sina inländska leda-
er förlorat f. d. Statsministern Friherre LOUIS DE GEER,
f. d. Bibliotekarie JOHAN AUGUST AHLSTRAND, sin Astronom
fessor JOHAN AUGUST HUGO GYLLDÉN, f. d. Astronomie Pro-
orn vid universitetet i Lund DIDRIK MAGNUS AXEL MÖLLER,
Professorn vid Tekniska Högskolan CARL ARENDT ÅNGSTRÖM;

samt bland sina utländska ledamöter italienske Generallöjtnanten Grefve LUIGI FEDERIGO MENABREA, f. d. Professorn och Direktören vid ECOLE des MINES i Paris GABRIEL AUGUSTE DAUBRÉE, Professorn vid Ecole Polytechnique i Paris HENRI AMÉ RESAL, fysikern Professor HIPPOLITHE LOUIS FIZEAU i Paris, Direktören för Observatorium i Paris Professor FRANÇOIS FELIX TISSERAND, Gouvernements-Botanisten i Melbourne Friherre FERDINAND VON MUELLER, Civilingeniören ALFRED NOBEL, Professorn vid universitetet i Berlin EMIL HEINRICH DU BOIS-REYMOND och f. d. Professorn vid samma universitet KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS.

Med sitt samfund har Akademien deremot såsom nya ledamöter förenat, inom landet Medicine Doktorn JONAS GUSTAF WILHELM ZANDER, f. d. Justitierådet SAMUEL RUDOLF DETLOF KNUT OLIVECRONA, Professorn vid universitetet i Lund ESAIAS HENRIK WILHELM TEGNÉR och Öfverintendenten HELGO NIKOLAUS ZETTERVALL; samt i utlandet engelske Lorden och Teknikern WILLIAM GEORGE ARMSTRONG, Generaldirektören för Storbritanniens Geologiska Undersökning ARCHIBALD GEIKIE, Civilingeniören i Berlin FRIEDRICH VON HEFNER ALTENECK, Professorn vid Collège de France i Paris ELEUTHÈRE ELIE NICOLAS MASCART, Direktören för Kejserl. Ryska Central-Observatorium Pulkova OSCAR BACKLUND, Professorn vid universitetet i Leipzig WILHELM PFEFFER samt engelske Statistikern och Nationalekonomen Sir ROBERT GIFFEN.

I ledigheten efter framlidne Professor Gyldén har Akademien till sin Astronom kallat och utnämnt Docenten i Astronomi vid Upsala universitet Doktor KARL PETRUS TEODOR BOHLIN.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 224.)

Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1896: 12; 1897: 1. 8:o.
Kristiania. *Universitetet.*
Nyt magazin for naturvidenskaberne. B. 34: H. 3—4; 35: 1—3. 1893—1895. 8:o.
— *Videnskabs-Selskabet.*
Forhandlinger. 1895: N:o 1—11 & Oversigt over Möder. 8:o.
Skrifter. 1895: 1: Math.-naturv. Kl. N:o 1-11. 8:o.
Königsberg. *Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*
Schriften. Jahrg. 37 (1896). 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 32: N:o 122. 1896. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Berichte. Mathem.-phys. Cl. 1896: 5—6. 8:o.
» Phil.-Hist. Cl. 1896: 2—3. 8:o.
Abhandlungen. Mathem.-phys. Cl. Bd 23: N:o 6. 1897. 8:o.
Liége. *Université.*
Travaux du laboratoire. T. 5. 1893—1895. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1897): P. 1. 8:o.
— *British museum (natural history).*
Catalogue of the Madreporarian corals in the British museum. Vol. 2. 1896. 4:o.
GREGORY, J. W., Catalogue of the fossil Bryozoa in the British museum. The Jurassic Bryozoa. 1896. 8:o.
— *R. astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 57 (1896/97): N:o 3—5. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): 1—3. 8:o.
— *Entomological society.*
Transactions. 1896. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 60 (1897): N:o 367; 61 (1897): 369. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 29 (1897): N:o 2—4. 8:o.
Madrid. *Observatorio.*
Resumen de las observaciones meteorológicas efectuadas en la península y algunas de sus islas adyacentes. Años 1893—1894. 8:o.
Observaciones meteorológicas. Años 1894—1895. 8:o.
Marseille. *Commission de météorologie du dép. des Bouches-du-Rhone.*
Bulletin annuel. Année 13 (1894). 4:o.
Mauritius. *R. Alfred observatory.*
Results of meteorological observations. Year 1895. Fol.
Annual report. Year 1894. Fol.

Mexico. *Instituto geológico de México.*
Boletín. N:o 4—6. 1897. 4:o.
Milano. *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 36 (1896): Fasc. 3–4. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1896: H. 3. 8:o.
» Philos.-philol. u. hist. Cl. 1896: H. 3. 8:o.
HESSE, L. O., Gesammelte Werke. Herausg. d. math.-physikal. Cl. d. K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1897. 4:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 3 (1897): Fasc. 2. 8:o.
New-York. *Public library.*
Bulletin. Vol. 1 (1897): N:o 2–3. 8:o.
— *Microscopical society.*
Journal. Vol. 13 (1897): N:o 1. 8:o.
Paris. *Bureau central météorologique.*
Annales. Année 1894: 1—3. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1896. 4:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1897: 3—4. 8:o.
— *Société des études scientifiques.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 27 (1897): N:o 317. 8:o.
— *Société de géographie.*
Comptes rendus des séances. 1897: N:o 1—3. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 24 (1896): N:o 9. 8:o.
— *Société zoologique.*
Bulletin. T. 20 (1895). 8:o.
Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*
Atti. Processi verbali. Vol. 10 (1896—97): p. 169–200. 8:o.
Plymouth. *Marine biological association.*
Journal. N. S. Vol. 4: N:o 4. 1897. 8:o.
Pola. *Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine.*
Monats- und Jahresübersicht nach den Termin-Beobachtungen. 1896. 1—10, 12; 1897: 1. 4:o.
Meteorologische und magnetische Beobachtungen. Jahr 1895: 11—12. 4:o.
Jahresbericht der meteorologischen und magnetischen Beobachtungen. 1895. 4:o.
Riposto. *Osservatorio meteorologico.*
Bollettino mensile. Anno 22 (1896). 4:o.
Roma. *Ministerio della pubblica istruzione.*
Indici e cataloghi. 12: Vol. 1: Fasc. 6. 1897. 8:o.
— *R. Accademia dei Lincei.*
Rendiconti. Cl. di scienze morali ... (5) Vol. 6 (1897): Fasc. 1. 8:o.
Atti. » » » » (5) P. 2 (Not. degli Scavi): Vol. 5 (1897): 1. 4:o.
» » » » fisiche ... (5) Rendiconti. Vol. 6 (1897): Sem. 1: Fasc. 4–6. 4:o.

Roma. *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*
Atti. Anno 50 (1896/97): Sess. 1–2. 4:o.
St. Pétersbourg. *Académie impériale des sciences.*
Mémoires. (8) T. 3: N:o 3–4, 7, 9; 5: 1. 1895—96. 4:o.
Bulletin. (5) T. 3 (1895): N:o 2–5; 4 (1896): 1–5; 5 (1896): 1–2; 6 (1897): 2. 4:o.
— *Comité géologique.*
Mémoires. Vol. 14: N:o 2, 4. 1896. 4:o.
Bulletins. 15 (1896): N:o 5 & Suppl. 8:o.
— *Observatoire physique central.*
Annales. Année 1895: P. 1—2.
— *Institut Imp. de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 5: N:o 1. 1897. 4:o.
— *Societas entomologica Rossica.*
Horæ. T. 30 (1895/96): N:o 3–4. 8:o.
— *Russisch-kaiserl. mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd 32 (1896). 8:o.
— *Hortus Petropolitanus.*
Scripta botanica. Fasc. 12—13. 1896. 8:o.
— *Laboratoire biologique.*
Bulletin. T. 1 (1896): V. 4. 8:o.
St. John. *Natural history society of New Brunswick.*
Bulletin. N:o 14. 1896. 8:o.
Stettin. *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 57 (1896): N:o 1–12. 8:o.
Stonyhurst. *Observatory.*
Results of meteorological and magnetical observations. 1896. 8:o.
Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 3: N:o 1. 1897. 8:o.
— *Geological survey of New South Wales.*
Records. Vol. 5: P. 2. 1897. 4:o.
Tokyo. *Imp. university, College of science.*
Journal. Vol. 9: P. 2. 1897. 4:o.
Toronto. *Meteorological office.*
Monthly weather review. 1895: 1—8. 4:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
Annual report. 1894. 8:o.
— *U. S. Dep. of agriculture, Weather bureau.*
Report of the meteorological congress, held at Chicago 1893. P. 3. 8:o.
Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 47 (1897): H. 1–2. 8:o.
— *K. K. Gradmessungs-Bureau.*
Astronomische Arbeiten Bd 7—8. 1884—1895. 4:o.
— *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*
Annalen. Bd 11 (1896): N:o 1–4. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1897: N:o 1—5. 8:o.

Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Virteljahrsschrift. Jahrg. 41 (1896): Suppl. 8:o.
Neujahrsblatt. 99 (1897). 4:o.

Af Monsieur Gustave Gasser:
DESAIVRE, L., Germain Pichault de la Martinière. 1895. 8:o.

Af utgifvarne:
Revue de l'Aéronautique publ. par H. HERVÉ. Année 7 (1894); 8 (1895): Livr. 1. 4:o.
Tidskrift för skogshushållning, utg. af C. G. HOLMERZ. Årg. 25 (1897): N:o 2. 8:o.
Svenska jägareförbundets nya tidskrift utg. af A. WAHLGREN. Årg. 35 (1897): H. 1. 8:o.

Af författarne:
BIOLLEY, P., Moluscos terrestres y fluviatiles de la meseta central de Costa Rica. San José 1897. 8:o.
DE FLERS, H., Des Hypothèses Gnose. Clermont 1896. 8:o.
KÖLLIKER, A. V., Die Energideu von v. Sachs im Lichte der Gewebelehre der Thiere. Würzburg 1897. 8:o.
PAINLEVÉ, P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm 1895. Paris 1897. 4:o.
SEE, T. J. J., Researches on the evolution of the stellar systems. Lynn, Mass. 1896. 4:o.
STOLPE, HJ., Studier i Amerikansk ornamentik. Sthlm 1896. Fol.
TRISTAN, J. F., Insectos de Costa Rica. San José 1897. 8:o.
OLSSON, P., Om bygdens utsträckning under skilda tider i Jämtland och Herjeådalen. Östersund 1897. 8:o.
— Sur Chimæra Monstrosa et ses parasites. Paris 1896. 8:o.
SWEDERUS, M. B., Lars Roberg och Olof Rudbeck den yngre, Sveriges första zoologer. Upsala 1896. 4:o.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 5.

Onsdagen den 12 Maj.

Herr Pettersson förevisade och förklarade åtskilliga, på grund af de utförda hydrografiska undersökningarne upprättade hydrografiska kartor och afbildningar af karakteristiska planktonformer, hvartill Herr CLEVE, som bearbetat det insamlade materialet af vegetabilisk plankton, anknöt en närmare förklaring.

Docenten OTTO NORDENSKIÖLD lemnade en öfversigt af de vetenskapliga resultaten af de svenska Eldslands-expeditionernas verksamhet, dervid han särskildt redogjorde för de geologiska resultaten, bland hvilka det vigtigaste vore påvisandet och undersökningen af lager, bildade vid en på den södra hemisferen med den nordliga någorlunda samtidig glacialperiod, som ej kunde förklaras utan antagande af ett kallare klimat än nutidens.

Till införande i Akademiens skrifter antogos följande inlemnade afhandlingar och uppsatser, nämligen:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) »Die Ustilagineen und Uridineen der ersten Regnellschen Expedition», af Docenten H. O. JUEL; 2:o) »Chordodes Kallstenii, eine Gordiidé aus Kamerun», af Docenten L. A. JÄGERSKIÖLD; och

i Öfversigten: 1:o) »Neue Nymphaliden aus dem Congogebiete», af Professor CHR. AURIVILLIUS; 2:o) »Om gränsen för det synliga spektrum», af Professor J. WIDMARK; 3:o) »Einige neue Formeln der Theorie der elliptischen Functionen», af Kandidat F. DE BRUN; 4:o) »Sur les singularités essentielles mobiles des équations différentielles de second ordre», af Licentiat A. E. FRANSÉN.

Genom anställdt val kallades Direktören för Tekniska Institutet i Milano Professorn FRANCESCO BRIOSCHI till utländsk ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till K. Akademiens Bibliotek.

Af H. M:T KONUNGEN.

Moscou. *Comité de sériculture.*
Bulletin. Vol. 1: Liv. 3–5. 1894—95. 8:o.
6 skrifter angående silkesodling af A. TICHOMIROV (på ryska).
DAMMER, A., Ein wichtiger Fortschritt im Seidenbau (Gartenlaube 1897: N:r 11).
São Paulo. *Commissão geographica e geologica.*
Boletim. N:o 11. 1896. 8:o.

Stockholm. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 1 häfte. 4:o.
— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*
Berättelse 1895/96. 8:o.
— *Svenska turistföreningen.*
Årsskrift för 1897. 8:o.
Göteborg. *K. Vetenskaps- och Vitterhetssamhället.*
Handlingar. H. 32. 1897. 8:o.
Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*
Matrikel 1897. 8:o.
Upsala. *Meteorologiska observatoriet.*
Bulletin mensuel. Vol. 28 (1896). 4:o.
Albany. *Geological survey of the state of New York.*
Natural history of New York. Palæontology. Vol. 8. 1894. 4:o.
Belgrad. *Académie R. de Serbie.*
Srpski etnografski zbornik. K. 2. 1896. 8:o.
Berkeley. *University of California.*
University of California studies. Vol. 2: N:o 1. 1897. 8:o.
Biennial report of the president. 1894/96. 8:o.
Register 1895/96. 8:o.

(Forts. å sid. 308.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897. N:o 5.
Stockholm.

Neue Nymphaliden aus dem Congogebiete.

Von Chr. Aurivillius.

(Mitgetheilt den 12. Mai 1897.)

1. **Euryphene rubrocostata** n. sp. — ♂. Alis supra sordide virescentibus aut obscure coerulescente-viridibus, marginem versus obscurioribus fuscescentibus; anticis dimidio fere apicali nigro-fusco fascia subapicali inter costam et medium areæ ter-



Fig. 1. *Euryphene rubrocostata*, Auriv. ♀. Die Flügel von unten gesehen.

tiæ extensa maculisque 2—3 obsoletis in areis 6—8 pallide flavescentibus; alis infra pallide flavis fasciis tribus irregularibus transversis margineque fuscescentibus, fascia prima mox pone apicem cellulæ latiore et obscuriore in utraque ala ad

costam 4:am extus valde angulato-producta; fascia subapicali alar. anticar. alba, cellulis discoidalibus punctis 2—3 atris ornatis; costa alarum posticarum ad basin macula pallide sanguinea ornata; ciliis incisurarum et apicis alar. anticarum albidis; palpis flavis linea laterali fusca. — Long. alar. exporr. 60—64 millim.

♀. — Fig. 1. — A mare differt statura majore, alis anticis utrinque apice usque ad medium areæ 7:æ niveis, alis infra e maxima parte virescente-fuscis (fasciis obscuris nempe dilatatis et conjunctis) serie duplice submarginali lunularum albescentium, posticis fascia media alba in area tertia interrupta et angulata. — Long. alar. exporr. 82 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi. — Museum Bruxellense.

Diese schöne, sehr eigenthümliche Art gehört zu den interessantesten Entdeckungen, welche von Lieutenant L. CLOETENS in Beni-Bendi gemacht wurden. Von allen anderen *Euryphene*-Arten unterscheidet sich *rubrocostata* sofort durch den rothen Fleck an der Wurzel des Vorderrandes auf der Unterseite der Hinterflügel und erinnert dadurch sowie auch durch die Farbe und Zeichnung der Oberseite an einige *Euphædra*-Arten. Unten sind jedoch die Flügel entschieden nach dem *Euryphene*-Typus gezeichnet. Im Rippenbau stimmen die Geschlechter unter sich und mit den übrigen Arten völlig überein.

2. **Euryphene Severini** n. sp. — Fig. 2. — ♂. Alis supra olivaceo-brunneis signaturis cellulæ discoidalis, fasciis tribus pone cellulam margineque omnino ut in *E. phranza* et *lætitia* nigrofuscis; alis infra violascente-purpureo-brunneis, basi costæ ocellisque duabus parvis apicalibus alarum anticarum tantum albidis, signaturis nigris cellulæ discoidalis distinctis, ocellis submarginalibus subobsoletis, at quam in *E. lætitia* distinctioribus; corpore supra virescente-brunneo. — Long. alar. exporr. 58—63 millim.

♀. Ab *E. lætitia* PLÖTZ ♀ (= *eliensis* HEW. fig. 23, 24) vix differt nisi statura paullo majore, fascia subapicali alarum anticarum supra tota flavescente, puncto albo apicali in area 6

alar. ant. præsertim infra multo minore et elongato, fusco-pupillato, alis infra pallidioribus, pallide subviolascente-brunneis signaturis distinctioribus areisque 1 *a*—1 *c* alarum posticarum infra ante medium linea crassa arcuata transversa fusca. — Long. alar. exporr. 74—78 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi (L. CLOETENS). — Mus. Bruxellense.

Oben ist das ♂ dieser Art kaum vom ♂ von *E. lætitia* zu unterscheiden, unten aber sind die Flügel nicht olivbraun sondern dunkel rothbraun mit violettem Anfluge und entbehren am Analwinkel der Hinterflügel ganz die violettgraue Farbe,



Fig. 2. *Euryphene Severini*, AURIV. ♀.

welche so deutlich bei *sophus* und *lætitia* auftritt. Bei den mir vorliegenden drei ♂♂ fehlt auch der weisse Querstrich im Felde 7 der Unterseite der Hinterflügel. Das ♀, welches durch zwei ganz ähnliche Stücke vertreten ist, ähnelt auch sehr dem ♀ von *E. lætitia*, hat aber eine verschiedene nicht gelbliche Unterseite, welche durch einen schwachen, violetten Anflug an die Unterseite des ♂:s erinnert. Die schwarze Bogenlinie der Hinterflügel, welche auf der Oberseite den grünen Wurzeltheil und unten die grossen, deutlich aufgehellten Augenflecke nach aussen begrenzt, ist viel stärker gewellt oder gezackt als bei *E. lætitia*.

Wiewohl *E. lætitia* und *E. Severini* sehr nahe verwandt sind, machen sie jedoch eher den Eindruck von zwei verschiedenen Arten als von Localformen einer Art.

Ich habe diese Art nach meinem Freunde Herrn G. SEVERIN, dem Custos der entomologischen Abtheilung des Brüsseler Museums benannt als ein Zeichen meiner Dankbarkeit und Hochachtung.

3. **Diestogyna plagiata** n. sp. ♂. Alis supra fusco-brunneis strigis fasciisque ordinariis fuscis obsoletis, posticis ad angulum ani plaga maxima areas 1 *c* et 2 fere totas partemque areæ 1 *b* et 3:æ tegente vivide coeruleo-micante ornatis; alis infra rufo-brunneis, anticis marginem posticum versus pallidioribus, sordide flavescentibus, ocellis submarginalibus obsoletis nigro- et albo-pupillatis, posticis ad angulum ani paullulum cinerascentibus, annulo fusco in cellula discoidali et linea fusca arcuata media extus vix cinereo-marginata ornatis; ciliis anticarum totis, posticarum in incisuris niveis. — Long. alar. expans. 39 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi (L. CLOETENS) — Mus. Bruxellense.

Durch Grösse und Flügelform sowie durch die Farbe und Zeichnung der Unterseite kommt *D. plagiata* der *D. Milnei* am nächsten. Von *D. Milnei* unterscheidet sie sich indessen leicht dadurch, dass die Flügel oben an der Wurzel viel dunkler, kaum heller als an der Spitze der Vorderflügel sind, dass die Vorderflügel oben ohne blaue Flecke und ohne weisse Subapicalpunkte und unten ohne helle Querflecke in der Mittelzelle sind und auch dadurch, dass das blaue Analfeld der Hinterflügeloberseite grösser und heller und die violettgraue Beschuppung der Hinterflügelunterseite am Analwinkel und längs der Aussenseite der Mittellinie nur sehr schwach entwickelt ist.

4. **Diestogyna melanops** n. sp. ♀. Alis supra flavo-brunneis dimidio apicali anticarum fusco margineque posticarum us-

que ad lineam nigram submarginalem infuscato, area apicali alarum ant. utrinque fascia transversa alba punctisque 4 subapicalibus albis ornata, cellula discoidali in medio lineis duabus transversis fuscis late separatis instructa, posticis ante lineam submarginalem serie punctorum nigrorum præterea unicoloribus; alis infra subviolascente fusco-griseis, ad marginem exteriorem infuscatis plaga magna ad marginem posticum anticarum, ocellisque submarginalibus posticarum flavescentibus, posticis in cellula discoidali macula maxima rotundata, atra, maximam cellulæ partem occupante ornatis; ciliis fuscis. — Long. alar. exporr. 42 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi (L. CLOETENS) — Mus. Bruxellense.

In Farbe und Zeichnung stimmt diese Art am besten mit *D. lysandra* STOLL ♀ überein, weicht aber von dieser und von allen anderen beschriebenen Arten durch den grossen, tief schwarzen Fleck in der Mittelzelle der Hinterflügelunterseite ab. Die Querbinde der Hinterflügelunterseite und die dunkle innere Begrenzung der weissen Querbinde auf der Unterseite der Vorderflügel fehlen auch gänzlich.

5. **Cymothoe hyarbitina** n. sp. — ♂. Alis supra pallide flavis, ad basin late (in anticis usque ad exitum costæ 2:æ, in posticis usque ad apicem cellulæ) virescente-infuscatis, margine exteriore utriusque alæ saltem ad lineam submarginalem areisque 1 *c*—3 alarum posticarum totis fusco-brunneis linea angulata submarginali distincta, continua et in angulis internis punctato-incrassata; alis infra omnino ut in *C. hyarbita* HEW. signatis, at multo pallidioribus et linea distincta submarginali præditis. — Long. alar. exporr. 60—66 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi (L. CLOETENS) — 2 ♂♂ — Mus. Bruxellense.

Diese Form ist vielleicht nur eine Lokalrasse von der sehr seltenen *C. hyarbita* HEW. aus Old Calabar, macht aber oben

einen ganz verschiedenen Eindruck, besonders weil die Submarginallinie kräftig entwickelt ist und der Saum nicht orangegelb sondern gelbbraun und dicht mit schwärzlichen Schuppen bestreut ist.

Zusammen mit diesen ♂♂ wurde von Lieutenant CLOETENS ein ♀ gefangen, welches fast ganz mit *C. hora* DIST [1]) übereinstimmt und nur durch kleinere Grösse, 78 Millim., und durch die schmalere, nur 7 Millim. breite, und auf beiden Seiten rein weisse Mittelbinde der Hinterflügel abweicht. Hierdurch wird meine schon lange gehegte, beim ersten Anblicke unwahrscheinliche Ansicht, dass *C. hora* DIST. das ♀ von *C. hyarbita* HEW. seie, fast zur Gewissheit.

6. **Cymothoe caprina** n. sp. — ♂. Alis supra pallide sordide flavis, fere buxeis, ad basin sat late (in anticis usque ad costam 2:am, in posticis usque ad apicem cellulæ) virescente fusco-brunneis, margine exteriore fasciisque duabus submarginalibus lunulatis aut angulatis inter se et cum margine plus minus confusis fuscis; anticis obtuse falcatis inter fascias submarginales serie curvata macularum 6 inæqualium fundi coloris; posticis ad angulam ani paullulum productis, linea media recta fusca inter marginem anticum et costam 2:am extensa ornatis; alis infra osseis ad basin et in area marginali subviolascente isabellinis linea fere recta, communi, media fusca a margine costali alar. ant. usque ad angulum ani extensa, signaturis ordinariis sat distinctis. — Long. alar. exporr. 50 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi (L. CLOETENS) — 1 ♂ — Mus. Bruxellense.

Diese Art hat seinen natürlichen Platz zwischen *C. capella* WARD. und *C. Staudingeri* AUR. (= *indamora* STAUD. ♂). Von *C. Staudingeri*, mit der sie übrigens in der Zeichnung sehr nahe übereinstimmt, unterscheidet sie sich leicht durch die viel dunklere, gelbliche Grundfarbe der Oberseite, durch die dunkle Mittel-

[1]) *Paradiadema hora* DIST. Proc. Zool. Soc. 1879 p. 604 t. 54 f. 1. (1880).

linie der Hinterflügeloberseite und durch das Fehlen von schwarzen Querzeichnungen in der Mitte und am Ende der Mittelzelle auf der Oberseite der Vorderflügel. Mit *C. capella* hat sie die Mittellinie der Hinterflügel gemeinsam. Diese Linie setzt sich indessen bei *caprina* nicht auf den Vorderflügeln fort. Uebrigens unterscheidet sich *caprina* von *capella* besonders durch die viel dickere, am Vorder- und Hinterrande der Vorderflügel stark erweiterte innere Submarginallinie der Oberseite, durch das Fehlen schwarzer Zeichnungen in den Mittelzellen auf der Oberseite und durch die anders gefärbte Unterseite. Die Grundfarbe der Oberseite ist auch deutlich etwas dunkler als bei *capella*.

7. **Cymothoe angulifascia** n. sp. — ♀. Alis supra fuscis lineis duabus submarginalibus strigisque ordinariis cellulæ discoidalis anticarum nigris, fascia media lata (5—8 mill.) communi a medio marginis costalis anticarum usque ad costam 1 *b* alar. post. extensa et ad costam tertiam alar. ant. recto fere angulo fracta alba ornatis, ad apices internos lineæ submarginalis ex-



Fig. 3. *Cymothoe angulifascia*, AURIV. ♀.

ternæ serie punctorum alborum subobsoletorum; alis infra signaturis obscuris e maxima parte rufo-brunneis, margine maculis albis ad angulum posticum anticarum valde dilatatis in duplice serie dispositis areaque basali albovariegata, fascia media alba in areis 3 et 4 anticarum linea tenuissima brunnea divisa. — Long. alar. exporr. 58—60 millim.

Congogebiet: Beni-Bendi (L. CLOETENS) — 2 ♀♀ — Mus. Bruxellense.

Diese ♀♀ gehören offenbar zu der *Sangaris*-Gruppe und haben wahrscheinlich ein oben rothes ♂. Sie kommen den ♀♀ von *C. anitorgis* HEW. am nächsten, haben aber eine weit breitere und viel schärfer begrenzte weisse Querbinde, welche an der Rippe 3 der Vorderflügel fast rechtwinkelig gebrochen ist. Die Pfeilflecke der äusseren Submarginallinie sind oben kürzer und stumpfer und nur wenig deutlich, unten sind sie braun und sehr undeutlich.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897. N:o 5.
Stockholm.

Om gränsen för det synliga spektrum.

Af JOHAN WIDMARK.

(Meddeladt den 12 Maj 1897 genom R. TIGERSTEDT.)

Det är allmänt kändt, att de ljusstrålar, hvilka vårt öga uppfattar, icke äro alla strålarna i ljuset. Vid sidan af de lysande strålarna i spektrum ligga andra ljusvågor, åt ena hållet de ultraröda och åt det andra de ultravioletta strålarna. Rörande de sistnämnda har en stor meningsskiljaktighet herskat i afseende på deras förhållande till menniskoögat i fråga om deras absorption eller icke absorption af ögats medier, samt om deras skönjbarhet eller icke skönjbarhet af näthinnan.

I ett föregående arbete har jag sökt utreda frågan om ögonmediernas genomtränglighet för ultravioletta strålar.[1]) Jag förfäktade i detta den åsigten, att de skilda resultat, hvartill olika forskare kommit rörande denna fråga, kunde förklaras af den olika försöksanordning, de användt. Efter en granskning af de hittills gjorda undersökningarna drog jag den slutsatsen, att de resultat, hvilka DE CHARDONNET erhållit voro de mest tillförlitliga. Enligt denne forskare absorbera såväl hornhinnan och glaskroppen som isynnerhet linsen ultravioletta strålar. Absorp-

---

[1]) Jemf. »Om ögonmediernas genomtränglighet för ultravioletta strålar». Nord. Ophthalm. Tidskrift. B. 3, h. 3. 1890. På tyska i Scand. Arch. f. Physiologie. Bd 3. 1891. Beitr. zur Ophtalmologie. Leipzig 1891, S. 461.

tionen af de båda första medierna blir hos menniskan fullständig vid *S*- eller *T*-linien, men linsens absorption börjar redan omedelbart utanför *H*-linien och blir fullständig vid *L*—*M*-linien.

Riktigheten af dessa åsigter sökte jag på flere olika sätt ådagalägga. Jag framhöll bland annat ögonmediernas egenskap att fluorescera för ultravioletta strålar såsom ett tydligt bevis på deras egenskap att absorbera dessa ljusvågor. Jag påvisade därjemte att de ultravioletta strålarna, om ögat någon tid utsättes för deras inverkan, framkalla sjukliga förändringar i ögonmedierna. Slutligen ådagalade jag direkt genom följande experiment, att kristallinsen kraftigt absorberar ultravioletta strålar.

I båda grundytorna af ett 5—6 cm. tjockt metallrör infogades en bergkristallins om 13 cm:s brännvidd. Tuben fyldes med vatten genom ett sidorör. Därefter uppstäldes den på brännviddens afstånd från en elektrisk båglampa om 1200 normalljus. De från båglampan utgående ljusstrålarna blefvo på detta sätt, efter att hafva genomgått tuben, parallela. Största delen af de ultraröda strålarna voro nu aflägsnade genom absorption i vattnet, men största delen af de ultravioletta fanns kvar, emedan så väl vatten som bergkristall äro ytterligt permeabla för dessa strålar. Det alltså på ultravioletta strålar rika ljus, hvilket genomgått tuben, fick påverka ett hudområde under 2 timmar. Å midten af det belysta hudpartiet placerades kristallinsen af en nyss dödad kanin. Genom ständig pågjutning af fysiologisk koksaltlösning hindrades linsen att torka. Efter experimentets slut uppträdde å hela det belysta området, utom å det ställe där linsen legat, ett karakteristiskt erythema electricum (hvilket, som bekant, beror på de ultravioletta strålarna) [1]. Linsen hade således här skyddat huden för dessa strålar.

Äfven på ett annat sätt sökte jag visa riktigheten af de Chardonnets slutsats rörande linsens absorption, enligt en idé hemtad från denne forskare.

---

[1]) Jemf. Widmark: Über den Einfluss des Lichtes auf die Haut. Hygiea Festband 1889. Beitr. zur Ophtalmologie. Leipzig 1891. S. 435.

Jag projicierade ett spektrum å en skärm och jämförde gränsen för den synliga delen däraf hos starropererade (alltså linslösa) och vanliga personer. I ett par fall föreföll det, som om de starropererade sågo längre ut i det ultravioletta spektrum än de normalögda. Resultatet var dock växlande och osäkert på grund af den mindre goda undersökningsmetoden. Jag måste därför för denna gång lemna oafgjordt, huruvida mediernas absorption hade någon betydelse för menniskoögats oförmåga att under vanliga förhållanden uppfatta ultravioletta strålar.

Innan jag går till en redogörelse för de nya undersökningar, hvilka jag företagit angående detta spörsmål, vill jag med några ord erinra om de olika åsigter, hvilka gjort sig gällande rörande ögats förmåga eller oförmåga att uppfatta ultravioletta strålar.

Att ögat under vanliga förhållanden icke uppfattar de kortvågiga ljusstrålarna, därom äro alla ense. Striden har egentligen gält, huruvida ögat är fullständigt okänsligt eller endast föga retbart för dessa strålar.

BRÜCKE[1]) iakttog vid sina försök, att ögonmedierna, och i synnerhet linsen, absorbera ultravioletta strålar. Han fann, att absorptionen hos sistnämda medium blef fullständig vid *M*-linien och att just vid denna linie spektrum börjar blifva lysande. Han slöt däraf att absorptionen i medierna är orsaken till strålarnas osynlighet.

Till ett helt annat resultat kommo DONDERS[2]) och REES, hvilka vid sin undersökning gingo till väga på följande sätt.

Solljus fick genom en springa falla först på ett flintglasprisma, sedan på ett kronglasprisma och slutligen på en akromatisk lins af 1,9 m. brännvidd. Det sålunda erhållna spektrum uppfångades på en skärm, öfverstruken med en lösning af svafvelsyradt chinin. De ultravioletta strålarna blefvo härigenom synliga. *N*-linien syntes väl och äfven *O*- och *P*-linien voro skönjbara. Små glaskärl med

[1]) Arch. f. Anat. und Physiologie. 1845. S. 262.

[2]) DONDERS: Über das Verhalten der unsichtbaren Lichtstrahlen von hoher Brechbarkeit in den Medien des Auges. Arch. für Anat. und Physiol. 1853. S. 459.

tvänne planparallela väggar fyldes med glaskropp och kammarvatten från nötkreatur. Linsen innesluten i sin kapsel upphängdes, suspenderad i glaskropp, med axeln vertikalt mot kärlens sidoväggar. Nöt, får och svin lämnade härtill material. Det undersöksmaterialet inneslutande glaskärlet fördes sedan antingen framför springan eller omedelbart framför spektrum. Men dettas ljusstyrka blef härigenom föga försvagad.

Särskildt gällde detta vid försöken med kammarvatten och glaskropp, samt med i glaskropp suspenderad hornhinnna från flere olika djur. Men äfven för linsen kunde endast en helt ringa absorption påvisas.

Till och med i hela *P*-gruppen visade sig i chininspektrum omisskänneligen en svag bild, framkallad genom koncentration af de svagast brytande strålarna, därest kärlet med linsen fördes framför denna del af spektrum.

Då de båda författarne således icke kunde konstatera någon egentlig absorption i ögonmedierna, drogo de den slutsatsen, att orsaken till de ultravioletta strålarnas osynlighet ligger i en direkt okänslighet hos näthinnan för dessa ljusvågor.

Stokes[1]) omnämner helt kort, att han i ett solspectrum, hvilket direkt träffat ögat, lyckats se linierna *M*, *N*, *P*, ja till och med än längre. För den försöksanordning, hvilken han dervid användt, redogör han emellertid ej.

Helmholtz[2]) underkastade frågan ett noggrant studium. Han reflekterade medelst en heliostat solljus genom en öppning i fönsterluckan in i det rum, där han experimenterade. Ljuset föll först på ett kvartsprisma och sedan på en kvartslins. I brännpunkten på den sistnämda stod en skärm, på hvilken den i ett orent spektrum förvandlade bilden af solskifvan uppkastades. Skärmen hade en springa, hvilken man kunde bringa till hvilken del af spektrum man önskade. Det genom denna springa trängande ljuset betraktade han med ett andra kvartsprisma.

---

1) Stokes: Philosophies transactions 1852, p. 558, not 73.

2) Helmholtz: Über die Empfindlichkeit der menschlichen Netzhaut für die brechbarsten Strahlen des Sonnenlichts. Poggendorffs Annalen 1855. S. 205.

Stod springan i den ultravioletta delen af spektrum, såg han dels ett svagt vanligt spektrum härrörande från det diffusa ljuset, dels bortom den violetta änden af detta spektrum en blå fläck, härrörande från det regelbundet brutna ultravioletta ljuset. I detta kunde han äfven urskilja något af ljuset i trakten af *L*- och *M*-linierna. För ljus af större brytbarhet lyckades han ej adaptera sitt öga.

Han öfverdrog nu skärmen, på hvilken spektrum föll, med chininpapper, så att den ultravioletta delen blef synlig genom fluorescens och betraktade sedan ljuset direkt genom öppningen i skärmen. Så långt spektrum på framsidan af skärmen var synligt genom fluorescens, kunde han nu äfven från baksidan genom öppningen i skärmen uppfatta det ultravioletta ljuset, dock icke såsom ett begränsadt fält, utan i form af den bekanta strålfigur, hvilken spridningskretsen från en aflägsen ljuspunkt antager. De på detta sätt iakttagna yttersta ultravioletta strålarna syntes honom ej svagare än strålarna vid *M*-linien. Han slöt däraf, att menniskoögat uppfattar de ultravioletta strålarna åtminstone så långt solspektrum sträcker sig.

LISTING[1] uppger helt kort, att gränsen för det synliga spektrum ligger vid λ 372,6 eller vid *M*-linien. Området från *M* till *R* faller, enligt honom, helt och hållet utom det direkt synliga spektrum och kan endast påvisas genom fluorescens.

SEKULIĆ,[2]) hvilken använde ett spektroskop med två flintglasprismor, kollimator och kikare samt direkt solljus, såg spektrum och de mörka linierna i detsamma ända till *N*-linien. De ultravioletta strålarna tedde sig för honom som ett ljusblått eller silfvergrått fält.

EISENLOHR[3]) använde vid sitt försök ett gitter. Spektrum uppfångades på en hvit porslinsskifva och gränsen för de syn-

---

[1]) LISTING: Über die Grenzen der Farben in Spctrum. Amtl. Bericht der 40:te Versaml. Deutsch. Naturforscher und Ärtzte zu Hanover 1865.

[2]) M. SEKULIĆ: Ultraviolette Strahlen sind unmittelbar sichtbar. Poggend. Annal. 146. S. 157. 1872.

[3]) Poggend. Annal. 98. S. 368. 1856.

liga strålarna bestämdes till λ 395,6 eller strax utanför *H*-linien. De utanför denna gräns liggande ultravioletta strålarna såg han endast då, när han lät spektrum falla på chininpapper eller vanligt hvitt papper.

SAUER[1]) nyttjade vid sina försök en elektrisk båglampa. Af ljuset från denna framställde han ett spektrum på en pappersskärm och såg därvid tydligt flera breda silfverfärgade linier utanför det violetta fältet. Men då han med ett vanligt spektroskop direkt iakttog ljuset från båglampan, märkte han ingenting af de silfvergrå linierna. »Måhända förklaras därför hela företeelsen genom fluorescens å det hvita papperet.»

DE CHARDONNET[2]) konstaterade, att ögonmedierna, särskildt linsen utöfvar en synnerligen kraftig absorption å de ultravioletta strålarna. Absorptionen för linsen börjar hos människan omedelbart utanför *H*-linien och blir fullständig vid *L*—*M*-linien. Han slöt sig därför till BRÜCKE's uppfattning rörande orsaken till de ultravioletta strålarnas osynlighet och sökte att leda riktigheten af denna åsigt i bevis genom att undersöka tvänne starropererade (alltså linslösa).

Vid undersökningen, hvilken företogs jämte SAILLARD, användes en FOUCAULT's spegel, bestående af en bergkristallplatta öfverdragen med ett tunnt silfverlager och hvilken, enligt uppgift, absorberade de lysande strålarna, men genomsläppte de ultravioletta mellan *O*- och *T*-linien.

De tvänne starropererade kunde nu genom denna spegel se en elektrisk ljusbåge och angifva dess läge, hvilket för en person med vanliga ögon var omöjligt. Näthinnan är således enligt DE CHARDONNET känslig för dessa strålar, men på grund af absorptionen i medierna äro de under vanliga förhållanden osynliga.

GAYET, som förnyade dessa försök med samma anordning, konstaterade DE CHARDONNET's uppgifter.[3])

---

[1]) L. SAUER: Experimente über die Sichtbarkeit utravioletter Strahlen. Poggend. Annal. 155. S. 602. 1875.

[2]) DE CHARDONNET: Journ. de Phys. théor. et appl. 1883. Série II. T. II, p. 223.

[3]) Société française d'ophtalmologie 31 Jan. 1884 et Recueil d'ophtalmologie 1884, enligt referat i Revue générale d'ophtalm.

Mot detta vackra och vid första påseendet så öfvertygande experiment, kan göras en afsevärd invändning. Brytbarheten af de ultravioletta strålarna är mycket starkare än brytbarheten af de lysande strålarna. Så fann HELMHOLTZ för sig själf längsta synvidden vara för rödt 8 fot, men för det yttersta ultravioletta ljuset mindre än 5 tum. Hans öga var således myopiskt för de röda strålarna mindre än en half dioptri, men för de ultravioletta omkring 8 dioptrier. Å en person, som är normalsynt för de röda strålarna, måste i öfverensstämmelse härmed de ultravioletta brytas framför näthinnan och således, om de äro i sig ljussvaga, blifva svårare att uppfatta. Men hos en starropererad är ögats refraktion minskad med 10—11 D. Hans öga bör således efter linsens aflägsnande vara bättre adapteradt för ultravioletta strålar än emmetropens, och häri kunde kanske orsaken ligga därtill, att han lättare uppfattar dem.

Vigtigare än denna på teoretiska grunder gjorda invändning är emellertid det förhållandet, att andra forskares uppgifter stå i strid med DE CHARDONNET's rön och iakttagelser. Bland dessa forskare är äfven den berömda franska fysikern MASCART[1]). Enligt honom absorbera visserligen ögonmedierna de kortvågiga strålarna, men icke fullständigt; och näthinnan är för dem så känslig, att den uppfattar den minsta strålning som framtränger till densamma. Vid en undersökning,[2]) hvilken han utförde med spektroskop af kvarts eller kalkspat å ett 20—30-tal personer, kunde han konstatera, att vanliga ögon percipierade hela solspektrum. Tre personer, hvilka alla voro närsynta, sågo ännu längre. En af dem uppfattade till och med λ 213, en gräns, hvilken MASCART med fotografiens hjälp icke lyckades uppnå (år 1869). Man skulle, enligt MASCART, sannolikt kunna se ännu längre, om man kunde aflägsna det diffusa ljuset i självfva spektroskopet, uppkommet därigenom, att under inflytande af den elektriska gnistan prisma och linser blifva fluorescerande och diffundera ett blåaktigt ljus, så att synfältet aldrig är fullständigt mörkt.

---

[1]) MASCART: Comptes rend. de l'Acad. d. Sciences 94. S. 167. 1883.
[2]) MASCART: Comptes rend. de l'Acad. d, Scienses 68. S. 402. 1869.

Soret, hvilken förut gjort undersökningar om ögonmediernas absorption af ultravioletta strålar, och därvid före de Chardonnet kommit till liknande resultat som denne,[1]) riktade sedermera sin uppmärksamhet äfven på frågan om dessa strålars synlighet.[2]) Han fann därvid gränsen för det synliga spektrum vara λ 383, eller ungefär *L*-linien för sig själf. Men för en yngre person, hvilken han undersökte, låg gränsen nära *Q*-linien. Soret söker förklara Mascart's iakttagelser som ett fluorescensfenomen. Han uppger, att han genom att framför ett spektroskop af kvarts eller kalkspat sätta ett vanligt lorgnettglas lyckades uppfatta en ljusning vid strålarna 22—26 af cadmiums spektrum. Men äfven cornea och linsen fluorescera och denna fluorescens borde ju framkalla samma effekt.

De ultravioletta strålarna skulle således, enligt Soret, icke vara omedelbart uppfattbara för näthinnan men blifva det medelbarligen genom att omsättas till lysande strålar af de fluorescerande medierna.

Det finnes således följande olika åsigter om näthinnans känslighet för de ultravioletta strålarna.

1. Näthinnan uppfattar icke dessa strålar, emedan de absorberas af medierna och således icke nå den ljusuppfattande hinnan (Brücke 1845). Aflägsnas linsen, det mest absorberande mediet, uppfattas strålarna (de Chardonnet 1883).

2. Näthinnan är i och för sig okänslig för dessa strålar (Donders 1853).

3. Näthinnan är för de ultravioletta strålarna föga känslig; dock kan hon uppfatta dem så långt solspektrum sträcker sig, om de lysande strålarna afbländas (Helmholtz 1854).

4. Näthinnan är så känslig för dessa strålar, att den uppfattar äfven den minsta mängd, som undgår absorptionen i medierna. Denna förmåga sträcker sig hos en del personer vida längre än det vanliga solspektrum, ja längre än fotografien förmår påvisa dem (Mascart 1869, 1883).

---

[1]) Soret: Comptes rend. de l'Académie des Sc. 88. S. 1013. 1879.

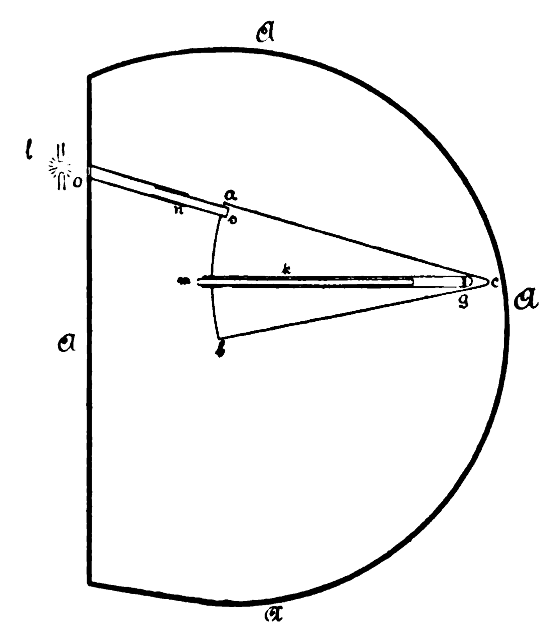
[2]) Soret: Comptes rend. de l'Académie des Sc. 97. S. 314. 1883.

5. Näthinnan uppfattar icke dessa strålar omedelbart, men medelbart, därigenom att de i medierna omsättas genom fluorescens till lysande strålar (SORET 1883).

Hvilkendera af dessa åsigter är den riktiga, syntes mig lätt kunna afgöras genom undersökning med ett lämpligt spektroskop. Mot de flesta försök som i detta hänseende hittils anställts kan nämligen en högst väsentlig anmärkning göras, den nämligen att tillfölje af de använda spectralapparaternas på refraction i prismer och linser grundade construktion det ej är möjligt att skilja det intryck på ögat det ultravioletta partiet af ett continuerligt spectrum förmår åstadkomma från inverkan af den städse betydliga mängd diffust ljus af lägre brytbarhet, hvarmed synfältet i sådana apparater oundvikligen är uppfylldt. För att undgå denna felkälla eller åtminstone reducera denna diffusa fältbelysning till ett minimum har jag på förslag af Prof. HASSELBERG användt ett gitterspectroskop i hvars construction inga andra brytande medier än ett ocular af qvarts ingingo. Detsamma bestod nämligen af ett Rowlands concavgitter af $1^m,6$ krökningsradie och ungefär 3^{cm} diameter med 14,438 linier på engelsk tum, så uppställdt att dess midtpunkt, spektroskopets springa och ocularets brännpunkt städse bildade en rätvinklig triangel, hvarigenom vilkoret för att hvilken del som helst af spectret skulle befinna sig i focus städse var uppfylldt. Detta resultat ernåddes genom den i närstående figur skisserade construction.

Omkring punkten *g* å en sectorformig solid trääställning *abc* är en träarm eller alidad vridbar, som vid *g* i en med nödiga correctionsskrufvar försedd kapsel uppbär gittret och vid *m* qvartsocularet på ett en gång för alla så regleradt afstånd från gittret att dettas krökningscentrum faller i ocularets focalplan och bådas hufvudaxlar dessutom coincidera. Ställes nu springan *s*, som är rörlig längs *ac* i hvarje fall så att vinkeln vid *s* är 90° så är den mot alidadens läge svarande delen af spectret i focus. Den skarpa inställningen af spectrets olika delar sker följaktligen genom förskjutning af *s* längs linien *ac* hvilken förskjutning kan afläsas på en å ställningen anbragt skala.

För att i möjligaste mån utestänga diffust ljus voro dels längs alidaden *mc* ett svärtadt rör *k* i omedelbar anslutning till ocularet och af ungefär 1^m längd anbragt, dels var mellan springan *S* och en öppning *o* i observationsrummets vägg ett dylikt rör fästadt så att från den utanför detta rum uppställda såsom ljuskälla tjenande båglampan *l* ljus genom detta rör kunde nå springan utan att diffunderas i det nämnda mörka rummet i hvilket apparaten var uppställd och hvarest försöken anställdes. Detta oaktadt företedde likväl synfältet en märklig, hufvudsakligen



från gittret härrörande diffus belysning, men då spectret som användes var diskontinuerligt i det båglampornas poler bestodo af jern, så kunde härigenom intet misstag uppstå, enär de objecter som skulle iakttagas voro skarpa linier och patienten sålunda endast hade att så länge förskjuta alidaden, tills dessa linier ej längre kunde af honom uppfattas.

För att bestämma läget af denna yttersta gräns d. v. s. ungefärliga våglängden för de ännu tydligen skönjbara linierna var bågen *ab* försedd med en millimeterskala angifvande

alidadens läge. De våglängder som motsvara denna skalas olika streck erhöllos ur en curva construerad på det sätt att i det synliga spectret ett antal kända metall-linier inställdes hvarefter afläsningarne afsattes såsom abscissor vid motsvarande våglängder såsom ordinater. Den genom dessa punkter lagda curvan är en rät linie hvars förlängning åt ultraviolett ger det för denna del nödiga orienteringsmedlet. Den motsvarande skarpa inställningen af springan *s* erhölls på samma sätt genom grafisk extrapolation med tillräcklig noggranhet.

Med det sålunda erhållna spektrum undersöktes 59 personer. Innan jag redogör för resultatet af undersökningen vill jag först påpeka ett par anmärkningsvärda omständigheter.

Nästan alla de undersökta tillhörde den bildade klassen. De fleste öfver 20 år voro medicine studerande, läkare och professorer, vande att se i kikare och mikroskop. Jag vill särskildt framhålla detta, emedan det vid den längre fram företagna undersökningen af starropererade visade sig synnerligen vigtigt att vid undersökningen ej använda obildade personer.

Det var vid undersökningen ganska svårt att noggrant inställa de ljussvagaste linierna (= de mest kortvågiga ljusstrålarna) midt i synfältet. Lättare gick det att iakttaga linierna något excentriskt. Ofta uppgåfvo de undersökta, att de sågo linier på båda sidor, men midt för, i och nära fixationspunkten, kunde de ej iakttaga några sådana. Jag lät därför vid mina experiment den undersökta först skjuta kikaren så långt åt vänster, att alla linier försvunno och sedan draga den tillbaka åt höger så långt att linier åter väl framträdde. Iaktagandet af linierna underlättades härigenom mycket, men inställningen blef å andra sidan mindre noggrann, i allmänhet angifvande ett ställe något längre in i det ultravioletta spektrum än det verkliga.

För iakttagelsen af de ultravioletta strålarna hade äfven intensiteten af ljuskällan en ganska stor betydelse. Den elektriska båglampa, hvilken vid försöket användes, egde en styrka af 15 Ampère och motsvarade, försedd med kolspetsar, en ljusstyrka

af 5,000 normalljus. Då lampan under försöken stundom flammade till, framträdde ofta för ett ögonblick en del linier, hvilka vid den vanliga ljusstyrkan icke kunde iakttagas. Den gräns, där ögat upphörde att uppfatta ljus, var således icke absolut utan relativ till den ljusstyrka som användes.

Af de undersökta voro 48 under 55 år, 11 hade öfverskridit denna åldersgräns. En sammanställning af iakttagelserna å de 47 personerna under 55 år ådagalade, att det normala menniskoögat endast förmår iakttaga de ultravioletta strålar, hvilka ligga närmast den violetta delen af spektrum. Den kortaste ljusvåg, hvilken någon af dessa personer kunde uppfatta var λ 371. För det stora flertalet sträckte sig dock gränsen för den synliga delen af det ultravioletta spektrum på långt när icke så långt. För de flesta låg den vid eller innanför λ 380. För en person låg den vid λ 395, eller just vid den lysande delens gräns. För en 10-årig gosse låg den till och med vid λ 398. Sistnämda uppgift torde dock böra upptagas med en viss försigtighet på grund af den undersöktes späda ålder.

Alla uppfatta den lilla del, som var skönjbar af de ultravioletta strålarna, såsom ljussvaga, gråhvita eller något gråblå linier.

Resultatet stämmer särdeles väl med DE CHARDONNET's undersökningar om de ultravioletta strålarnas absorption af ögonmedierna, specielt linsen. Sistnämda mediums absorption börjar enligt honom, såsom jag förut nämnt, omedelbart utanför *H*-linien och blir fullständig vid *L* eller *M*. Men *M*-linien (λ 372,5) kan i det närmaste betraktas såsom den yttersta gräns, jag erhöll för det synliga spektrum. Endast en af de undersökta uppfattade ännu kortare ljusvågor eller λ 371. Dock är härvid att beakta, att de siffror jag erhöll sannolikt voro något lägre än de verkliga (jämf. s. 297).

I DE CHARDONNETS arbete om absorptionen i linsen finnes en antydan därom, att den skulle vara starkare hos äldre än hos yngre individer af samma djurart. Så låg hos oxen gränsen för linsens absorption vid *L*—*M* linien, men hos kalfven vid *R*—*r*. SORET uppger, såsom förut anförts, att gränsen för det

synliga spektrum låg för honom själf vid λ 383, men för en yngre person vid *Q*-linien.

På grund af dessa uppgifter har jag gjort en sammanställning af de undersökta personerna enligt åldersklasser, för att utröna om individens ålder hade någon betydelse för gränsen af det synliga spektrum. Undersökningen visade följande.

I åldern 10 år och därunder undersöktes endast 3 individer. Den ena (9 år) uppgaf som gräns λ 381; den andra (10 år) λ 390 och den tredje (10 år) λ 398. Jag är dock ej rätt säker, huruvida så unga personers uppgifter kunna anses tillförlitliga. Resultatet anföres här i sammanhang med de öfriga undersökningarna, men för öfrigt kommer jag i det följande ej att taga någon hänsyn till dessa tre individer.

Hos 10 individer mellan 11 och 20 år växlade gränsen mellan λ 378 och λ 395 samt låg i medeltal vid λ 386.

Hos 14 individer mellan 21—30 år växlade den mellan λ 371 och λ 395. Medeltalet var här λ 382,5.

Hos 6 individer mellan 30—40 år växlade gränsen mellan λ 372,5 och λ 393 samt låg i medeltal vid λ 382,9.

Bland 13 personer mellan 40 och 50 år växlade gränsen mellan 380,5 och 394,5 samt låg i medeltal vid 388,7.

Af 50—60-åringar undersöktes endast 3 personer. Af dem såg en till λ 378,5, en till λ 394,5 och en till λ 402. Sistnämda person var 55 år gammal och den äldste i denna åldersklass.

Af personer öfver 60 år undersöktes 10, en af dessa på båda ögonen. Jag anför här i detalj resultatet af undersökningen.

62 år	λ 379
64 »	» 400,6
	» 402
68 »	» 399,4
68 »	» 403,7
68 »	» 408,2
68 »	» 401
69 »	» 399,7
70 »	» 405

74 år . . . . λ 410,2
74 » . . . . » 410,8

Af sammanställningen enligt ålder framgår således, att medelgränsen för den synliga spektrum håller sig ungefär oförändrad upp till 55 års ålder. Siffrorna visa visserligen någon stigning från årsklassen 20—30 (λ 382,5), till årsklassen 30—40 (λ 382,9) och årsklassen 40—50 (λ 388,7). Men å andra sidan är medeltalet för åldersklassen 10—20 år λ 386. Tager man de högsta och lägsta talen för de tre förstnämda åldersklasserna, erhållas för den första klassen resp. λ 371 och λ 395, för den andra λ 372,5 och λ 393, samt för den tredje λ 380,5 och 394,5. Lägges härtill att af de tvänne undersökta personerna mellan 50 och 55 år en såg till λ 394,5 och den andra till λ 378,5, måste man däraf draga den slutsatsen, att gränsen i det stora hela föga ändras under åldern intill 50—55, om ock en ringa tillbakaflyttning efter 40 år måhända kan spåras.

Från 55 år är däremot ålderns betydelse särdeles påfallande. Af 11 undersökta (12 ögon) fanns endast en, hvilken förlade gränsen för det synliga spektrum inom de ultravioletta strålarnas område, hos alla de öfriga låg gränsen inne i det violetta fältet. Orsaken till denna påfallande inskränkning af det lysande spektrum åt den kortvågiga sidan, torde med all säkerhet vara att tillskrifva senila förändringar i linsen. Också hade de 5 personer, hvilka jag blef i tillfälle att närmare undersöka med sned belysning och ögonspegel, började linsgrumlingar. Dock tror jag att de obetydliga kortikalgrumlingarna därvid ej spelade särdeles rol, utan mera den gulaktiga färg, som kärnan erhåller hos äldre personer. Ty så snart ett medium antager en gulaktig färg, absorberar det som bekant kraftigt de kortvågiga ljusstrålarna.

Af de båda 74-åringarna hade den ena en helt liten grumling vid främre polen; *S* 0,7 med + 2,00. Den andre, hvilken äfvenledes hade började katarakt med ett fåtal radiära grumlingar i främre och bakre kortikalis, egde en synskärpa af 0,6.

Dessa tvänne äldste bland alla undersökta sågo endast till λ 410,2 och λ 410,8 eller knappt till *h*-linien.

Om nu redan dessa undersökningar gjorde det ganska sannolikt, att ögonmediernas och specielt linsens absorption utöfvar det största inflytande på de ultravioletta strålarnas mer eller mindre synlighet, kunde visshet härom erhållas endast medels jämförande iakttagelser på starropererade. Jag trodde mig äfven för en sådan undersökning ega ett rikt och lämpligt material i de på Serafimerlasarettets ögonklinik behandlade kataraktpatienterna, men jag fann snart att dessa icke voro därtill särdeles tjenliga.

De starropererade hafva nämligen i början ofta en ganska otillfredsställande synskärpa, och först flere månader efter operationen, långt sedan de lemnat kliniken, erhålla de efter hand god syn. Därjemte lida de vanligen af astigmatism. Utan dennas korrektion erhålla de ofta en synskärpa af endast 0,1—0,2. För undersökningen behöfves alltså korrektion af en sphärisk-cylindrisk lins. En sådan är visserligen temligen lätt att anskaffa af glas. Men glas absorberar kraftigt de ultravioletta strålarna och är således på grund häraf alldeles olämpligt. Att åter tillverka särskildt korrektionsglas af bergkristall för hvarje patient låter sig knappast göra. Men härtill äro klinikpatienterna nästan alltid obildade personer, för hvilka sjelfva undersökningen erbjuder ganska stora svårigheter. Endast det att titta i en kikare var tydligen ej någon lätt sak för dem. Så snart lampan släcktes i undersökingsburen förlorade de vanligen okularet ur sigte och hela undersökningen blef om intet. Jag beslöt därför att till en början inskränka mina studier till endast 4 personer, hvilka alla voro opererade enligt den enkla extraktionsmetoden och hade fullkomligt klar pupill samt utmärkt synskärpa. 3 af dem tillhörde den bildade klassen och hade efter operationen en refraktion af omkring + 10,00. Den bergkristallins af 10 dioptier, hvilken jag förfogade öfver, korrigerade således någorlunda deras refraktions anomali. Den fjärde patienten tillhörde arbetsklassen. Han var opererad å båda ögonen och hade en refraktion af + 13,00.

Resultatet af undersökningen å de 4 starropererade följer här nedan.

N:r I. Disponenten C. W. 59 år.

Opererad för 6 månader sedan. Ingen astigmatism; $h + 10,00$. Såg till λ 313.

N:r II. Fru H. 68 år.

Extraktion för ett år sedan; en månad senare sekundär discission. Pupillen fullkomligt klar. $S = 1,0$ med $+ 8,00 \bigcirc + 2,00$. 30°. Denna patient såg likaledes till λ 313.

N:r III. Lennart L. Agent. 63 år.

Starrextraktion för 2 år sedan; 3 veckor efteråt discission af efterstarr. S 0.9 med $+ 9,00 \bigcirc + 2,00$. 150°. Såg till λ 342.

N:r IV. F. J. P. Arbetare. 65 år.

Starrextraktion för 8 månader sedan å vänster öga; $S = 1,0$ med + 13,00. Såg till λ 340. Å högra ögat var patienten opererad för 3 månader sedan; han hade här en synskärpa af 0,7 med + 13,00. Såg med detta öga till λ 344,5.

Undersökningen af alla fyra patienterna gaf i det afseendet enstämmigt resultat, att de sågo vida längre ut i det ultravioletta spektrum än de förut undersökta personerna. N:r IV, som såg minst, uppfattade dock ljus vid 344,5, d. v. s. 27 λ längre bort än någon af de normalögda. Något misstag kunde härvid ej ega rum, ty alla de fyra undersökte fingo 3 gånger göra inställning. De hade endast ljuset i röret k att rätta sig efter i den för öfrigt mörka buren och de kunde således under inställningen icke se apparaten för öfrigt, aldra minst skalan. På tre af de undersökande växlade inställningen vid de tre försöken med endast en half skaldel (1,5 λ). Endast för n:r IV var växlingen något större eller 1,6 skaldelar (4,8 λ).

Särdeles intressant var pat. n:r II. Hon hade å det andra ögat cataracta incipiens med en ännu kvarstående synskärpa af 0,2. Med detta öga, där linsen ännu var kvar, om ock delvis grumlad, uppfattade hon ljus endast till λ 399,4. En skilnad således mellan de båda ögonen af 86,4 λ.

Linierna i den första delen af det ultravioletta spektrum syntes för de starropererade med blå eller violett färg. N:r IV såg dem med vänstra ögat blå till λ 362, längre ut tedde de sig för honom som ett ljussvagt grått. Med det andra ögat såg han dem blå eller violetta till λ 370. N:r 1 såg spektrallinierna violetta till λ 347,5. N:r 2 såg linierna violetta till λ 340. N:r 3 såg linierna violetta eller blå till λ 354. Utanför de angifna gränserna hade linierna en gråaktig, allt ljussvagare färg.

Enligt DE CHARDONNET ligger gränsen för spektrum, efter ljusets passage genom hornhinnan, vid S med spår till T. Glaskroppen åter genomsläpper strålar till S med spår till s. Därest de ultravioletta strålarnas osynlighet skulle bero endast på mediernas absorption, borde således ögat efter linsens aflägsnande uppfatta ljus till S eller möjligen till s. Så var också ungefär förhållandet med patienterna n:r I och n:r II hvilka sågo de ultravioletta strålarna till λ 313 eller i det närmaste till S. N:r III åter såg endast till λ 342, n:r IV såg med det ena ögat till λ 340 och med det andra till λ 344,5, d. v. s. endast till trakten af O-linien.

Det måste således finnas äfven en annan faktor, hvilken inverkar på ögats förmåga att uppfatta dessa strålar, och sannolikt består denna i någon egendomlighet hos näthinnan själf. Jag vill i detta sammanhang erinra om den nästan samstämmiga uppgiften af alla undersökta personerna, att de sågo linierna i det ultravioletta fältet tydligare excentriskt än centralt. Olika ställen af näthinnan äro således i olika grad känsliga för dessa strålar. Det kan då ej förundra, att äfven individuela olikheter i näthinnan hos olika personer finnas.

Möjligen är det absorptionen i väfnaden som här spelar en afsevärd rol. MORITZ SACHS[1]) har nämligen ådagalagt, att denna inom den lysande delen af spektrum tilltager i hög grad åt den kortvågiga sidan. Medan vid D-linien endast $^1/_{30}$—$^1/_{20}$ af ljuset absorberades, var detta förhållandet $^1/_5$—$^2/_5$ från F- linien ut i

[1]) Ueber die specifische Lichtabsorbtion des gelben Fleckes der Netzhaut. Arch. f. gesammt. Physiologie. Bd 50. S. 574. 1891.

det violetta fältet. Redan häraf torde det få anses ganska sannolikt, att en kraftig absorption af äfven ultravioletta strålar eger rum i macula lutea.

Att näthinnan absorberar ultravioletta strålar, därför hafva vi för öfrigt ett direkt bevis i hennes egenskap att fluorescera för dessa strålar. Redan HELMHOLTZ[1]) fann att näthinnan hos lik fluorescerar. SETSCHENOW[2]) ådagalade att denna egenskap likaledes tillkommer näthinnan hos nyss dödade djur (kanin, oxe). v BEZOLD och ENGELHART[3]) iakttogo med ögonspegeln att näthinnan äfven å det lefvande menniskoögat fluorescerar för de ultravioletta strålarna. Om man nu får antaga, att denna egenskap tillkommer näthinnan i sin helhet, skulle alltså en del af dessa strålar aldrig såsom sådana nå fram till de ljuspercipierande elementen, hvilka ju intaga ett af de yttersta lagren i näthinnan.

SORET har, såsom jag förut nämt, framstält den hypotesen, att de ultravioletta strålarna skulle vara i sig själfva osynliga, men blifva synliga genom den fluorescens de framkalla i ögats medier. För denna åsigts riktighet tala ej mina försök.

Tänka vi oss den möjligheten, att fluorescensen i ögats *främre* medier vore orsaken till de ultravioletta strålarnas synlighet, då borde ögats förmåga att uppfatta dem vara större, om linsen är kvar än om den är aflägsnad. Ty linsen fluorescerar starkast af alla medier. Men just det motsatta eger, som jag ofvan visat, rum, i det att linslösa ögon uppfatta de ultravioletta strålarna vida bättre än normala ögon.

Användandet af ett diskontinuerligt spektrum lemnar ytterligare ett kraftigt, och som det synes mig, ostridigt bevis mot SORET's teori. Just det förhållandet, att de ultravioletta strålarna i detta uppfattas som linier eller band, visar alldeles

[1]) Poggend. Ann. 94. 2. S. 208. Ueber die Fluorescens der lebenden Netzhaut.

[2]) Arch. f. Opht. B. 5. 2. S. 205.

[3]) Sitzungsb. d. math. Phys. Classe d. K. b. Acad. d. Wissensch. zu München B. 7, h. 1. S. 226.

bestämdt, att de direkt uppfattas af näthinnan. Ty vid fluorescens utsända medierna divergent ljus, hvilket omöjligen kan sammanbrytas till en bild på näthinnan.

Sistnämnda invändning kan göras äfven mot det antagandet, att de ultravioletta strålarna skulle blifva synliga genom fluorescens i själfva näthinnan, frånsedt naturligtvis här den möjligheten, att de i själfva de ljuspercipierande elementen omsättas i lysande strålar. Det fluorescerande partiet måste ju utsända lysande strålar åt alla håll. Ligger det framför stafvar och tappar, träffas dessa således af divergent ljus. Men detta kan på sin höjd uppfattas såsom en ljusning, icke såsom en formad bild; ty betingelsen härför, dess sammanbrytning, saknas.

Af mina undersökningar framgår således följande:

Det normala menniskoögat uppfattar endast en ringa del af de ultravioletta strålarna. Gränsen för det synliga spektrum växlar för olika personer, men ligger i allmänhet innanför *L*—*M* och endast i sällsynta undantagsfall utanför dessa linier.

Strålarna uppfattas direkt och icke genom fluorescens.

De iakttagas lättare excentriskt än centralt.

Äldre personer uppfatta en mindre del af de ultravioletta strålarna än yngre personer. Denna olikhet är dock föga märkbar intill 55 år, men efter denna åldersgräns ganska tydlig och efter 64 år särdeles framträdande. Gränsen för det synliga spektrum är efter sistnämda ålder i regel tillbakaskjuten in i det violetta fältet.

Orsaken till menniskoögats ringa förmåga att uppfatta ultravioletta strålar är i främsta rummet linsens absorbtion. Aflägsnas linsen uppfattas en stor del af strålarna. Hos en del starropererade sammanfaller gränsen för det synliga spektrum i det närmaste med gränsen för hornhinnans absorption.

Den violetta delen af spektrum är för de starropererade betydligt förlängd. Gränsen växlar för olika undersökta mellan λ 340—370.

Sedan dessa satser blifvit faststälda, torde det ej vara utan intresse att kasta en granskande återblick på de forskares undersökningar, hvilka ledt till ett annat resultat.

Vi finna då först att DONDER's vid sina försök om ögats absorption icke använde menniskoögon utan svin-, får- och nötögon. Det spektrum, han nyttjade, var framstäldt medelst ett flintglas och ett kronglasprisma samt sträckte sig endast till *P*-linien. Men gränsen för linsens absorption ligger hos svinet, fåret och kalfven först vid *R*-linien,[1]) och icke såsom hos menniskan vid *L*- till *M*-linien. Under förutsättning att de nötögon han använde voro från unga djur, får således de negativa resultat han erhöll en otvungen förklaring, dels däri att hans försöksanordning var bristfällig, dels däri att han utan vidare tillämpade å menniskoögat de slutsatser, hvartill han kommit genom undersökning å djur.

HELMHOLTZ såg vid sin första och särdeles noggranna försöksanordning endast till *L*—*M*-linien. Men vid sin andra försöksanordning hade han tydligen ett orent spektrum. Han säger själf, att han därvid uppfattade ljuset icke som ett begränsadt fält, utan i form af den bekanta strålfigur, hvilken spridningskretsen från en aflägsen ljuspunkt antager. Då det ljus, han iakttog, icke hade någon bestämd form, är det ganska antagligt att han förväxlade det diffusa ljuset från prismat med de ultravioletta strålarna.

SECULIĆ's iakttagelse af ljus ända till *n*-linien kan möjligen bero dels därpå att han använde en stark ljuskälla, dels på den individuella olikheten i linsens absorption hos olika personer. I det föregående har jag omnämt att gränsen för spektrum växlade icke blott för olika personer, utan äfven med ljuskällans styrka. Jag vill i detta sammanhang nämna, att vid en undersökning, hvilken jag företog å sex personer med i lampans ljusbåge infördt bly i stället för järn, en af de undersökta uppgaf sig se tvänne linier vid λ 365,5—363,3, där just denna förstnämda metalls spektrum eger mycket starka linier. En annan person,

[1]) Jämf. DE CHARDONNET, l. c.

en 33-årig man, hvilken i järnspektrum ej såg längre än till λ 388 såg i blyspektrum till λ 382—384.

STOKE's undersökningar undandraga sig all kritik därigenom, att den nyttjade försöksanordningen ej omnämnes.

SAUER's resultat åter förklaras otvunget af den förmodan han själf framkastar, att strålarnas synlighet berodde på fluorescens i det hvita papperet, hvarpå spektrum var uppkastadt.

Svårare är det att bringa MASCART's uppgifter i öfverensstämmelse med mina rön och iakttagelser. Ej så få af de personer jag undersökte voro myoper, men hos ingen kunde jag finna någon större förmåga, än hos de normalsynta, att uppfatta de ultravioletta strålarna. Själf är jag myop — 4.00, men såg trots detta icke längre än till 394,5. Det är mig därför omöjligt, att på MASCART's egendomliga iakttagelse, att närsynta skulle se längre i det ultravioletta fältet, gifva någon bättre förklaring än den SORET antyder (jemf. sid. 294).

Till professor HASSELBERG, kvilken konstruerat och justerat det af mig använda spektroskopet, samt till professor TIGERSTEDT, som lemnat mig rum å sitt laboratorium för undersökningen, beder jag härmed få uttrycka min djupt kända tacksamhet.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 278.)

Berkeley. *University of California.*
Bulletin of the Department of Geology. Vol. 1: N:o 12—14; 2: 1-3. 1896. 8:o.
Report of work of the agricultural experiment stations 1894 95 8:o.
Agricultural experiment station. Bulletin. N:o 110—111, 113—115. 1896. 8:o.
Report of the viticultural work 1887—93. 8:o.
6 skrifter om vinodling. 8:o.

Berlin. *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 48 (1896): H. 4. 8:o.

Bern. *Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften.*
Neue Denkschriften. Bd 35. 1896. 4:o.
Actes. Session 78 (1895). 8:o.
Verhandlungen. Jahresvers. 79 (1896). 8:o.
Compte-rendu des travaux. Session 78 (1895)—79 (1896). 8:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 32: N:o 2—9. 1896—97. 8:o.

Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen. Bd 14: H. 2. 1897. 8:o.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 33 (1897): N:o 3. 8:o.

— *Société R. de botanique.*
Bulletin. T. 35. 1897. 8:o.

— *Société Belge de microscopie.*
Annales. T. 21. 1897. 8:o.
Bulletin. Année 23 (1896/97): N:o 4—6. 8:o.

Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Jahresbericht. Jahr 1894. 8:o.
Mittheilungen. Bd 11: H. 1. 1897. 8:o.
Földtani közlöni. K. 26 (1896): F. 11—12. 8:o.

— *Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 24 (1894). 4:o.

Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Bulletin. (4) Vol. 10 (1896): Fasc. 1—2. 8:o.

Calcutta. *Geological survey of India.*
Records. Vol. 30 (1897): P. 1. 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 30: N:o 4—5. 8:o.

Cape Town. *South African philosophical society.*
Transactions. Vol. 7: P. 2. 1896. 8:o.

(Forts. å sid. 324.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 5.
Stockholm.

Einige neue Formeln der Theorie der elliptischen Functionen.

Von FRANS DE BRUN.

[Mitgetheilt den 12 Mai 1897 durch M. FALK.]

Von dem algebraischen Gebilde der ersten Ranges

$$\eta^2 + \eta(1 + p\xi) + \xi^3 = 0\,, \tag{1}$$

wo p eine arbiträre Constante bezeichnet, ausgehend findet mann, dass diese durch die Substitutionen

$$\left.\begin{array}{lll} \xi' = \dfrac{\xi}{\eta} & \xi'' = \dfrac{\xi'}{\eta'} = \dfrac{\eta}{\xi^2} & \xi''' = \dfrac{\xi''}{\eta''} = \xi \\ \eta' = \dfrac{\xi^3}{\eta^2} & \eta'' = \dfrac{\xi'^3}{\eta'^2} = \dfrac{\eta}{\xi^3} & \eta''' = \dfrac{\xi''^3}{\eta''^2} = \eta \end{array}\right\} \tag{2}$$

in sich selbst übergeht.

Auch besteht

$$du = \frac{d\xi}{2\eta + 1 + p\xi} = \frac{d\xi'}{2\eta' + 1 + p\xi'} = \frac{d\xi''}{2\eta'' + 1 + p\xi''}\,. \tag{3}$$

Wenn wir ξ und η als Functionen von u mit $E(u)$ und $F(u)$ respective bezeichnen, finden wir, da diese eindeutige Functionen sind, dass

$$\left.\begin{array}{l} E(u + A) = \dfrac{E(u)}{F(u)} \\ F(u + A) = \dfrac{E^3(u)}{F^2(u)} \end{array}\right\}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} E(u+2A) &= \frac{F(u)}{E^2(u)} \\ F(u+2A) &= \frac{F(u)}{E^3(u)} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} E(u+3A) &= E(u) \\ F(u+3A) &= F(u) \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Durch

$$\left.\begin{aligned} y &= 2\eta + 1 + p\xi \\ x &= \frac{p^2}{12} - \xi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

übergeht

$$\eta^2 + \eta(1 + p\xi) + \xi^3 = 0$$

in die Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 , \tag{8}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= 2p + \frac{p^4}{12} \\ g_3 &= -1 - \frac{p^3}{6} - \frac{p^6}{216} \end{aligned}\right\}.$$

Weiter ist

$$du = -\frac{dx}{y},$$

$$\because \left.\begin{aligned} x &= pu \\ y &= -p'u \end{aligned}\right\},$$

$$\because \xi = \frac{p^2}{12} - pu = E(u) . \tag{9}$$

Von (4), (5) und (6) erhalten wir

$$E(u)\,E(u+A)\,E(u+2A) = 1$$

und also mit Verwendung der (9)

$$\left(pu - \frac{p^2}{12}\right)\left(p(u+A) - \frac{p^2}{12}\right)\left(p(u+2A) - \frac{p^2}{12}\right) = -1 , \tag{10}$$

eine Formel, die analog mit

$$(pu - e_1)(p(u - \omega) - e_1) = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$$

ist.

Um indessen die Bezeichnungen und Formeln besser in Uebereinstimmung mit den gewöhnlichen Weierstrassischen zu bekommen, wollen wir, anstatt die vorhergehende Gedankenreihe fortzusetzen, von

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u - v)\,\sigma(u + v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

ausgehen und das Produkt

$$[p(u - v) - pv][pu - pv][p(u + v) - pv]$$

betrachten.

Mann findet dasselbe gleich

$$-\frac{1}{\sigma^6 v}\,\frac{\sigma(u - 2v)}{\sigma(u + v)}\cdot\frac{\sigma(u + 2v)}{\sigma(u - v)}.$$

Wenn $3v$ eine Periode für pu ist, haben wir

$$\sigma(u - 2v) = \sigma(u + v - 3v) = -\varepsilon\cdot e^{-2\tilde{\eta}\left(u+v-\frac{3v}{2}\right)}\sigma(u + v)$$

$$\sigma(u + 2v) = \sigma(u - v + 3v) = -\varepsilon\cdot e^{+2\tilde{\eta}\left(u-v+\frac{3v}{2}\right)}\sigma(u - v)$$

$$(\varepsilon^2 = 1).$$

Also ergiebt sich

$$[p(u - v) - pv][pu - pv][p(u + v) - pv] = -\frac{e^{2\tilde{\eta}v}}{\sigma^6 v}, \tag{11}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{\eta} &= 2p\eta + 2q\eta^1 \\ 3v &= 2p\omega + 2q\omega^1 \end{aligned}\right\}.$$

Hier sind

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{\sigma^1(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{\sigma^1\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega}{3}\right)} + \frac{\sigma^1\left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right)} \\ \eta^1 &= \frac{\sigma^1(\omega^1)}{\sigma(\omega^1)} = \frac{\sigma^1\left(\frac{2\omega^1}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega^1}{3}\right)} + \frac{\sigma^1\left(\frac{4\omega^1}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega^1}{3}\right)} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

In dem folgenden gebrauchen wir die Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \frac{2\omega}{3}, \quad v_2 = \frac{2\omega^1}{3}, \quad v_3 = \frac{2\omega + 2\omega^1}{3}, \quad v_4 = \frac{2\omega + 4\omega^1}{3} \\ pv_\nu = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4) \end{array}\right\} . \tag{14}$$

Dann geht aus (11) hervor, dass

$$\prod_{\substack{\lambda \pm \nu \\ \lambda=1}}^{4}{}^1 (c_\lambda - c_\nu) = - \frac{e^{2\eta_\nu v_\nu}}{\sigma^6 v_\nu} . \tag{15}$$

Weil

$$\sigma(3v_\nu) = 0 ,$$

muss

$$p'v_\nu p'''v_\nu = p''^2 v_\nu . \tag{16}$$

Daraus folgt, dass c_1, c_2, c_3 und c_4 Nullstellen der Function

$$F(x) = x^4 - \tfrac{1}{2} g_2 x^2 - g_3 x - \tfrac{1}{48} g_2^2 \tag{17}$$

sind.

Da die erste Ableitung dieser Function

$$F^1(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 \tag{18}$$

ist, findet mann, weil

$$F^1(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) + (x - c_4)\psi(x) ,$$

$$\therefore\ F^1(c_4) = (c_4 - c_1)(c_4 - c_2)(c_4 - c_3) = \frac{e^{2\eta_4 v_4}}{\sigma^6 v_4} :$$

$$p'^2 v_4 = \frac{e^{2\eta_4 v_4}}{\sigma^6 v_4}$$

und allgemein

$$\left.\begin{array}{r} p'^2 v_\nu = \frac{e^{2\eta_\nu v_\nu}}{\sigma^6 v_\nu} \\ \prod_{\substack{\lambda \pm \nu \\ \lambda=1}}^{4}{}^1 (c_\lambda - c_\nu) = - p'^2 v_\nu \end{array}\right\} . \tag{19}$$

Unsere Gleichung (11) kann also

$$[p(u - v_\nu) - c_\nu][pu - c_\nu][p(u + v_\nu) - c_\nu] = - p'^2 v_\nu \tag{20}$$

geschrieben werden.

Aus dieser und

$$p(u \pm v) = pv + \frac{(6p^2v - \frac{1}{2}g_2)(pu - pv) + 4p^3v - g_2pv - g_3 \mp p'up'v}{2(pu - pv)^2}$$

folgen die beiden Formeln

$$\frac{p'u}{pu - c_\nu} = \frac{p'v_\nu}{p(u - v_\nu) - c_\nu} - \frac{p'v_\nu}{p(u + v_\nu) - c_\nu} \tag{21}$$

$$\frac{1}{p(u - v_\nu) - c_\nu} + \frac{1}{pu - c_\nu} + \frac{1}{p(u + v_\nu) - c_\nu} = -\frac{p''v_\nu}{p'^2v_\nu}. \tag{22}$$

Wir gehen nun acht neue Functionen einzuführen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\nu 1}(u) &= \frac{e^{-\frac{2\eta_\nu}{3}u}\sigma(u + v_\nu)}{\sigma v_\nu} \\ \sigma_{\nu 2}(u) &= \frac{e^{\frac{2\eta_\nu}{3}u}\sigma(u - v_\nu)}{\sigma v_\nu} \\ &(\nu = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Dann ist

$$F(pu) = \prod_{\nu=1}^{4}(pu - pv_\nu) = \frac{\sigma_{11}(u)\sigma_{12}(u)\sigma_{21}(u)\ldots\sigma_{42}(u)}{\sigma^8(u)}, \tag{24}$$

$$\therefore\ p'^3(u) = \frac{d}{du}\frac{\sigma_{11}(u)\sigma_{12}(u)\sigma_{21}(u)\ldots\sigma_{42}(u)}{\sigma^8 u}. \tag{25}$$

Weiter findet mann

$$\sigma(3u) = 3\sigma(u)\,\sigma_{11}(u)\,\sigma_{12}(u)\,\sigma_{21}(u)\ldots\sigma_{42}(u). \tag{26}$$

Die Fundamentalformel der $\sigma(u)$ giebt

$$\sigma(2v_\nu) = \sigma(v_\nu)\cdot e^{\eta_\nu v_\nu}\ (\nu=1, 2, 3, 4). \tag{27}$$

Aus

$$pu - c_\nu = -\frac{\sigma_{\nu 1}(u)\,\sigma_{\nu 2}(u)}{\sigma^2(u)}$$

werden durch Subtraktion

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2u(c_\nu - c_\mu) &= \sigma_{\nu 1}(u)\,\sigma_{\nu 2}(u) - \sigma_{\mu 1}(u)\,\sigma_{\mu 2}(u) \\ &(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und aus dieser durch Elimination von $\sigma^2(u)$

$$\left.\begin{array}{c}(c_\lambda - c_\nu)\,\sigma_{\mu 1}(u)\,\sigma_{\mu 2}(u) + (c_\mu - c_\lambda)\,\sigma_{\nu 1}(u)\,\sigma_{\nu 2}(u) + \\ + (c_\nu - c_\mu)\,\sigma_{\lambda 1}(u)\,\sigma_{\lambda 2}(u) = 0 \\ (\lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\end{array}\right\} \tag{29}$$

abgeleitet.

Für $\sigma_{\nu 1}(u)$ und $\sigma_{\nu 2}(u)$ gelten

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\nu 1}(-u) = -\sigma_{\nu 2}(u) \\ \sigma_{\nu 2}(-u) = -\sigma_{\nu 1}(u)\end{array}\right\}. \tag{30}$$

Bezeichen wir

$$\left.\begin{array}{l}v_\nu = rv_1 + sv_2 \\ \eta_\nu = r\eta + s\eta'\end{array}\right\}, \tag{31}$$

erhalten wir

$$\sigma_{\nu 1}(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{pq+p+q}\, e^{\frac{2\pi i}{3}(ps - qr)} \cdot e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\,\sigma_{\nu 1}(u)\,. \tag{32}$$

Da

$$\sigma(u + 2\tilde{\omega}) = (-1)^{pq+p+q}\, e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\,\sigma(u)\,,$$

finden wir also

$$\left[\frac{\sigma_{\nu 1}(u + 2\tilde{\omega})}{\sigma(u + 2\tilde{\omega})}\right]^3 = \left[\frac{\sigma_{\nu 1}(u)}{\sigma(u)}\right]^3 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4). \tag{33}$$

Die Function $\left[\frac{\sigma_{\nu 1}(u)}{\sigma(u)}\right]^3$ ist folglich eine ganze rationale Function der pu und $p'u$; und weil sie vom dritten Grade ist, muss man

$$\left[\frac{\sigma_{\nu 1}(u)}{\sigma(u)}\right]^3 = Ap'u + Bpu + C \tag{34}$$

haben,

$$\therefore\ e^{-2\eta_\nu u}\left[\frac{\sigma(u + v_\nu)}{\sigma u}\right]^3 = Ap'u + Bpu + C.$$

Um die Constanten zu bestimmen setze

$$u = v_\nu\,,$$

$$\therefore\ e^{\eta_\nu v_\nu} = Ap'v_\nu + Bpv_\nu + C$$

Setzen wir aber

$$u = -v_\nu\,,$$

ergeben sich

$$0 = -Ap'v_\nu + Bp'v_\nu + C$$
$$0 = -Ap''v_\nu + Bp'v_\nu$$
$$0 = -Ap'''v_\nu + Bp''v_\nu .$$

Die dritte Bedingung ist nur eine Folge der beiden ersteren. Die sämtlichen Gleichungen bestimmen

$$A = \frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{2p'(v_\nu)}$$

$$B = \frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{2p'^2 v_\nu} p''v_\nu .$$

Folglich haben wir

$$\left[\frac{\sigma_{\nu 1}(u)}{\sigma(u)}\right]^3 = \frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{2p'v_\nu}\left[p'u + p'v_\nu + \frac{p''v_\nu}{p'v_\nu}(pu - pv_\nu)\right], \qquad (35)$$

$$\because \left[\frac{\sigma_{\nu 2}(u)}{\sigma(u)}\right]^3 = \frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{2p'v_\nu}\left[-p'u + p'v_\nu + \frac{p''v_\nu}{p'v_\nu}(pu - pv_\nu)\right]. \qquad (35^*)$$

Addition und Subtraktion geben

$$\frac{\sigma^3_{\nu 1}(u) + \sigma^3_{\nu 2}(u)}{\sigma^3(u)} = \frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{p'v_\nu}\left[p'v_\nu + \frac{p''v_\nu}{p'v_\nu}(pu - pv_\nu)\right] \qquad (36)$$

$$\frac{\sigma^3_{\nu 1}(u) - \sigma^3_{\nu 2}(u)}{\sigma^3(u)} = \frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{p'v_\nu} p'u . \qquad (37)$$

Die letzere giebt

$$\sigma^3_{\nu 1}(\tilde{\omega}) = \sigma^3_{\nu 2}(\tilde{\omega}) . \qquad (38)$$

Wenn wir die beiden Membra der (34) in der Umgebung von der Stelle $u = 0$ entwickeln und die Coefficienten für u^{-3} mit einander vergleichen, erhalten wir

$$\sigma^3 v_\nu = -2A , \qquad (39)$$

$$\because \sigma^3 v_\nu = -\frac{e^{\eta_\nu v_\nu}}{p'v_\nu} . \qquad (39^*)$$

Lasset uns nun zu

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

zurückgehen.

Aus dieser Formel mit Verwendung der (27) folgen

$$\left.\begin{aligned}
c_1 - c_2 &= e^{-\eta'(2v_1+v_2)}\frac{\sigma v_3\,\sigma v_4}{\sigma^2 v_1\,\sigma^2 v_2}\\
c_1 - c_3 &= -e^{\eta(v_1+2v_2)-\eta'(2v_1+v_2)}\frac{\sigma v_2\,\sigma v_4}{\sigma^2 v_1\,\sigma^2 v_3}\\
c_1 - c_4 &= e^{\eta(v_1+v_2)+\eta'(v_1+2v_2)}\frac{\sigma v_2\,\sigma v_3}{\sigma^2 v_1\,\sigma^2 v_4}\\
c_2 - c_3 &= \frac{\sigma v_1\,\sigma v_4}{\sigma^2 v_2\,\sigma^2 v_3}\\
c_2 - c_4 &= -e^{\eta'(2v_1+8v_2)}\frac{\sigma v_1\,\sigma v_3}{\sigma^2 v_2\,\sigma^2 v_4}\\
c_3 - c_4 &= -e^{\eta v_1+\eta'(4v_1+3v_2)}\frac{\sigma v_1\,\sigma v_2}{\sigma^2 v_3\,\sigma^2 v_4}
\end{aligned}\right\} . \qquad (40)$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 5.
Stockholm.

Sur les singularités essentielles mobiles des équations différentielles du second ordre.

Par A. Edv. Fransén.

[Communiqué le 12 Mai 1897 par M. Falk.]

1. Appliquant un théorème établi par M. Painlevé dans ses Leçons de Stockholm, [1]) je ferai une remarque sur la réductibilité des équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale admet des singularités essentielles qui sont mobiles, c'est-à-dire variables avec les constantes d'intégration. L'existence de telles singularités constitue une difficulté si grave que les difficultés d'inversion et de combinaison seront à préférer. Il me sera donc permis de prendre ici le mot réductible dans son sens le plus général. [2]) Au lieu d'étudier directement une fonction $y=f(x)$, je substitue $y=z+cx$, c étant une constante convenablement choisie, et je forme ainsi une fonction nouvelle $z=f(x)-cx=\varphi(x)$; mais, au lieu d'étudier directement cette fonction nouvelle $z=\varphi(x)$, je me borne à l'étude de la fonction inverse $x=\psi(z)$. Il semble préférable d'éviter les singularités essentielles mobiles de la solution explicite $y=f(x, a, b)$ d'une équation différentielle du second ordre et

[1]) Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, Paris, A. Hermann, 1897.

[2]) Cfr l'avis de M. Painlevé (loc. cit. p. 521): »La voie la plus sage consiste à s'attaquer d'abord aux classes d'équations intégrables ou réductibles, par un procédé quelconque; (le mot réductible est pris ici dans son sens le plus large).»

se contenter d'une solution implicite $x = \psi(y - cx, a, b)$, si on est assuré que la solution explicite $x = \psi(z, a, b)$ d'une autre équation différentielle n'admet pas de telles singularités. Dans la plupart des cas, on peut choisir $c=0$. Au lieu de former alors directement la solution explicite $y = f(x, a, b)$ qui admet peut-être des points essentiels mobiles, il sera en général préférable de former la fonction inverse $x = \psi(y, a, b)$ qui n'admet certainement pas de telles singularités.

2. En me bornant ici aux équations différentielles rationnelles, du premier degré en y'', je citerai d'abord le théorème de M. PAINLEVÉ auquel j'ai fait allusion.[1] Considérons (p. 396) une équation

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y', y, sans facteur commun pour x quelconque, les coefficients étant des fonctions analytiques quelconques de x. Désignons (p. 404) par p et q les degrés de P, Q en y'. M. PAINLEVÉ a démontré ce théorème (p. 405): Si p est supérieur à $q + 2$, aucune solution $y(x)$ ne saurait devenir indéterminée quand x tend vers un point x_0 distinct de certains points fixes qui se mettent en évidence sur l'équation différentielle. Autrement dit, quand x tend vers x_0 d'une façon quelconque, $y(x)$ tend vers une limite finie ou vers l'infini. Ce théorème exprime donc que l'intégrale générale $y(x)$ ne saurait présenter de singularités essentielles mobiles. M. PAINLEVÉ a trouvé aussi des conditions suffisantes pour que toute solution $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$ tendent certainement vers des valeurs déterminées y_0, y'_0 (finies ou non), quand x tend vers x_0 (p. 410); autrement dit, que ni l'intégrale générale $y(x)$ ni sa dérivée $y'(x)$ ne présentent de singularités essentielles mobiles (p. 411, 413). Mais, pour éviter des longueurs, je me bornerai ici à considérer la seule fonction $y(x)$, laissant tout à fait de côté sa dérivée $y'(x)$.

---

[1]) Leçons de Stockholm, p. 396–413.

3. Considérons maintenant une équation rationelle

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y', y, x, sans facteur commun pour x quelconque. Désignons par p et q les degrés de P, Q en y'. Pour que l'intégrale générale $y(x)$ de cette équation présente des singularités essentielles mobiles, il faut supposer, d'après le théorème précédent, que p soit égal ou inférieur à $q+2$. Par suite, en écrivant n au lieu de q, l'équation sera de la forme

$$y'' = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 y' + \alpha_2 y'^2 + \ldots + \alpha_{n+2} y'^{n+2}}{\beta_0 + \beta_1 y' + \beta_2 y'^2 + \ldots + \beta_n y'^n},$$

où les coefficients α et β sont des polynômes en x, y, β_n n'étant pas identiquement nul. Par l'inversion des variables x, y on obtiendra l'équation suivante

$$x'' = -x' \frac{\alpha_0 x'^{n+2} + \alpha_1 x'^{n+1} + \ldots + \alpha_{n+2}}{\beta_0 x'^n + \beta_1 x'^{n-1} + \ldots + \beta_n}.$$

Si α_0 n'est pas identiquement nul, le degré du numérateur est égal à $n+3$, le degré du dénominateur étant égal ou inférieur à n. Puisque donc la différence des degrés est supérieure à 2 (égale ou supérieure à 3), il n'est pas possible, d'après le théorème du § 2, que l'intégrale générale $x(y)$ présente des singularités essentielles mobiles. On peut donc en général, du moins pour les équations complètement rationelles du type

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

éviter les singularités essentielles mobiles de l'intégrale générale par la seule inversion des deux variables. Pour que et la solution directe $y = f(x, a, b)$ de ces équations et la solution inverse $x = \psi(y, a, b)$ présentent des singularités essentielles dépendantes de a, b, il faut supposer, non seulement que la différence entre le degré du numérateur et le degré du dénomina-

teur soit au plus égale à 2, mais aussi qu'un certain coefficient $\alpha_0(x, y)$ soit identiquement nul. Il semble donc que ces équations curieuses forment une classe exceptionnelle et peu nombreuse. [1])

4. Supposons maintenant que le coefficient mentionné $\alpha_0(x, y)$ soit identiquement nul, c'est-à-dire considérons une équation de la forme

$$y'' = y' \frac{A_0 + A_1 y' + \ldots + A_{n+1} y'^{n+1}}{B_0 + B_1 y' + \ldots + B_n y'^n}$$

ou

$$x'' = - x' \frac{A_{n+1} + A_n x' + \ldots + A_0 x'^{n+1}}{B_n + B_{n-1} x' + \ldots + B_0 x'^n}.$$

Les coefficients A et B sont des polynômes en x, y, et du moins B_0 et B_n ne sont pas identiquement nuls. Je substitue ici $y = z + cx$, c étant une constante, et je forme ainsi une équation nouvelle

$$z'' = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z' + \alpha_2 z'^2 + \ldots + \alpha_{n+2} z'^{n+2}}{\beta_0 + \beta_1 z' + \beta_2 z'^2 + \ldots + \beta_n z'^n},$$

où les coefficients α et β sont aussi des polynômes en x, y. formés respectivement des polynômes A et B et contenant $n+2$ puissances de c. En particulier on aura

$$\alpha_0 = c(A_0 + A_1 c + \ldots + A_{n+1} c^{n+1}), \qquad \alpha_{n+2} = A_{n+1},$$
$$\beta_0 = B_0 + B_1 c + \ldots + B_n c^n, \qquad \beta_n = B_n.$$

Donc β_n n'est pas identiquement nul, et on peut choisir la constante c de telle manière que $\alpha_0(x, y)$ ne soit pas identiquement nul. En effet, considérons le cas le plus difficile: c'est que A_{n+1} ne soit pas identiquement nul et que les quotients de $A_0, A_1, \ldots A_n$ par A_{n+1} soient des constantes et que l'équation suivante en c

$$c^{n+1} + \frac{A_n}{A_{n+1}} c^n + \ldots + \frac{A_1}{A_{n+1}} c + \frac{A_0}{A_{n+1}} = 0$$

[1]) Cfr PAINLEVÉ, Introduction, § 11, 15.

ait $n+1$ racines distinctes $c_1, c_2, \ldots c_n, c_{n+1}$. Alors on aura

$$\alpha_0(x, y) = c(c - c_1)(c - c_2) \ldots (c - c_n)(c - c_{n+1}) A_{n+1}(x, y),$$

et il suffira de donner à la constante c une valeur quelconque différente de $n+2$ valeurs fixes $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, c_{n+1}$, qui se mettent en évidence sur l'équation différentielle considérée, c_0 désignant en effet la valeur nulle. En général, pour que $\alpha_0(x, y)$ ne soit pas identiquement nul, il suffira d'éviter vis-à-vis c au plus $n+2$ valeurs données, dont l'une est toujours nulle. Cela posé, donnons à c une valeur convenable, et introduisons $y = z + cx$ dans les coefficients α, β. Alors l'équation nouvelle

$$z'' = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z' + \ldots + \alpha_{n+2} z'^{n+2}}{\beta_0 + \beta_1 z' + \ldots + \beta_n z'^n}$$

sera du type considéré dans § 3, puisque les coefficients α et β seront des polynômes en x, z et que ni β_n ni α_0 ne sont pas identiquement nuls. Formons donc par l'inversion des variables x, z l'équation

$$x'' = -x' \frac{\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} x' + \ldots + \alpha_0 x'^{n+2}}{\beta_n + \beta_{n-1} x' + \ldots + \beta_0 x'^n},$$

et cherchons son intégrale générale $x = \psi(z, a, b)$. On est assuré (§ 3) que cette fonction ne présente pas de singularités essentielles mobiles. On obtiendra ainsi la solution de l'équation initiale sous la forme implicite $x = \psi(y - cx, a, b)$.

5. En résumé, c'est une conséquence presque immédiate d'un théorème important de M. PAINLEVÉ qu'on peut éviter les singularités essentielles mobiles de l'intégrale générale [1]) de toute équation rationelle du type

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y', y, x, si on veut se contenter d'une solution implicite de la forme $x = \psi(y - cx, a, b)$, où a, b sont deux constantes arbitraires et c une constante à

[1]) Laissant pourtant de côté la dérivée $y'(x)$ de l'intégrale générale $y(x)$ voir § 2.

choisir convenablement, aussitôt que P et Q sont bien connus; pour ce choix de la valeur de c on possède des règles extrêmement simples (§ 3, 4). L'extension de cette proposition au cas d'une équation algébrique $F(y'', y', y, x) = 0$ (algébrique en toutes les variables y'', y', y, x) est évidemment possible (d'après les Leçons de M. PAINLEVÉ, p. 417—421), mais pour moi il était suffisant de mettre en évidence l'idée de ces transformations sur un cas simple.

6. En particulier, soit y'' un polynôme en y', c'est-à-dire considérons l'équation

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y, x)},$$

en supposant le degré q (ou n) égal à zéro. Si le degré de P en y' est supérieur à 2, on est assuré que l'intégrale générale $y(x)$ de cette équation ne présente pas de singularités essentielles mobiles (§ 3). Or, supposons que le degré de P en y' soit égal ou inférieur à 2, c'est-à-dire que l'équation ait la forme

$$y'' = R(x, y) + P(x, y)y' - Q(x, y)y'^2,$$

où R, P, Q sont des fractions rationelles en x, y. Par l'inversion des variables x, y on obtiendra l'équation

$$x'' = Q(x, y)x' - P(x, y)x'^2 - R(x, y)x'^3.$$

Si donc $R(x, y)$ n'est pas identiquement nul, on est assuré que l'intégrale générale $x(y)$ de la dernière équation ne présente pas de singularités essentielles mobiles (§ 3). Or, supposons que $R(x, y)$ soit identiquement nul, c'est-à-dire que l'équation ait la forme

$$y'' = P(x, y)y' - Q(x, y)y'^2,$$

ou

$$x'' = Q(x, y)x' - P(x, y)x'^2,$$

$P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant ici deux fractions rationelles en x, y. Par la substitution $y = z + cx$ on obtiendra une équation nouvelle (cfr § 4)

$$z'' = c(P - Qc) + (P - 2Qc)z' - Qz'^2.$$

Si et P et Q sont identiquement nuls, on aura l'équation $y''=0$ avec l'intégrale $y = ax + b$. Dans tous les autres cas on peut choisir la constante c de telle manière que l'expression

$$c[P(x, y) - cQ(x, y)]$$

ne soit pas identiquement nulle. En effet, si Q est nul, P n'est pas nul, et il suffira de donner à c une valeur quelconque, autre que zéro. Il sera de même si Q est distinct de zéro, le quotient de $P(x, y)$ par $Q(x, y)$ n'étant pas une constante, distincte de zéro. Enfin, si $P(x, y) = c_1 Q(x, y)$, c_1 étant une constante, distincte de zéro, il suffira de donner à c une valeur quelconque, distincte de zéro et de c_1. Alors l'équation

$$y'' = y'(c_1 - y')\, Q(x, y)$$

se transforme en

$$z'' = (z' + c)(c_1 - c - z')\, Q(x, y),$$

c'est-à-dire

$$z'' = [c(c_1 - c) + (c_1 - 2c)\, z' - z'^2]\, Q(x, z + cx).$$

En général, introduisons $y = z + cx$ dans $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, ce qui donnera l'équation

$$z'' = R_1(x, z) + P_1(x, z)\, z' - Q_1(x, z)\, z'^2,$$

où

$$R_1(x, z) = c[P(x, y) - cQ(x, y)],$$

$$P_1(x, z) = P(x, y) - 2cQ(x, y), \qquad Q_1(x, z) = Q(x, y)$$

les coefficients R_1, P_1, Q_1 étant par suite des fractions rationnelles en x, z. L'équation inverse

$$x'' = Q_1(x, z)\, x' - P_1(x, z)\, x'^2 - R_1(x, z)\, x'^3$$

aura sûrement son intégrale générale $x(z)$ dénuée de singularités essentielles mobiles, puisque $R_1(x, z)$ n'est pas identiquement nul.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 3...

Dresden. *K. Zoologisches und Anthropologisch-ethnographisches Museum.*
Abhandlungen. 1890/91—1894/95. 4:o.
MEYER, A. B., Abbildungen von Vogel-Skeletten. Lief. 1—21. 1879—94. 4:o.
Dorpat. *Naturforscher-Gesellschaft.*
Sitzungsberichte. Bd 11: H. 2. 1896. 8:o.
Archiv für die Naturkunde Liv-, Ehst- und Kurlands. (2) Bd 11: L. 2. 1897. 8:o.
's Gravenhage. *Nederländska regeringen.*
Die Triangulation von Java. Abth. 5. 1897. 4:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Kl. N. F. Bd 1: N:o 4—5. 1897. 4:o.
Halle. *Kaiserl. Leopoldino-Carolinische deutsche Akademie d. Naturforscher.*
Nova acta. Bd 65—67. 1896. 4:o.
Repertorium zu den Acta und Nova acta. Bd 2: H. 1. 1896. 4:o.
Leopoldina. H. 32 (1896). 4:o.
Katalog der Bibliothek. Lief. 7. 1896. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 30. Livr. 5. 1897. 8:o.
Helsingfors. *Societas pro Fauna et Flora Fennica.*
Acta. Vol. 11. 1895. 8:o.
Meddelanden. H. 22. 1896. 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. VII: 4. 1897. 4:o.
Statistisk årsbok för Finland. Årg. 18 (1897). 8:o.
— *Industristyrelsen.*
Meddelanden. H. 25. 1896. 8:o.
Kasan. *Kejserl. universitetet.*
Učenija zapiski. G. 63 (1896): N:o 10—12; 64 (1897): 1. 8:o.
Akademiska afhandlingar. 7 st. 8:o.
Kharkow. *Kejserl. universitetet.*
Annales. 1897: Kn. 1. 8:o.
Kjöbenhavn. *Naturhistorisk forening.*
Videnskabelige Meddelelser. (5) Aarg. 8 (1896). 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Rozprawy. Wydział matemat.-przyrodniczy. (2) T. 11—12. 1896—97. 8:o.
Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 6: Z. 1. 1897. 4:o.
Atlas geologiczny Galicyi. Z. 6: Tekst & Atlas. 1896. 8:o & Fol.
Bulletin international. 1897: N:o 2. 8:o.

Leipzig. *Verein für Erdkunde.*
Mittheilungen. 1896. 8:o.
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd 3: H. 2. 1897. 8:o.
— *Jablonowskische Gesellschaft.*
Jahresbericht. 1897. 8:o.
Lisboa. *Academia R. das sciencias.*
Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. (2) T 4 (1897): N:o 16. 8:o.
London. *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): 4. 8:o.
Proceedings. Vol. 12 (1896): Titel & Index. 8:o.
— *R. microscopical society.*
Journal. 1897: P. 2. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 61 (1897): N:o 370. 8:o.
— *R. astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 57 (1897): N:o 6. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 14: P. 3. 4:o.
Proceedings. 1896: P. 4. 8:o.
— *R. gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1897: App. 2. 8:o.
Madrid. *R. Academia de ciencias exactas, físicas y naturales.*
Anuario. 1897. 12:o.
Montpellier. *Académie des sciences et lettres.*
Mémoires. Sect. des lettres. (2) T. 1: N:o 5—7. 1895—96. 8:o.
» » » sciences. (2) T. 2: N:o 2—4. 1895—96. 8:o.
Moscou. *Société impériale des naturalistes.*
Bulletin. 1896: N:o 3. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Cl. 1896: H. 4. 8:o.
» Math.-phys. Cl. 1896: H. 4. 8:o.
Almanach. Jahr 1897. 8:o.
Nantes. *Société des sciences naturelles de l'ouest de la France.*
Bulletin. T. 6 (1896): Trim. 3—4. 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Atti. (2) Vol. 8. 1897. 4:o.
Rendiconto. (3) Vol. 3 (1897): Fasc. 1, 3—4. 8:o.
New-York. *Academy of sciences.*
Transactions. Vol. 15 (1895/96). 8:o.
— *Public library.*
Bulletin. Vol. 1 (1897): N:o 4. 8:o.
— *American museum of natural history.*
Bulletin. Vol. 8 (1896). 8:o.
— *Microscopical society.*
Journal. Vol. 13 (1897): N:o 2. 8:o.
Osnabrück. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Jahresbericht. 11 (1895—96). 8:o.

Ottawa. *Commission géologique du Canada.*
Rapport annuel. N. S. Vol. 7 (1894) & Cartes. 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 11 (1897): Fasc. 3. 8:o.
— *R. Orto botanico.*
Bollettino. Anno 1 (1897): Fasc. 1. 8:o.
Paris. *Académie des sciences.*
Réunion du Comité international permanent pour l'exécution de la carte photographique du ciel en 1896. 4:o.
DENIKER, J., Bibliographie des travaux scientifiques publiés par les sociétés savantes de la France. T. 1: Livr. 2. 1897. 4:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1896: P. 3. 8:o.
Prag. *K. K. Sternwarte.*
Astronomische Beobachtungen 1888—91: Appendix. 1897. 4:o.
Regensburg. *K. Bayerische botanische Gesellschaft.*
Katalog der Bibliothek. T. 2. 1897. 8:o.
Richmond. *Kew Observatory.*
Report. Year 1896. 8:o.
Description of the observatory. 1897. 8:o.
Roma. *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*
Atti. Anno 50 (1897): Sess. 3. 4:o.
Salem. *American association for the advancement of science.*
Proceedings. Meeting 45 (1896). 8:o.
S. Paulo. *Instituto agronomico do estado de S. Paulo em Campinas.*
Relatorio annual. Vol. 7—8 (1894—95). 4:o.
Sydney. *Australian museum.*
Memoir. 3: P. 2. 1897. 8:o.
Tokio. *Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens.*
Mittheilungen. H. 58. 1897. 4:o.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 32 (1896/97): Disp. 1—6. 8:o.
Osservazioni meteorologiche. Anno 1896. 8:o.
— *Musei di zoologia ed anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 11 (1896): N. 260—267. 8:o.
Trondhjem. *K. norske Videnskabers Selskab.*
Skrifter. 1894—95. 8:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
Contributions to knowledge. Vol. 29: N:o 1034. 1896. 4:o.
Miscellaneous collections. Vol. 35: N:o 1038; 37: 1035, 1039; 38: 1075; 39: 1071, 1073. 1896—97. 8:o.
— *U. S. National museum.*
Proceedings. Vol. 18 (1895). 8:o.
Bulletin. N:o 49. 1896. 8:o.
Special bulletin:
GOODE, G. B., & BEAN, T. H., Oceanic ichthyology. Text & Plates. 1895. 4:o.
BENDIRE, CH., Life histories of North American birds. 1895. 4:o.

Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. Jahrg. 1896: N:o 10—12, 16—18. 8:o.
Jahrbuch. Bd 46 (1896): H. 2. 8:o.
— *K. K. Geographische Gesellschaft.*
Mittheilungen. Bd 39 (1896). 8:o.
— *K. K. Gradmessungs-Bureau.*
Astronomische Arbeiten. Bd 7—8. 1895—1896. 4:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 42 (1897): H. 1. 8:o.

Af författarne:

ARNELL, H. W., Några ord om Botrychium simplex. Lund 1897. 8:o.
— Moss-studier. 12. Lund 1897. 8:o.
BÄCKLUND, A. V., Ur theorien för de solida kropparnes rörelse. Lund 1897. 8:o.
ENESTRÖM, G., [Recension af] Carli & Favaro, Bibliografia Galileiana. Sthlm 1897. 8:o.
HASSELBERG, B., Om den fysiska beskaffenheten hos Saturni ringsystem. Sthlm 1897. 8:o.
HESSELGREN, F., De la gamme musicale. Turin 1897. 8:o.
NATHORST, A. G., Egendomliga bildningar i sprickfyllnader inom urberget vid Margretelund. Sthlm 1897. 8:o.
— Marine Conchylien im Tertiär Spitzbergens und Ostgrönlands. Berl. 1896. 8:o.
— Fossila bakterier. Sthlm 1897. 8:o.
RÄÄF, C. G. W., Om tillverkningskostnad och försäljningspris, kapital och dess afkastning m. m. Sthlm 1897. 8:o.
DÖLLEN, W., Aufruf zur Umgestaltung der nautischen Astronomie. Dorpat 1893. 4:o.
LAMBE, L. M., Sponges from the Atlantic coast of Canada. Ottawa 1896. 8:o.
LE JOLIS, A., Remarques sur la nomenclature algologique. Cherbourg 1896. 8:o.
MAJLERT, H., Essai sur les éléments de la mécanique des particules. P. 1. Neuchâtel 1897. 8:o.
MILLOSEVICH, E., & PEYRA, D., Catalogo di 2491 stelle australi. Modena 1896. 4:o.
STEENSTRUP, J., Til Forstaaelsen af Nordens »Guldbrakteat-Fænomen». Khvn 1897. 8:o.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 6.

Onsdagen den 9 Juni.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot Grosshandlaren Friherre OSCAR DICKSON, samt utländske ledamoten och ledamoten af Franska Institutet Professor ALFRED LOUIS OLIVIER DES CLOIZEAUX med döden afgått.

Med anledning af från Kongl. Ecklesiastik Departementet erhållet meddelande om en inkommen inbjudning till de Förenade Rikena att genom ombud från vissa angifna institutioner, deribland äfven Akademien, deltaga i den internationella geologiska kongress, som kommer att hållas i St. Petersburg under senare hälften af nästkommande Augusti månad, hade Friherre A. E. NORDENSKIÖLD och Lektor A. E. TÖRNEBOHM afgifvit infordradt utlåtande, på grund af hvilket Akademien utsåg sin ledamot Professor A. G. NATHORST att vara hennes representant vid ifrågavarande kongress.

Tillkännagifvande hade ingått, att en sedan längre tid bestående förening för åstadkommande af en zoologisk trädgård i Stockholms närhet hade beslutit upplösa sig och till Akademien öfverlemna sin kassabehållning för att förenas med den under Akademiens förvaltning stående *Grillska fonden* för en zoologisk trädgård i Stockholm; och beslöt Akademien att på sådant vilkor mottaga den erbjudna gåfvan.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

i Akademiens Handlingar: »Zur mesozoischen Flora Spitsbergens, gegründet auf die Sammlungen der schwedischen Expeditionen», af Professor A. G. NATHORST;

i Bihanget till Handlingarne: »Ueber die Dämpfung elektrischer Resonatoren», af Kandidat S. LAGERGREN; och

i Öfversigten: »Sur une application nouvelle des paramètres différentiels dans la théorie des surfaces», af Docent I. BENDIXSON.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Biblioteket.*

Washington. *U. S. Department of Agriculture.*

Div. of agrostology. Bull. N:o 4—6. 1897. 8:o.
Bureau of animal industry. Bull. N:o 14—17. 1896. 8:o.
» » » » Circulars. N:o 17. 1897. 8:o.
Div. of botany. Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. 5: N:o 1. 1897. 8:o.
Div. of chemistry. Circulars. N:o 2. 1896. 8:o.
Div. of entomology. Bull. N. S. N:o 4—8. 1896—97. 8.o.
» » » Technical series. N:o 5. 1897. 8:o.
» » » Circulars. (2) N:o 19. 1897. 8:o.
Office of Experiment stations. Bull. N:o 33—35, 37. 1896—97. 8:o.
» » » » Circulars. N:o 32. 1896. 8:o.
» » » » Record. Vol. 7: N:o 12; 8: 1—6. 1896, 97. 8:o.
Farmers bulletin. N:o 45—48, 51. 1897. 8:o.
Fiber investigations. Report. N:o 8. 1896. 8:o.
Section of foreign markets. Circulars. N:o 11—14. 1897. 8:o.
Div. of forestry. Bull. N:o 14. 1897. 8:o.
» » » Circulars. N:o 15. 4:o.
Office of road inquiry. Bull. N:o 19. 1897. 8:o.
» » » » Circulars. N:o 25. 1896. 8:o.
Div. of statistics. Misc. ser. Bull. N:o 12. 1896. 8:o.
» » » Circulars. N:o 3—5. 1896—97. 8:o.
Div. of vegetable physiology and pathology. Bull. N:o 12. 1896. 8:o.
Weather Bureau. Bull. N:o 11: P. 3; 20. 1896, 97. 8:o.

JORDAN, D. S., Observations on the fur seals of the Pribilof Islands. Wash. 1896. 8:o.

TINGLE, G. R., Report on the salmon fisheries in Alaska. Wash. 1897. 8:o.

(Forts. å sid. 340.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola.

Sur une application nouvelle des paramètres différentiels dans la théorie des surfaces.

Par Ivar Bendixson.

[Communiqué le 9 Juin 1897 par D. G. Lindhagen.]

En employant les paramètres différentiels

$$\varDelta\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

$$\varDelta(\varphi, \psi) = \frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right] + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}}{EG - F^2}$$

$$\varDelta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right]\right\}.$$

M. Beltrami a exprimé l'élement linéaire

(1) $$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

d'une surface dans les nouvelles variables φ, ψ sous l'élégante forme

(1bis) $$ds^2 = \frac{\varDelta\psi d\varphi^2 - 2\varDelta(\varphi, \psi)\, d\varphi \cdot d\psi + \varDelta\varphi d\psi^2}{\varDelta\varphi \cdot \varDelta\psi - \varDelta(\varphi, \psi)^2}$$

et est parvenu à exprimer d'une manière extrêmement simple les conditions pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre.[1])

[1]) Voir par exemple Darboux: Théorie des Surfaces Tome III pages 193—241.

Il est assez naturel qu'une méthode analogue peut être employée pour exprimer la seconde forme fondamentale de GAUSS

$$(2) \qquad \sqrt{EG - F^2}\frac{ds^2}{R} = Ddu^2 + 2D_1dudv + D_2dv^2$$

dans les nouvelles variables φ et ψ et que l'on peut obtenir de cette manière les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces soient identiques, abstraction faite d'une simple transformation de coordonnées.

C'est ce que je me propose d'établir dans les pages suivantes.

Soient en effet

$$(3) \qquad \begin{cases} ds^2 = E'd\varphi^2 + 2F'd\varphi d\psi + G'd\psi^2 \\ \sqrt{E'G' - F'^2}\frac{ds^2}{R} = D'd\varphi^2 + 2D'_1 d\varphi d\psi + D'_2 d\psi^2 \end{cases}$$

les deux formes fondamentales, exprimées dans les variables nouvelles φ et ψ. Les coefficients de ds^2 étant déterminés dans (1bis), nous voulons ici d'abord calculer les coefficients D', D'_1 D'_2. On aura alors les équations suivantes

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi\partial \psi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \\ \qquad + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi\partial \psi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}\right] + \\ \qquad + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2}\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi\cdot\partial \psi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2}\cdot\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \\ \qquad + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \end{cases}$$

et des formules analogues pour les dérivées de y et de z.

En mettant

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \xi}$$

on sait que

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(y, z)}{D(\varphi, \psi)} \cdot \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} . \tag{5}$$

En multipliant la troisième des équations (4) par (5) et en faisant la somme des équations, qu'on obtient par une permutation cyclique de x, y, z, on obtient

$$D = \left[D' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + 2D'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + D'_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \right] \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

et par des calculs analogues on obtient

$$D_1 = \left[D' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + D'_1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] + D'_2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

$$D_2 = \left[D' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + 2D'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + D'_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 \right] \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} .$$

Ces trois équations nous conduisent aisément aux équations suivantes

$$(6) \begin{cases} D_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = D'_2 \cdot \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]^3, \\ D_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} - D_1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] + D \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} = \\ \qquad = - D'_1 \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]^3, \\ D_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 - 2D_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + D \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 = D' \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]^3, \\ DD_2 - D_1^2 = [D'D'_2 - D'^2_1] \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]^4 . \end{cases}$$

Mettons maintenant

$$(7) \begin{cases} \Delta_1 \alpha = \dfrac{D_2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - 2D_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} + D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2}{[DD_2 - D_1^2]^{3/4}} \\ \Delta_1 (\alpha, \beta) = \dfrac{D_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} - D_1 \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u} \right] + D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2}{[DD_2 - D_1^2]^{3/4}} \end{cases}$$

on obtient les formules suivantes

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta_1\varphi = \dfrac{D'_2}{[D'D'_2 - D'^2_1]^{3/4}}, \\ \Delta_1(\varphi, \psi) = -\dfrac{D'_1}{[D'D'_2 - D'^2_1]^{3/4}}, \\ \Delta_1\psi = \dfrac{D'}{[D'D'_2 - D'^2_1]^{3/4}}, \end{cases}$$

ce qui nous donne enfin, la seconde forme fondamentale sous la forme suivante

$$(9)\quad \sqrt{E'G' - F'^2}\,\frac{ds^2}{R} = \frac{\Delta_1\psi d\varphi^2 - 2\Delta_1(\varphi, \psi)\, d\varphi \cdot d\psi + \Delta_1\varphi d\psi^2}{[\Delta_1\varphi \cdot \Delta_1\psi - \Delta_1(\varphi, \psi)^2]^{3/2}}.$$

Cette équation établie, on voit sans peine que *$\Delta_1\alpha$ est un invariant dont la valeur demeurera la même pour la même fonction α et le même point, quel que soit le système de coordonnées auquel on rapporte la surface.*

En effet, en multipliant les équations (8) par $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right)^2$, $2\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\psi}$ et $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\psi}\right)^2$ on obtient

$$\frac{D'_2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right)^2 - 2D'_1\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\psi} + D'\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\psi}\right)^2}{[D'D'_2 - D'^2_1]^{3/4}} = \frac{D_2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - 2D_1\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial v} + D\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2}{[DD_2 - D^2_1]^{3/4}}$$

ce qui établit la dite propriété du paramètre différentiel $\Delta_1\alpha$. Un calcul facile met en évidence l'égalité suivante

$$\Delta_1(\alpha + \beta) = \Delta_1\alpha + \Delta_1\beta + 2\Delta_1(\alpha, \beta)$$

d'où l'on conclut que $\Delta_1(\alpha, \beta)$ est aussi un invariant indépendant du système de coordonnées auquel on rapporte la surface.

Il est maintenant évident comment on doit s'arranger pour déterminer si deux surfaces données sont identiques, abstraction faite d'une simple transformation de coordonnées.

Soient

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$\sqrt{EG - F^2}\,\frac{ds^2}{R} = Ddu^2 + 2D_1dudv + D_2dv^2$$

les deux formes fondamentales de l'une des surfaces et

$$ds_1^2 = edu_1^2 + 2fdu_1dv_1 + gdv_1^2$$

$$\sqrt{eg - f^2}\frac{ds_1^2}{R_1} = d \cdot du_1^2 + 2d_1du_1dv_1 + d_2dv_1^2$$

celles de l'autre et désignons par $\Delta'\alpha$, $\Delta'(\alpha, \beta)$, $\Delta'_2(\alpha)$, $\Delta'_1(\alpha)$, $\Delta'_1(\alpha, \beta)$ les paramètres différentiels de la seconde surface.

Soient enfin $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ deux fonctions invariantes de la première surface et $\varphi_1(u_1, v_1)$, $\psi_1(u_1, v_1)$ les invariants correspondants de la seconde.

Si les deux surfaces sont identiques, abstraction faite d'une transformation de coordonnées, les deux équations

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(u, v) = \varphi_1(u_1, v_1) \\ \psi(u, v) = \psi_1(u_1, v_1) \end{cases}$$

doivent déterminer les points correspondants des deux surfaces. En rapportant les deux surfaces aux nouvelles variables φ, ψ et φ_1, ψ_1, il faut que les deux formes fondamentales de GAUSS soient identiques, tant que les équations (10) subsistent. Mais des équations

$$\frac{\Delta\psi d\varphi^2 - 2\Delta(\psi, \varphi)\, d\varphi d\psi + \Delta\varphi d\psi^2}{\Delta\varphi \cdot \Delta\psi - \overline{\Delta(\varphi, \psi)}^2} =$$

$$= \frac{\Delta'\psi_1 d\varphi_1^2 - 2\Delta'(\psi_1, \varphi_1)\, d\varphi_1 d\psi_1 + \Delta'\varphi_1 d\psi_1^2}{\Delta'\varphi_1 \cdot \Delta'\psi_1 - \overline{\Delta'(\varphi_1, \psi_1)}^2},$$

$$\frac{\Delta_1\psi d\varphi^2 - 2\Delta_1(\psi, \varphi)\, d\varphi d\psi + \Delta_1\varphi d\psi^2}{\left[\Delta_1\varphi \cdot \Delta_1\psi - \overline{\Delta_1(\varphi, \psi)}^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\Delta'_1\psi_1 d\varphi_1^2 - 2\Delta'_1(\psi_1, \varphi_1)\, d\varphi_1 d\psi_1 + \Delta'_1\varphi_1 d\psi_1^2}{\left[\Delta'_1\varphi_1 \cdot \Delta'_1\psi_1 - \overline{\Delta'_1(\varphi_1, \psi_1)}^2\right]^{3/2}}$$

on aura les équations suivantes

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi(u, v) = \varphi_1(u_1, v_1) \\ \psi(u, v) = \psi_1(u_1, v_1) \\ \Delta\varphi = \Delta'\varphi_1 \\ \Delta\psi = \Delta'\psi_1 \end{cases}$$

$$\left|\begin{aligned} \Delta(\psi, \varphi) &= \Delta'(\psi_1, \varphi_1) \\ \Delta_1\varphi &= \Delta'_1\varphi_1 \\ \Delta_1\psi &= \Delta'_1\psi_1 \\ \Delta_1(\psi, \varphi) &= \Delta'_1(\psi_1, \varphi_1) \end{aligned}\right.$$

qui doivent être compatibles.

Mais ces 8 équations ne sont pas toutes distinctes, car si les élements linéaires des deux surfaces sont égaux, il s'en suit que les courbures des surfaces sont aussi égales. C'est-à-dire, des 5 premières équations (11), on conclut que

$$\Delta_1\varphi \cdot \Delta_1\psi - \overline{\Delta_1(\varphi, \psi)}^2 = \Delta'_1\varphi_1 \cdot \Delta'_1\psi_1 - \overline{\Delta'_1(\varphi_1, \psi_1)}^2$$

En prenant égard aussi aux équations de Codazzi, on peut conclure que la dernière équation est une conséquence des 7 premières.

Mais il n'y en a que 6 qui sont indépendantes, ce qu'on voit le plus aisément en traitant les divers cas qui peuvent se présenter.

Toute la difficulté consiste donc à trouver deux fonctions invariantes φ et ψ qui sont indépendantes l'une de l'autre.

Nous en connaissons en général 2, à savoir la courbure K et la courbure moyenne K_1, qui sont données par les équations

$$K = \frac{DD_2 - D_1^2}{[EG - F^2]^2}, \qquad K' = \frac{dd_2 - d_1^2}{[eg - f^2]^2},$$

$$K_1 = \frac{2FD_1 - ED_2 - GD}{[EG - F^2]^{3/2}}, \quad K'_1 = \frac{2fd_1 - ed_2 - gd}{[eg - f^2]^{3/2}}.$$

Les cas suivants sont alors à distinguer.

I) *ΔK n'est pas une fonction de K seul.*

Comme ΔK est une fonction invariante, nous mettons alors $K = \varphi$, $\Delta K = \psi$, ce qui nous donne les équations suivantes

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} K &= K' \\ \Delta K &= \Delta' K' \\ \Delta(\Delta K) &= \Delta'(\Delta' K') \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} \Delta(K, \Delta K) &= \Delta'(K', \Delta'K') \\ \Delta_1 K &= \Delta'_1 K' \\ \Delta_1(\Delta K) &= \Delta'_1(\Delta' K') . \end{aligned}\right.$$

II) $\Delta K = F(K)$, *mais* $\Delta_2 K$ *n'est pas une fonction de* K *seul.*

En mettant alors $K = \varphi$, $\Delta_2 K = \psi$, $K' = \varphi_1$, $\Delta'_2 K' = \psi_1$, on obtient un système d'équations analogue au système (12).

III) $\Delta K = F(K)$, $\Delta_2 K = F_2(K)$.

On sait alors que l'élement linéaire de la surface (1) peut s'écrire [1])

$$ds^2 = \frac{dK^2}{F(K)} + \frac{e^{2\int \frac{F_2(K)}{F(K)} dK}}{F(K)} d\lambda^2$$

où λ satisfait aux équations

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= e^{-\int \frac{F_2(K)}{F(K)} dK} \cdot \frac{F \frac{\partial K}{\partial u} - E \frac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= e^{-\int \frac{F_2(K)}{F(K)} dK} \cdot \frac{G \frac{\partial K}{\partial u} - F \frac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} . \end{aligned}\right.$$

Pour que les deux surfaces soient identiques il faut alors que

$$\Delta' K' = F(K') , \quad \Delta'_2 K' = F_2(K')$$

et l'élement linéaire de la seconde surface peut alors s'écrire

$$ds_1^2 = \frac{dK'^2}{F(K')} + \frac{e^{2\int \frac{F_2(K')}{F(K')} dK'}}{F(K')} \cdot d\lambda_1^2$$

où λ_1 satisfait aux deux équations que l'on obtient des équations (13) en y remplacant u, v, E, F, G, K par u_1, v_1, e, f, g, K'.

Mais en outre il faut que

$$\begin{aligned} \Delta_1 \lambda &= \Delta'_1 \lambda_1 \\ \Delta_1 K &= \Delta'_1 K' . \end{aligned}$$

[1]) Voir LUIGI BIANCHI »Vorlesungen über Differentialgeometrie» deutsche Uebersetzung, Leipzig 1896, page 185.

Nous pouvons remplacer ces deux équations par les suivantes

$$e^{2\int \frac{F_2(K)}{F(K)} dK} \cdot \Delta_1 \lambda = e^{2\int \frac{F_2(K')}{F(K')} dK'} \cdot \Delta'_1 \lambda_1$$

$$\Delta_1 K = \Delta'_1 K'$$

qui sont algébriques en E, F, G, D, D_1, $D_2 \ldots$

Maintenant deux cas sont à distinguer.

Si $e^{2\int \frac{F_2(K)}{F(K)} dK} \cdot \Delta_1 \lambda$, $\Delta_1 K$ sont tous les deux des fonctions de K, il faut que $e^{2\int \frac{F_2(K')}{F(K')} dK'} \cdot \Delta'_1 \lambda$, $\Delta'_1 K'$ s'expriment tout à fait de la même manière en fonctions de K' et cette condition est évidemment suffisante, car il ne nous reste qu'à mettre

$$K = K', \; \lambda = \lambda_1$$

pour avoir les deux formes fondamentales identiques.

Si, de l'autre côté, l'une des quantités $e^{2\int \frac{F_2(K)}{F(K)} dK} \cdot \Delta_1 \lambda$, $\Delta_1 K$ n'est pas une fonction de K seul, nous mettons cette fonction $= \psi$, $K = \varphi$ et nous obtenons ainsi un système d'équations analogues à (12).

IV) $K =$ *constante;* ΔK_1 *n'est pas une fonction de* K_1 *seul.*

Ce cas se traite de la même manière que I.

V) $K =$ *constante,* $\Delta K_1 = F(K_1)$, $\Delta_2 K_1$ *n'est pas fonction de* K_1 *seul.*

Ce cas se traite de la même manière que II.

VI) $K =$ *constante,* $\Delta K_1 = F(K_1)$, $\Delta_2 K_1 = F_2(K_1)$.

Ce cas se traite de la même manière que III.

VII) $K =$ *constante,* $K_1 =$ *constante.*

Soit alors R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux, on aura

$$R_1 = \text{constante}; \; R_2 = \text{constante};$$

et on sait alors que deux cas seulement peuvent se présenter. On aura dans l'un

$$\frac{1}{R_1} = 0\,, \; R_2 = \text{constante},$$

et dans l'autre

$$R_1 = R_2 = \text{constante}.$$

Pour la démonstration on n'a besoin que de rapporter la surface à ses lignes de courbure. On a alors les formules suivantes [1])

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_1}\right) = 0$$

qui mettent en évidence le résultat énoncé.

Dans le premier cas la surface est un cylindre, dans le second cas elle est une sphère.

Il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux surfaces soient identiques, est que

$$K = K'\,;\; K_1 = K'_1\,.$$

Nous observons enfin que les calculs qu'on doit faire dans tous les cas consistent en des simples éliminations algébriques, tant que les surfaces elles-mêmes sont données par des équations algébriques.

Avant de finir nous attirons l'attention sur la manière dont M. LIE a déterminé si deux surfaces sont identiques ou non dans son grand Traité »Vorlesungen über Continuirliche Gruppen», Leipzig 1893, page 709. Il emploit aussi des invariants différentiels mais d'une forme plus compliquée

---

[1]) Voir BIANCHI, livre cité, page 234.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. fr. sid. 330.)

Stockholm. *Generalstaben.*
Karta öfver Sverige, 1 : 100,000. Bl. 70.
Karta öfver Norrbottens län, 1 : 200,000. Bl. 32, 37.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 1 häfte. 4:o.
— *Karolinska institutet.*
Katalog. Vårterminen 1897. 8:o.
2 dissertationer. 8:o.
— *K. Vitterhets Historie och Antiqvitets akademien.*
Antiqvarisk tidskrift. 15: 1. 1897. 8:o.
— *Riksdagens bibliotek.*
Förteckning. Tillägg N:o 2 (1894—96). 1897. 8:o.
Karlstad. *Vermlands läns hushållningssällskap.*
Årsberättelse. 94 (1896). 8:o.
CEDERSTRÖM, C., Vermlands läns fiskevatten. D. 3. 1896. 8:o.
Upsala. *Universitets-biblioteket.*
Lyon. *Université.*
4 dissertationer. 8:o.
Aachen. *Meteorologische Station.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahrg. 1 (1895). 4:o.
Amsterdam. *Wiskundig genootschap.*
Nieuw archief voor wiskunde. (2) D. 3: St. 2. 1897. 8:o.
Wiskundige opgaven met de oplossingen. D. 7: St. 3. 1897. 8:o.
Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 50 (1896). 8:o.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
Circulars. Vol. 16: N:o 127—129. 1896, 97. 4:o.
Batavia. *Natuurkundig Vereeniging in Nederlandsch Indie.*
Natuurkundig tijdschrift voor Nederl. Indie. D. 32 (1873); 35 (1875): Afl. 1—4; 36 (1876): 1—4; 37 (1877): 1—3. — Alphab. reg. 1—30, 31—50. 1871—91. 8:o.
— *Magnetical and meteorological observatory.*
Observations. Vol. 18 (1895). Fol.
Rainfall in the East Indian archipelago. Year 17 (1895). 8:o.
Bergen. *Museum.*
SARS, G. O., An account of the crustacea of Norway. Vol. 2: P. 1—4. 1896, 97. 8:o.
Berlin. *Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1897: 1—25. 8:o.
— *K. Preussische geologische Landesanstalt und Bergakademie.*
Jahrbuch. Bd 16 (1895). 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 16 (1897): N:o 4—7. 8:o.
— *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 41 (1896): H. 4. 8:o.

Berlin. *Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs.*
Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bd 6. 1896. 4:o.
— *K. Preussisches Meteorologisches Institut.*
Veröffentlichungen. 1896: H. 2. 4:o.
Bericht des internationalen meteorologischen Comité's und der internationalen Commission für Wolkenforschung. Versamml. zu Upsala 1894. 8:o.
Witterung. 1896: 1—12. 4:o.
— *Forstlich-meteorologische Stationen.*
Jahresbericht. Jahrg. 21 (1895). 8:o.
Bern. *Hydrometrische Abtheilung des eidg. Oberbauinspektorates.*
Wasserverhältnisse der Schweiz. Rheingebiet von den Quellen bis zur Taminamündung. 1896. Fol.
— *Departement des Innern, Abth. Bauwesen.*
Tableau graphique des observations hydrométriques suisses. Pl. 1—16. 1895. Fol.
Besançon. *Société d'émulation du Doubs.*
Mémoires. (6) Vol. 10 (1895). 8:o.
— *Observatoire astronomique, chronométrique et météorologique.*
Bulletin chronométrique. 6—7. 1894—95. 4:o.
Bulletin météorologique. 8—9. 1893—95. 4:o.
Bombay. *Government observatory.*
Magnetical and meteorological observations. 1895. Fol.
Boston. *Public library.*
Monthly bulletin of books added. Vol. 1: N:o 10. 1896. 8:o.
— *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 27: N:o 14. 1897. 8:o.
Bremen. *Meteorologisches Observatorium.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahrg. 6 (1895). 4:o.
Breslau. *Verein für schlesische Insektenkunde.*
Zeitschrift für Entomologie. N. F. H. 21. 1896. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 33 (1897): N:o 4. 8:o.
— *Observatoire R. de Belgique.*
Observations météorologiques d'Uccle. 1893: Résumé et notes; 1894: 1—10. 4:o.
— *Société entomologique de Belgique.*
Annales. T. 40 (1896). 8:o.
Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtani közlöny. K. 27 (1897): F. 1—4. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 11: H. 2—3. 1897. 8:o.
— *Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 24 (1894). 4:o.
Erdmagnetische Messungen in den Ländern der ungarischen Krone, 1892—94. 4:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 43 (1897): Entr. 4. 8:o.

Bukarest. *Institutul meteorologic al Romaniei.*
Analele. T. 11 (1895). 4:o.
Buletinul. Anul 4 (1895)—5 (1896). 4:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Mededeelingen. 21. 1897. 8:o.
Cambridge, Mass. *Astronomical observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 28: P. 1; 30: 4; 36; 40: P. 5; 41: N:o 4. 1896—97. 4:o.
Annual report. 51 (1895/96). 8:o.
Miscellaneous papers, 1888—95. 8:o.
— *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 30: N:o 6. 1897. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 5 (1897): N:o 5. 8:o.
Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Jahrbuch. Jahrg. 12 (1894): H. 2; 13 (1895): 1—2. 4:o.
Vorläufige Mitteilung der Beobachtungs-Ergebnisse von 12 Stationen 2. Ordn. in Sachsen. 1896: 1—9. 4:o.
Abhandlungen. H. 1. 1896. 4:o.
Chicago. *Field Columbian museum.*
Publications. 15; 17. 1896. 8:o.
Cincinnati. *Society of natural history.*
Journal. Vol. 19: N:o 2. 1897. 8:o.
Coimbra. *Sociedade Broteriana.*
Boletim. 13 (1896): 2. 4:o.
— *Observatorio meteorologico.*
Observações meteorologicas e magneticas. Vol. 33 (1894); 34 (1895). Fol.
Dijon. *Académie des sciences, arts et belles-lettres.*
Mémoires. (4) T. 5 (1895—96). 8:o.
Dorpat. *Meteorologisches Observatorium.*
Meteorologische Beobachtungen. Bd 6: H. 3—4 (1893—94). 8:o.
Exponate auf der Allrussischen Ausstellung 1896. 8:o.
Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen 1895. 4:o.
Erfurt. *K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften.*
Jahrbücher. N. F. H. 23. 1897. 8:o.
Erlangen. *Physikalisch-medicinische Societät.*
Sitzungsberichte. H. 28 (1896). 8:o.
Firenze. *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*
Pubblicazioni. Sezione di sc. fis. e nat. 17—18. 1890—91. 8:o.
» » di medicina. 9: 5: 1—2; 13. 1889—91. 8:o.
» » di filos. e filol. 23—24. 1890.
— *Società entomologica Italiana.*
Bullettino. Anno 28 (1896): Trim. 3—4. 8:o.
Fiume. *K. K. Marine-Akademie.*
Meteorologische Beobachtungen. 1896: 1—5. 8:o.
Genève et le Grand Saint-Bernard.
Résumé météorologique de l'année 1895. 8:o.

Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 8 (1897): N:o 1. 8:o.

's Gravenhage. *Nederländska regeringen.*
Die Triangulation von Java. Abth. 5. 1897. 4:o.
VERBEEK, R. D. M., & FENNEMA, R., Description géologique de Java et Madoura. T. 1—2 & Atlas. Amsterdam 1896. 8:o & Fol.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Philol.-hist. Kl. 1897: H. 1. 8:o.

Habana. *R. Colegio de Belen de la compañia de Jesus.*
Observaciones magnéticas e meteorológicas. Año 1892—93. Fol.

Halifax. *Nova Scotian institute of science.*
Proceedings and transactions. Vol. 9: P. 2 (1895—96). 8:o.

Hamburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. (3) 4. 1897. 8:o.
Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. Bd 15. 1897. 4:o.

— *Deutsche Seewarte.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an 10 Stationen 2. Ordnung. Jahrg. 18 (1895). 4:o.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Systeme der Deutschen Seewarte für das Lustrum 1891—95. 4:o,
Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. H. 7. 1896. 4:o.
Wetterbericht. Jahrg. 21 (1896). 4:o.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. VI: 24. 1897. 4:o.

— *Institut météorologique central.*
Observations. Vol. 14: Livr. 1 (1895); 1881—90: T. suppl. 4:o.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1895. 4:o.
Niederschlagsbeobachtungen der meteorologischen Stationen in Baden. Jahrg. 1895: 2; 1896: 1—2. 4:o.

Kazan. *Kejserl. universitetet.*
Učenija zapiski. G. 64 (1897): N:o 2—3. 8:o.

Kiew. *Observatoire météorologique de l'université.*
Observations. 1895: 4—12. 8:o.
Bulletin. 1894 95: N:o 12; 1895/96: 1—9. 8:o.

Kjöbenhavn. *Dansk meteorologisk Institut.*
Meteorologiske Observationer i Kjöbenhavn. 1896. 4:o.
Maanedsoversigt over Vejrforholdene. 1896: 1—12. Fol.
Meteorologisk Aarbog. 1894: D. 1; 1895: 1, 3. Fol.

Konstantinopel. *Observatoire impérial.*
Bulletin météorologique et séismique. 1895: 12; 1896: 1—4. 4:o.

Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1897: 3. 8:o.
Materyały do klimatografii Galicyi. R. 1895. 8:o.
Stan wody na rzekach Galicyjskich. R. 1893—94. 8:o.

Kristiania. *Norwegisches meteorologisches Institut.*
Jahrbuch. 1893—94. 4:o.

Kristiania. *Norges geografiske Opmaaling.*
Den norske Lods. H. 2. 1896. 8:o.
Topografisk Kart. 26 B, 6 D, H. 17, I 16—18, K 17—18, U 3, Z 5, Æ 4, Ö 5—6. Fol.
Specialkart over den norske Kyst. B: 10—13, 44. Fol.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 33 (1897): N:o 123. 8:o.
Lawrence. *University.*
Kansas university quarterly. Vol. 6 (1897): N:o 1: A—B. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1897): P. 2. 8:o.
— *Royal institution of Great Britain.*
Proceedings. Vol. 15: P. 1. 1897. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): 5. 8:o.
Proceedings. Session 1896/97: N:o 179—180. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 53 (1897): P. 2; General index. P. 2. 1897. 8:o.
— *Royal society.*
Philosophical transactions. Vol. 186 (1895): A: P. 1—2; B: P. 1—2. Ser. A: Vol. 187—188 (1896); B: Vol. 187 (1896). 4:o.
List. 1896 30/11. 4:o.
Proceedings. Vol. 61 (1897): N:o 371—373. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 22 (1896): N:o 97—100; 23 (1897): 101. 8:o.
The meteorological record. Vol. 15 (1895): N:o 57—60; 16 (1896): 61—62. 8:o.
— *Meteorological office.*
Daily weather report. 1896. 4:o.
Weekly weather report. Vol. 13 (1896). 4:o.
Summary of the observations made at the stations included in the daily and weekly weather reports. 1896: 1—10. 4:o.
Report of the meteorological council. Year 1895/96. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 29 (1897): N:o 5. 8:o.
Annual report. 27 (1896). 8:o.
Madras. *Observatory.*
Daily meteorological means. 1896. 4:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico.*
Boletín. T. 22 (1895). 8:o.
— *Observatorio.*
Resumen de las observaciones meteorológicas 1893—94. 8:o.
Observaciones meteorológicas 1894—95. 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 41 (1896/97): P. 3. 8:o.
Manila. *Observatorio.*
Boletín mensual. 1895: 3—12; 1896: 1—6. 4:o.

Marseille. *Faculté des sciences.*
Annales. T. 6: Fasc. 4—6; 8: 1—4. 1897. 4:o.
Mexico. *Instituto médico nacional.*
Anales. T. 2: N. 3—5; 3: 1. 1896—97. 4:o.
— *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1896: 1—12; 1897: 2. 4:o.
Boletín de agricultura, minera é industrias. Año 6 (1896/97): N:o 4. 8:o.
Modena. *R. Osservatorio.*
Pubblicazioni. N:o 7. 1896. 4:o.
Mont Blanc. *Observatoire météorologique.*
Annales. 1—2. Paris 1893, 96. 4:o.
Montevideo. *Sociedad meteorológica Uruguaya.*
Resumen de las observaciones pluviométricas. 1895: Trim. 4.
— *Observatorio meteorológico del colegio pío de Villa Colón.*
Boletín mensual. Año 7 (1895): N. 4—9. 8:o.
Mount Hamilton. *Lick observatory.*
Atlas of the moon. Pl. 2—5. 1896. Fol.
Moscou. *Observatoire astronomique.*
Annales. (2) Vol. 3: Livr. 2. 1896. 4:o.
— *Observatoire météorologique de l'université.*
Observations. 1895—96. 8:o.
München. *K. Meteorologische Central-Station.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen in Bayern. Jahrg. 17 (1895): H. 3—4; 18 (1896): 1—4. 4:o.
Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1895: 11—12; 1896: 1—7, 9—10, 12; 1897: 1—7. Fol.
Napoli. *Academia di archeologia, lettere e belle arti.*
Atti. Vol. 18 (1896/97). 4:o.
Rendiconto. N. S. Anno 10 (1896): 11—12; 11 (1897): 1—3. 8:o.
— *R. Osservatorio di Capodimonte.*
Osservazioni meteoriche. 1894—96. 4:o & 8:o.
Riassunti decadici e mensuali delle osservazioni meteoriche. 1893—95. 4:o & 8:o.
Determinazioni assolute della declinazione magnetica. 1892—96. 4:o & 8:o.
Variazioni della declinazione magnetica 1892. 8:o.
New Haven. *Astronomical observatory of Yale university.*
Transactions. Vol. 1: P. 5. 1896. 4:o.
— *Public library.*
Bulletin. Vol. 1 (1897): N:o 5. 8:o.
— *Academy of sciences.*
Annals. Vol. 9 (1897): N:o 4—5. 8:o.
— *Meteorological observatory of the Dep. of Public parks.*
Report. Year 1896. 4:o.
Nizza. *Société de médecine et de climatologie de Nice.*
Nice-médical. 20 (1895/96): N:o 5—12; 21 (1896/97): 1—5. 8:o.

Odessa. *Observatoire météorologique.*
Revue météorologique. Travaux du réseau météorologique du sud-ouest de la Russie. Dix ans d'existence, 1886—95. Avec Texte français. 4:o.
O-Gyalla. *Meteorologisch-magnetisches Central-Observatorium.*
Beobachtungen 1896. 8:o.
Ottawa. *Field-naturalists' club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 10 (1896/97): N:o 9—11. 8:o.
Oxford. *Radcliffe observatory.*
Results of meteorological observations. Vol. 46 (1888—89). 8:o.
Paris. *Académie des sciences.*
CAUCHY, A., Oeuvres complètes. Sér. 1: T. 9. 1896. 4:o.
— *Bureau central météorologique de France.*
Rapports du comité météorologique international. Réunion d'Upsal 1894. 8:o.
Bulletin international. Année 1896. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1896. 4:o.
— *Muséum d'histoire naturelle.*
Nouvelles archives. (3) T. 8: Fasc. 1—2. 1896. 4:o.
Bulletin. Année 1896: N:o 7-8; 1897: 1. 8:o.
— *Observatoire municipal de Montsouris.*
Annuaire. Année 1897. 12:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1897: 5. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
La feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 27 (1897): N:o 319—320. 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 20 - 21. 1897. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 25 (1897): N:o 1—2. 8:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 43 (1895): 7—12. 8:o.
— *Société zoologique de France.*
Bulletin. T. 21 (1896)—22 (1897): N:o 2. 8:o.
Perpignan. *Commision météorologique départementale des Pyrénées-Orientales.*
Bulletin météorologique. 22 (1893)—23 (1894). 4:o.
Ponta Delgada. *Observatoire météorologique.*
Résumé des observations. 1896: 1—4, 6—7, 9—11. 4:o.
Quito. *Observatorio astronomico y meteorologico.*
Boletin. Año 1 (1895/96): N. 4—12. 8:o.
Roma. *Ufficio centrale di meteorologia e di geodinamica.*
Rivista meteorico-agraria. Anno 17 (1896). 4:o.
— *Specola Vaticana.*
Pubblicazioni. Vol. 4. 1894. 4:o.
— *R. Istituto botanico.*
Annuario. Anno 6 (1895—96): Fasc. 3. 4:o.
San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Anales. Secc. 2:a: Observaciones meteorológicas y magnéticas. Año 1894. 4:o.

San José. *Instituto fisico-geografico nacional de Costa Rica.*
Anales. T. 6 (1893). Fol.
Sarajevo. *Bosnisch-Hercegovinische Landesregierung.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien und der Hercegovina. Jahr 1895. 4:o.
Sarzana. *Osservatorio meteorologico nel seminario Vescovile.*
Osservazioni. Anno 2 (1895/96). 4:o.
St. Petersburg. *Observatoire physique central.*
Bulletin météorologique. Année 1896. Fol.
Extrait du compte rendu pour 1895. 8:o.
SRESNEWSKIJ, B., Cyclonenbahnen in Russland 1887—89. 4:o.
— *Musée zoologique de l'Académie Imp. des sciences.*
Annuaire. 1897: N:o 1. 8:o.
— *Laboratoire biologique.*
Bulletin. T. 2: 1. 1897. 8:o.
— *Société russe de géographie.*
Bulletin. T. 32 (1896): 4. 8:o.
— *Universitetet.*
Katalog biblioteki museja drevnostey. 1896. 8:o.
Godičnyi akt 1897. 8:o.
Zapiski istoriko-filolog. fakulteta. 39—40. 1896. 8:o.
Strassburg. *Universitetet.*
Akademiskt tryck 1895/96.
— *K. Universitäts-Sternwarte.*
Annalen. Bd 1. 1896. 4:o.
Sydney. *Board for international exchanges.*
New South Wales: the mother colony of the Australias. Ed. by FRANK HUTCHINSON. 1896. 8:o.
Historical records of New South Wales. Vol. 4. 1896. 8:o.
— *Observatory.*
Meteorological observations at Sydney. 1895: 7—12. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
Boletín. T. 1: N:o 25. 1896. 4:o.
Tiflis. *Physikalisches Observatorium.*
Beobachtungen. Jahr 1894—95. 4:o.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens. Jahr 1890. 4:o.
Torino. *Osservatorio centrale del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri.*
Bollettino mensuale. (2) Vol. 16 (1896): N:o 1. 8:o.
Toronto. *Canadian institute.*
Transactions. Vol. 5: P. 1. 1896. 8:o.
Proceedings. W. S. Vol. 1: P. 1. 1897. 8:o.
– *Meteorological service.*
Monthly weather review. 1896: 1—7. 4:o.
General meteorological register for 1896. 8:o.
Utrecht. *Provinciaal Utrechtsch genootschap van kunsten en wetenschappen.*
Verslag van het verhandelde in de algemeene vergadering, 1896. 8:o.
Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen, 1896. 8:o.

Verona. *Accademia.*
Memorie. (3) Vol. 72: Fasc. 3–4. 1896. 8:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
Miscellaneous collections. Vol. 39: N:o 1077. 1897. 8:o.
Annual report. 1893/94. 8:o.
— *U. S. National museum.*
Proceedings. Vol. 18 (1895). 8:o.
Bulletin. N:o 47. 1896. 8:o.
— *U. S. Geological survey.*
Annual report. 17 (1895/96): P. 3. 8:o.
— *U. S. Coast and geodetic survey.*
Report of the superintendent. Year 1894/95. 4:o.
— *U. S. Naval Observatory.*
Meteorological observations and results. Year 1890. 4:o.
— *Weather-bureau.*
Report. 1895/96. 4:o.
Bulletin. N:o 19. 1896. 8:o.
Monthly weather review. 1895: 11–12 & Annual summary; 1896: 1–12 & Annual summary. 4:o.
Climate and health. Vol. 2 (1896): N:o 1, 3. 4:o.
Wien. *K. K. Hydrographisches Central-Bureau.*
Jahrbuch. Jahrg. 2 (1894). 4:o.
— *v. Kuffner'sche Sternwarte.*
Publicationen. Bd 4. 1896. 4:o.
— *K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Beobachtungen. 1896: 1–5. 8:o.
— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 47 (1897): H. 3. 8:o.
Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Sitzungsberichte. Jahrg. 1896: N:o 6–11. 8:o.
Xalapa. *Observatorio central del estado de Veracruz Llave.*
Boletin mensual meteorológico y agricola. 1896: 1–2, 4–8, 10–11. 4:o.
Zürich. *Meteorologische Central-Anstalt.*
Meteorologische Beobachtungen an 12 Stationen der Schweiz. 1895: Sem. 1–2. 4:o.

Af professor G. Lindström:

Der deutschen geologischen Gesellschaft zu ihrer 34. allgemeinen Versammlung im Sept. 1887 in Bonn gewidmet. Bonn 1887. 8:o.
Sachregister zu dem chronologischen Verzeichniss der geologischen und mineralogischen Litteratur der Rheinprovinz. Bonn 1896. 8:o.

Af A. Löfgren:

DE MAGALHÃES, Anchieta e as raças e linguas indigenas. S. Paulo 1897. 8:o.

Af Mrs Carvill Lewis:

LEWIS, H. C., Papers and notes on the genesis and matrix of the diamond. Lond. 1897. 8:o.

Af utgifvarne:

Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. 1897: N:o 1 & General-register 1887—96. 8:o.
Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT. Separat ur årg. 1896. 8:o.
Annaes de sciencias naturaes. Anno 4 (1897): N:o 1—2. Porto. 8:o.
SYMONS's monthly meteorological magazine. Vol. 31 (1896/97): N:o 361—372. Lond. 8:o.

Af författarne:

FRIES, TH. M., Bidrag till en lefnadsteckning öfver Carl von Linné. 1—4. Ups. 1893—96. 8:o.
— Naturalhistorien i Sverige intill medlet af 1600-talet. 1894. 8:o.
HAMBERG, H. E., Om skogarnes inflytande på Sveriges klimat. 4—5. 4:o.
LECHE, W., Mammalia. Lief. 45—46. Lpz. 1897. 8:o.
LINDVALL, C. A., The glacial nightmare. Sthlm 1897. 8:o.
NATHORST, A. G., Ett och annat om isbjörnen. Sthlm 1897. 8:o.
— Förteckning på skrifter, 1869—96. Sthlm 1897. 8:o.
NILSSON, A., Om Norrbottens myrar och försumpade skogar. Sthlm 1897. 8:o.
— Om örtrika barrskogar. Sthlm 1896. 8:o.
— Litteraturanmälan: G. Andersson, Sv. växtvärldens historia. Sthlm 1896. 8:o.
OLIVECRONA, K., De la peine de mort. Paris 1893. 8:o.
WALLENGREN, H., Zur Kenntniss der Gattung Trichodina. Lpz. 1897. 8:o.
WITTROCK, V. B., Viola-studier. 1. Sthlm 1897. 8:o.
ARNAIZ, R., Los grandes problemas filosófico-naturales. San Sebastian 1897. 8:o.
FLEUTIAUX, E., Description d'une nouvelle espèce d'Eucnémides. Paris 1896. 8:o.
— Description d'un Eucnémide nouveau de Sumatra. Paris 1896. 8:o.
LAMPRECHT, G., Wetterperioden. Bautzen 1897. 4:o.
FOSLIE, M., On some Lithothamnia. Trondhjem 1897. 8:o.
— Einige Bemerkungen über Melobesieæ. Berl. 1897. 8:o.
DE GREGORIO, A., Su taluni nuovi strumenti fisici e metereologici. Palermo 1893. 4:o.
— Esame di taluni molluschi viventi e terziarii del bacino Mediterraneo. Palermo 1889. 8:o.
— 5 småskrifter.
SCHIAPARELLI, G. V., Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte. Roma 1896. 4:o,
— Rubra Canicula. Rovereto 1896. 8:o.
SCOGNAMIGLIO, G., Relazione della mostra di prodotti chimici . . . in Napoli. Nap. 1894. 8:o.
— 12 småskrifter.
SOCOLOW, S., Nouvelles recherches astronomiques. Moscou 1896. 8:o.
STOSSICH, M., Il genere Ascaris Linné. Trieste 1896. 8:o.
— 2 småskrifter.

THEVENET, A., Recherches sur les influences de la chaleur, du vent et de la vapeur d'eau sur la pression barométrique. Mustapha-Alger 1896. 4:o.
TONDUZ, A., Flora de Costa Rica. San José 1897. 8:o.
UNDERWOD, C. F., Fauna de Costa Rica. San José 1897. 8:o.
VINCIGUERRA, D., Pesci di Birmania. Genova 1890. 8:o.
— 18 småskrifter.
WEDELL-WEDELLSBORG, P. S., Julius Thomsen's Dualismus der chemischen Masse beleuchtet durch Aufstellung einer neuen Wärmetheorie. Kopenh. 1897. 4:o.
WILLE, N., Om Færöernes Ferskvandsalger. Lund 1897. 8:o.
— 2 småtryck.
WODECKI, F., Ksiega wszechświatu i sposób jej crytania. Kraków 1896. 8:o.
WOLFER, A., Astronomische Mitteilungen. N:r 87. Zürich 1896. 8:o.
ZíBRT, C., O srovnávacím studiu lidového podání. Prag 1897. 8:o.
ZOPKE, H., Professor Franz Reuleaux, a biographical sketch. Wash. 1897. 8:o.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 7.

Onsdagen den 8 September.

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot Professorn vid Upsala universitet ALARIK FRITHIOF HOLMGREN, samt utländska ledamöterne: f. d. Direktören för Bergsakademien i Leoben PETER VON TUNNER, Professorn och Direktören för kemiska laboratorium i Wiesbaden CARL REMIGIUS FRESENIUS och f. d. Professorn vid Köpenhamns universitet JOHANNES JAPETUS SMITH STEENSTRUP med döden afgått.

Friherre NORDENSKIÖLD redogjorde för borrningar i urberget efter vatten, hvilka under sistlidne sommar blifvit utförda, särskildt med anledning af prof på sådant vatten, som blifvit insända från borrbrunnar vid lotsstationerna Svenska Högarne och Skag.

Herr WITTROCK framlade det under sommaren utkomna andra bandet af »Acta horti Bergiani» samt redogjorde för innehållet af de utaf honom sjelf författade, i nämnda band ingående afhandlingarne: »Morfologisk-biologiska och systematiska studier öfver Viola tricolor (L.) och hennes närmare anförvandter.»

Från Kongl. Ecklesiastik Departementet hade ingått meddelande, att Professor A. G. NATHORST blifvit af Kongl. Maj:t

förordnad att vara svenskt ombud vid en internationel geologisk kongress i S:t Petersburg under senare hälften af sistlidne Augusti månad.

Till införande i denna tidskrift antogs en af Lektorn OL. OLSSON inlemnad afhandling med titel: »Generalisation af problemet om fasta kroppars planrörelse i vätskor».

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Bergianska stiftelsen.*
Acta Horti Bergiani. Bd. 2. 1892—97. 8:o.
— *K. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademien.*
Månadsblad. Årg. 22 (1893). 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 6 häften. 4:o.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. Årg. 17 (1897): H. 2. 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. 1897: N:r 5—7. 8:o.
Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*
Handlingar. 1897: H. 1—2. 8:o.
Lund. *Universitetet.*
Akademiskt tryck 1896/97. 23 st. 8:o & 4:o.
Albany. *New York state museum.*
Annual report. 48 (1894): 1—3. 8:o.
— *State geologist.*
Annual report. 14 (1894). 8:o.
Amsterdam. *Société mathématique.*
Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 5: P. 2(1896/97). 8:o.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
Studies in historical and political science. Ser. 14: 6—12; 15: 1—2. 1896—97. 8:o.
Circulars. Vol. 16: N:o 130—131. 1897. 4:o.
American journal of mathematics. Vol. 18 (1896): N:o 3—4; 19(1897): 1—2. 4:o.
American chemical journal. Vol. 18 (1896): N:o 6—10; 19 (1897): 1—2. 8:o.
American journal of philology. Vol. 17 (1896): 1—3. 8:o.
— *Peabody institute.*
Annual report. 30 (1896/97). 8:o.
Batavia. *K. Natuurkundig Vereeniging in Nederl.-Indië.*
Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. D. 56. 1897. 8:o.
Boekwerken ter tafel gebracht in de vergaderingen 1896. 8:o.

(Forts. å sid. 371.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 7.
Stockholm.

Generalisation af problemet om fasta kroppars planrörelse i vätskor.

Af OL. OLSSON.

(Meddeladt den 8 September 1897 genom A. LINDSTEDT.)

1. I sin afhandling »Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit» i CRELLES Journal för år 1870 har KIRCHHOFF visat, hurusom problemet om rotationskroppars rörelse i vätskor, då inga yttre krafter äro verkande, låter bringa sig till kvadratur. Särskildt studerar han härvid det fallet, då rörelsen är plan, och visar, att rörelseekvationerna leda till elliptiska funktioner. I en uppsats »Om fasta kroppars rörelse i vätskor»[1]) behandlar jag samma uppgift i det allmännare fallet, att kroppen har en form hvilken som helst, och ådagalägger, att rörelsen äfven härvid låter bestämma sig med tillhjälp af elliptiska funktioner. I en följande afhandling: »Beiträge zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit»[2]) har jag i väsentlig mån generaliserat nämnda uppgift, i det att jag icke längre betraktar rörelsen såsom plan, utan antager att den är bunden blott på det sättet, att translationsresultanten under hela rörelsen ligger uti ett i kroppen fast plan. Jag har visat, att differentialekvationerna äfven i detta allmännare fall låta bringa sig till kvadratur, nemligen så, att den slutliga tidsintegralen kan bringas till hyperelliptisk form.

[1]) Upsala universitets Årsskrift 1890.
[2]) Vetenskapssocietetens i Upsala Acta 1891.

Emellertid har jag nu sedermera lyckats finna, att man äfven kan nedbringa detta problems lösbarhet till beroende af inversionen af en elliptisk integral, detta på den grund, att man, genom att på ett lämpligt sätt bestämma några ingående arbiträra konstanter, kan nedbringa den ingående hyperelliptiska tidsintegralen

$$\int \frac{Q(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

der Q och R äro hela polynom af gradtalen 2 och 8 resp., till en elliptisk integral af tredje slaget.

Lösningen af i fråga varande uppgift i nu angifna rigtning låter verkställa sig på följande sätt.

2. Refererar man kroppens partiklar dels till ett i honom fast, rätvinkligt koordinatsystem 0_1x, 0_1y, 0_1z, dels till ett i rymden fixeradt dylikt 0ξ, 0η, 0ζ, samt betecknar 0_1:s hastighetskomposanter längs axlarne 0_1x, 0_1y, 0_1z med u, v, w och kroppens vinkelhastigheter kring samma axlar med p, q, r samt slutligen med T betecknar det rörliga systemets lefvande kraft, så hafva rörelseekvationerna, då inga på kroppen eller vätskan verkande yttre krafter förefinnas, följande utseende (se Über die Bewegung eines Rotationskörpers etc.»):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u};
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p};
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

hvartill komma relationerna

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z\,,\\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\,,\\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z\,,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

der α, β, γ beteckna 0_1:s koordinater med afseende på systemet $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, och α_1, α_2, α_3, . . . rigtningskosinerna mellan de båda koordinatsystemens axlar;

och vidare

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= q\alpha_3 - r\alpha_2\,,\\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= r\alpha_1 - p\alpha_3\,,\\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= p\alpha_2 - q\alpha_1\,,\end{aligned}\right\}\quad(4_1)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{d\beta_1}{dt} &= q\beta_3 - r\beta_2\,,\\ \frac{d\beta_2}{dt} &= r\beta_1 - p\beta_3\,,\\ \frac{d\beta_3}{dt} &= p\beta_2 - q\beta_1\,,\end{aligned}\right\}\quad(4_2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma_1}{dt} &= q\gamma_3 - r\gamma_2\,,\\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= r\gamma_1 - p\gamma_3\,,\\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= p\gamma_2 - q\gamma_1\,,\end{aligned}\right\}\quad(4_3)$$

samt slutligen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w\,,\\ \frac{d\beta}{dt} &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w\,,\\ \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w\,.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Till dessa ekvationer har man följande integraler:

$$\left.\begin{aligned}&2T = l\,,\\ &\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = m\,,\\ &\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\cdot\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = n\,;\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}&=k\,,\\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}&=k'\,,\\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial v}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}&=k''\,;\end{aligned}\right\}\quad(7_1)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}&=l_1+\beta k''-\gamma k'\,,\\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}&=l'+\gamma k-\alpha k''\,,\\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}&=l''+\alpha k'-\beta k\,,\end{aligned}\right\}\quad(7_2)$$

hvarest l, m, n, k, k', k'', l_1, l', l'' beteckna integrationskonstanter.

Lefvande kraften T är, såsom KIRCHHOFF uppvisat, en homogen andra grads funktion af u, v, w, p, q, r:

$$\left.\begin{aligned}2T=c_{11}u^2&+2c_{12}uv+2c_{13}uw+2c_{14}up+2c_{15}uq+2c_{16}ur\\ &+c_{22}v^2+2c_{23}vw+2c_{24}vp+2c_{25}vq+2c_{26}vr\\ &+c_{33}w^2+2c_{34}wp+2c_{35}wq+2c_{36}wr\\ &+c_{44}p^2+2c_{45}pq+2c_{46}pr\\ &+c_{55}q^2+2c_{56}qr\\ &+c_{66}r^2\,,\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

der koefficienterna $c_{\lambda\mu}$ $(\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 6)$ äro konstanter, beroende på kroppens form, massa och dennas fördelning samt på vätskans täthet.

3. Tager man det i kroppen fasta plan, i hvilket translationsrörelsens resultant skall ligga, till yz-plan, så att $n=0$, erhåller det rörliga systemets lefvande kraft utseendet

$$\left.\begin{aligned}2T=c_{22}v^2&+2c_{23}vw+2c_{24}vp+2c_{25}vq+2c_{26}vr\\ &+c_{33}w^2+2c_{34}wp+2c_{35}wq+2c_{36}wr\\ &+c_{44}p^2+2c_{45}pq+2c_{46}pr\\ &+c_{55}q^2+2c_{56}qr\\ &+c_{66}r^2\,.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

På grund häraf får man, om man på $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$, $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$ inför beteckningarna x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3:

$$\left.\begin{aligned}
c_{22}v + c_{23}w + c_{24}p + c_{25}q + c_{26}r &= x_2\,, \\
c_{23}v + c_{33}w + c_{34}p + c_{35}q + c_{36}r &= x_3\,, \\
c_{24}v + c_{34}w + c_{44}p + c_{45}q + c_{46}r &= y_1\,, \\
c_{25}v + c_{35}w + c_{45}p + c_{55}q + c_{56}r &= y_2\,, \\
c_{26}v + c_{36}w + c_{46}p + c_{56}q + c_{66}r &= y_3\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

och alltså

$$\left.\begin{aligned}
v &= \alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}x_3 + \alpha_{13}y_1 + \alpha_{14}y_2 + \alpha_{15}y_3\,, \\
w &= \alpha_{21}x_2 + \alpha_{22}x_3 + \alpha_{23}y_1 + \alpha_{24}y_2 + \alpha_{25}y_3\,, \\
p &= \alpha_{31}x_2 + \alpha_{32}x_3 + \alpha_{33}y_1 + \alpha_{34}y_2 + \alpha_{35}y_3\,, \\
q &= \alpha_{41}x_2 + \alpha_{42}x_3 + \alpha_{43}y_1 + \alpha_{44}y_2 + \alpha_{45}y_3\,, \\
r &= \alpha_{51}x_2 + \alpha_{52}x_3 + \alpha_{53}y_1 + \alpha_{54}y_2 + \alpha_{55}y_3\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

då man sätter

$$\alpha_{\varrho\sigma} = \frac{\delta_{\varrho\sigma}}{\delta} \quad (\varrho,\ \sigma=1, 2, \ldots 5)\,, \qquad (12)$$

der δ betecknar ekvationssystemet (10):s determinant och $\delta_{\varrho\sigma}$ dess underdeterminanter.

Man har följaktligen

$$\alpha_{\varrho\sigma} = \alpha_{\sigma\varrho}\,. \qquad (12_1)$$

Om man i likheten (9) inför uttrycken på v, w, ... blir lefvande kraften T en homogen andra grads funktion med afseende på x_2, x_3, y_1, y_2, y_3:

$$\left.\begin{aligned}
2T = a_{11}x_2^2 &+ 2a_{12}x_2x_3 + 2a_{13}x_2y_1 + 2a_{14}x_2y_2 + 2a_{15}x_2y_3 \\
&+ a_{22}x_3^2 + 2a_{23}x_3y_1 + 2a_{24}x_3y_2 + 2a_{25}x_3y_3 \\
&\quad + a_{33}y_1^2 + 2a_{34}y_1y_2 + 2a_{35}y_1y_3 \\
&\qquad + a_{44}y_2^2 + 2a_{45}y_2y_3 \\
&\qquad\quad + a_{55}y_3^2\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ett enkelt sätt att bestämma koefficienterna a_{rs} $(r, s=1, 2, \ldots 5)$ skola vi i det följande angifva.

För att nu emellertid så mycket som möjligt förenkla lefvande kraftens uttryck och dermed äfven rörelseekvationerna, transformera vi koordinatsystemet xyz till ett nytt origo (x_0, y_0, z_0) och vrida dess axlar i de nya lägena x', y', z'.

Det är just i följd af denna koordinattransformation och införandet af de arbiträra konstanterna x_0, y_0, z_0, α'_1, α'_2, α'_3, β'_1, ..., der α'_1, α'_2, α'_3, β'_1, ... beteckna rigtningskosinerna mellan de gamla och nya koordinataxlarne, samt dessa konstanters lämpliga bestämmande, som det i fråga varande problemets tidsintegral låter bringa sig till elliptisk form.

Betecknar man med p', q', r', u', v', w' rotations- och translationskomposanterna med afseende på det nya axelsystemet, erhåller man relationerna:

$$\left.\begin{aligned} p' &= \alpha'_1 p + \beta'_1 q + \gamma'_1 r\,, \\ q' &= \alpha'_2 p + \beta'_2 q + \gamma'_2 r\,, \\ r' &= \alpha'_3 p + \beta'_3 q + \gamma'_3 r\,, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \alpha'_1 p' + \alpha'_2 q' + \alpha'_3 r'\,, \\ q &= \beta'_1 p' + \beta'_2 q' + \beta'_3 r'\,, \\ r &= \gamma'_1 p' + \gamma'_2 q' + \gamma'_3 r'\,, \end{aligned}\right\} \quad (14_1)$$

samt

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + y_0 r - z_0 q\,, \\ v' &= v + z_0 p - x_0 r\,, \\ w' &= w + x_0 q - y_0 p\,. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Widare erhåller man, då man med T' betecknar den lefvande kraften, betraktad som funktion af p', q', r', u', ...:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T'}{\partial u'}\,, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T'}{\partial v'}\,, \quad \frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial T'}{\partial w'}\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = z_0 \frac{\partial T'}{\partial v'} - y_0 \frac{\partial T'}{\partial w'} + \alpha'_1 \frac{\partial T'}{\partial p'} + \alpha'_2 \frac{\partial T'}{\partial q'} + \alpha'_3 \frac{\partial T'}{\partial r'}\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = x_0 \frac{\partial T'}{\partial w'} - z_0 \frac{\partial T'}{\partial u'} + \beta'_1 \frac{\partial T'}{\partial p'} + \beta'_2 \frac{\partial T'}{\partial q'} + \beta'_3 \frac{\partial T'}{\partial r'}\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = y_0 \frac{\partial T'}{\partial u'} - x_0 \frac{\partial T'}{\partial v'} + \gamma'_1 \frac{\partial T'}{\partial p'} + \gamma'_2 \frac{\partial T'}{\partial q'} + \gamma'_3 \frac{\partial T'}{\partial r'}\,,$$

eller om man sätter

$$x'_1 = \frac{\partial T'}{\partial u'}, \quad x'_2 = \frac{\partial T'}{\partial v'}, \quad x'_3 = \frac{\partial T'}{\partial w'},$$

$$y'_1 = \frac{\partial T'}{\partial p'}, \quad y'_2 = \frac{\partial T'}{\partial q'}, \quad y'_3 = \frac{\partial T'}{\partial r'},$$

så erhåller man slutligen

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3 \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_0 x'_2 - y_0 x'_3 + \alpha'_1 y'_1 + \alpha'_2 y'_2 + \alpha'_3 y'_3, \\ y_2 &= x_0 x'_3 - z_0 x'_1 + \beta'_1 y'_1 + \beta'_2 y'_2 + \beta'_3 y'_3, \\ y_3 &= y_0 x'_1 - x_0 x'_2 + \gamma'_1 y'_1 + \gamma'_2 y'_2 + \gamma'_3 y'_3. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Substituerar man dessa värden på x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 i (13) samt observerar, att $x_1 = x'_1 = 0$, får man

$$\left.\begin{aligned} 2T = a'_{11} x'^2_2 &+ 2a'_{12} x'_2 x'_3 + 2a'_{13} x'_2 y'_1 + 2a'_{14} x'_2 y'_2 + 2a'_{15} x'_2 y'_3 \\ &+ a'_{22} x'^2_3 + 2a'_{23} x'_3 y'_1 + 2a'_{24} x'_3 y'_2 + 2a'_{25} x'_3 y'_3 \\ &\quad + a'_{33} y'^2_1 + 2a'_{34} y'_1 y'_2 + 2a_{35} y'_1 y_3 \\ &\qquad + a'_{44} y'^2_2 + 2a'_{45} y'_2 y'_3 \\ &\qquad\quad + a'_{55} y'^2_3 \\ &\qquad\qquad = l \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

hvarest

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} + 2a_{13} z_0 - 2a_{15} x_0 + a_{33} z_0^2 - 2a_{35} x_0 z_0 + a_{55} x_0^2, \\ a'_{22} &= a_{22} - 2a_{23} y_0 + 2a_{24} x_0 + a_{33} y_0^2 - 2a_{34} x_0 y_0 + a_{44} x_0^2, \\ a'_{12} &= a_{12} - a_{13} y_0 + (a_{14} - a_{15}) x_0 + a_{23} z_0 - a_{33} y_0 z_0 + \\ &\quad + a_{34} x_0 z_0 + a_{35} x_0 y_0 - a_{45} x_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{18$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} a'_{13} &= a\alpha'_1 + b\beta'_1 + c\gamma'_1, \\ a'_{14} &= a\alpha'_2 + b\beta'_2 + c\gamma'_2, \\ a'_{15} &= a\alpha'_3 + b\beta'_3 + c\gamma'_3; \\ a'_{23} &= a'\alpha'_1 + b'\beta'_1 + c'\gamma'_1, \\ a'_{24} &= a'\alpha'_2 + b'\beta'_2 + c'\gamma'_2, \\ a'_{25} &= a'\alpha'_3 + b'\beta'_3 + c'\gamma'_3; \end{aligned}\right\} \tag{18$_2$}$$

$$a'_{33} = a_{33}\alpha'^2_1 + a_{44}\beta'^2_1 + a_{55}\gamma'^2_1 + 2(a_{34}\alpha'_1\beta'_1 + a_{35}\alpha'_1\gamma'_1 + a_{45}\beta'_1\gamma'_1), \tag{19}$$

$$a'_{44} = a_{33}\alpha'^2_2 + a_{44}\beta'^2_2 + a_{55}\gamma'^2_2 + 2(a_{34}\alpha'_2\beta'_2 + a_{35}\alpha'_2\gamma'_2 + a_{45}\beta'_2\gamma'_2), \quad (19_1)$$

$$a'_{55} = a_{33}\alpha'^2_3 + a_{44}\beta'^2_3 + a_{55}\gamma'^2_3 + 2(a_{34}\alpha'_3\beta'_3 + a_{35}\alpha'_3\gamma'_3 + a_{45}\beta'_3\gamma'_3), \quad (19_2)$$

$$\left.\begin{aligned} a'_{34} = a_{33}\alpha'_1\alpha'_2 + a_{44}\beta'_1\beta'_2 + a_{55}\gamma'_1\gamma'_2 + a_{34}(\alpha'_1\beta'_2 + \alpha'_2\beta'_1) + \\ + a_{35}(\alpha'_1\gamma'_2 + \alpha'_2\gamma'_1) + a_{45}(\beta'_1\gamma'_2 + \beta'_2\gamma'_1), \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} a'_{35} = a_{33}\alpha'_1\alpha'_3 + a_{44}\beta'_1\beta'_3 + a_{55}\gamma'_1\gamma'_3 + a_{34}(\alpha'_1\beta'_3 + \alpha'_3\beta'_1) + \\ + a_{35}(\alpha'_1\gamma'_3 + \alpha'_3\gamma'_1) + a_{45}(\beta'_1\gamma'_3 + \beta'_3\gamma'_1), \end{aligned}\right\} \quad (20_1)$$

$$\left.\begin{aligned} a'_{45} = a_{33}\alpha'_2\alpha'_3 + a_{44}\beta'_2\beta'_3 + a_{55}\gamma'_2\gamma'_3 + a_{34}(\alpha'_2\beta'_3 + \alpha'_3\beta'_2) + \\ + a_{35}(\alpha'_2\gamma'_3 + \alpha'_3\gamma'_2) + a_{45}(\beta'_2\gamma'_3 + \beta'_3\gamma'_2), \end{aligned}\right\} \quad (20_2)$$

hvarest

$$\left.\begin{aligned} a = a_{13} - a_{35}x_0 + a_{33}z_0, \quad b = a_{14} - a_{45}x_0 + a_{34}z_0, \\ c = a_{15} - a_{55}x_0 + a_{35}z_0, \\ a' = a_{23} + a_{34}x_0 - a_{33}y_0, \quad b' = a_{24} + a_{44}x_0 - a_{34}y_0, \\ c' = a_{25} + a_{45}x_0 - a_{35}y_0. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

4. För att verkställa integrationen af rörelseekvationerna har man att observera, att de, såsom CLEBSCH har visat,[1]) kunna transformeras på följande sätt.

Om man, i likhet med hvad vi ofvan gjort, sätter

$$\left.\begin{aligned} x'_1 = \frac{\partial T'}{\partial u'}, \quad y'_1 = \frac{\partial T'}{\partial p'}, \\ x'_2 = \frac{\partial T'}{\partial v'}, \quad y'_2 = \frac{\partial T'}{\partial q'}, \\ x'_3 = \frac{\partial T'}{\partial w'}, \quad y'_3 = \frac{\partial T'}{\partial r'}, \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

följer att

$$\left.\begin{aligned} u' = \frac{\partial T'}{\partial x'_1}, \quad p' = \frac{\partial T'}{\partial y'_1}, \\ v' = \frac{\partial T'}{\partial x'_2}, \quad q' = \frac{\partial T'}{\partial y'_2}, \\ w' = \frac{\partial T'}{\partial x'_3}, \quad r' = \frac{\partial T'}{\partial y'_3}, \end{aligned}\right\} \quad (22_1)$$

---

[1]) Math. Ann. B. III, pg. 240.

samt att ekvationerna (1), (2), (6) antaga formen

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx'_1}{dt} &= x'_3\frac{\partial T'}{\partial y'_2} - x'_2\frac{\partial T'}{\partial y'_3}\,,\\ \frac{dx'_2}{dt} &= x'_1\frac{\partial T'}{\partial y'_3} - x'_3\frac{\partial T'}{\partial y'_1}\,,\\ \frac{dx'_3}{dt} &= x'_2\frac{\partial T'}{\partial y'_1} - x'_1\frac{\partial T'}{\partial y'_2}\,;\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy'_1}{dt} &= x'_3\frac{\partial T'}{\partial x'_2} - x'_2\frac{\partial T'}{\partial x'_3} + y'_3\frac{\partial T'}{\partial y'_2} - y'_2\frac{\partial T'}{\partial y'_3}\,,\\ \frac{dy'_2}{dt} &= x'_1\frac{\partial T'}{\partial x'_3} - x'_3\frac{\partial T'}{\partial x'_1} + y'_1\frac{\partial T'}{\partial y'_3} - y'_3\frac{\partial T'}{\partial y'_1}\,,\\ \frac{dy'_3}{dt} &= x'_2\frac{\partial T'}{\partial x'_1} - x'_1\frac{\partial T'}{\partial x'_2} + y'_2\frac{\partial T'}{\partial y'_1} - y'_3\frac{\partial T'}{\partial y'_2}\,,\end{aligned}\right\}\quad(23_1)$$

$$\left.\begin{aligned}2T' &= l\,,\\ x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 &= m'\,,\\ x'_1y'_1 + x'_2y'_2 + x'_3y'_3 &= n'\,.\end{aligned}\right\}\quad(23_2)$$

Med tillhjälp af likheten $v = \dfrac{\partial T}{\partial x_2}$ i förening med (12_1) kan man nu äfven med lätthet bestämma konstanterna a_{rs} i ekvation (13). Man finner vid jemförelse med (11) att

$$a_{\varrho\sigma} = \alpha_{\varrho\sigma}\,.$$

Det gäller nu att på ett för integrationens förenklande lämpligt sätt bestämma de ingående konstanterna x_0, y_0, z_0 och α'_1, α'_2, α'_3, β'_1, ..., af hvilka senare endast tre äro af hvarandra oberoende. Detta sker derigenom, att man medels de sex ekvationerna (19)—(20_2) bestämmer a'_{33}, a'_{44}, a'_{55}, α'_1, α'_2, α'_3, ... på sådant sätt att

$$a'_{34} = a'_{35} = a'_{45} = 0\,. \qquad (24)$$

Emellertid skola vi, i och för bestämningens underlättande, i någon mån transformera ekvationeona (19)—20_2).

Genom att förlänga (19), (20) och (20_1) med 1:o) α'_1, α'_2, α'_3, 2:o) β'_1, β'_2, β'_3, 3:o) γ'_1, γ'_2, γ'_3 resp. och sedan addera

dem, erhålles, med användning af de mellan vinkelkoefficienterna bekanta relationerna, följande likheter:

$$\left.\begin{aligned} a'_{33}\alpha'_1 + a'_{34}\alpha'_2 + a'_{35}\alpha'_3 &= a_{33}\alpha'_1 + a_{34}\beta'_1 + a_{35}\gamma'_1 \,, \\ a'_{33}\beta'_1 + a'_{34}\beta'_2 + a'_{35}\beta'_3 &= a_{34}\alpha'_1 + a_{44}\beta'_1 + a_{45}\gamma'_1 \,, \\ a'_{33}\gamma'_1 + a'_{34}\gamma'_2 + a'_{35}\gamma'_3 &= a_{35}\alpha'_1 + a_{45}\beta'_1 + a_{55}\gamma'_1 \,. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

På samma sätt finner man, om man multiplicerar ekvationerna (20), (19_1), (20_2) med 1:o) α'_1, α'_2, α'_3, 2:o) β'_1, β'_2, β'_3, 3:o) γ'_1, γ'_2, γ'_3 resp.:

$$\left.\begin{aligned} a'_{34}\alpha'_1 + a'_{44}\alpha'_2 + a'_{45}\alpha'_3 &= a_{33}\alpha'_2 + a_{34}\beta'_2 + a_{35}\gamma'_2 \,, \\ a'_{34}\beta'_1 + a'_{44}\beta'_2 + a'_{45}\beta'_3 &= a_{34}\alpha'_2 + a_{44}\beta'_2 + a_{45}\gamma'_2 \,, \\ a'_{34}\gamma'_1 + a'_{44}\gamma'_2 + a'_{45}\gamma'_3 &= a_{35}\alpha'_2 + a_{45}\beta'_2 + a_{55}\gamma'_2 \,; \end{aligned}\right\} \quad (25_1)$$

samt slutligen genom att multiplicera (20_1), (20_2) och (19_2) på enahanda sätt:

$$\left.\begin{aligned} a'_{35}\alpha'_1 + a'_{45}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3 &= a_{33}\alpha'_3 + a_{34}\beta'_3 + a_{35}\gamma'_3 \,, \\ a'_{35}\beta'_1 + a'_{45}\beta'_2 + a'_{55}\beta'_3 &= a_{34}\alpha'_3 + a_{44}\beta'_3 + a_{45}\gamma'_3 \,, \\ a'_{35}\gamma'_1 + a'_{45}\gamma'_2 + a'_{55}\gamma'_3 &= a_{35}\alpha'_3 + a_{45}\beta'_3 + a_{55}\gamma'_3 \,. \end{aligned}\right\} \quad (25_2)$$

Dessa tre ekvationssystem äro ekvivalenta med ekvationerna (19)—(20_2).

Sätter man nu, i öfverensstämmelse med (24), $a'_{34} = a'_{35} = a'_{45} = 0$, kunna systemen sammanfattas under formen

$$\left.\begin{aligned} (a_{33} - a'_{ss})\alpha'_\sigma + a_{34}\beta'_\sigma + a_{35}\gamma'_\sigma &= 0 \,, \\ a_{34}\alpha'_\sigma + (a_{44} - a'_{ss})\beta'_\sigma + a_{45}\gamma'_\sigma &= 0 \,, \\ a_{35}\alpha'_\sigma + a_{45}\beta'_\sigma + (a_{55} - a'_{ss})\gamma'_\sigma &= 0 \,. \quad \left(\begin{smallmatrix} s = 3,4,5 \\ \sigma = 1,2,3 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Häraf framgår, att kvantiteterna a'_{33}, a'_{44}, a'_{55} äro rötter till tredje grads ekvationen

$$\begin{vmatrix} a_{33} - a'_{ss}, & a_{34}, & a_{35} \\ a_{34}, & a_{44} - a'_{ss}, & a_{45} \\ a_{35}, & a_{45}, & a_{55} - a'_{ss} \end{vmatrix} = 0 \,. \quad (27)$$

Ekvationerna (19), (19_1), (19_2) gifva, om de utan vidare adderas, likheten

$$a'_{33} + a'_{44} + a'_{55} = a_{33} + a_{44} + a_{55} \,,$$

ett resultat som äfven omedelbart visar sig af ekvationen (27), om den skrifves under formen

$$a'^3_{ss} - (a_{33} + a_{44} + a_{55})a'^2_{ss} +$$
$$+ (a_{33}a_{44} + a_{33}a_{55} + a_{44}a_{55} - a^2_{34} - a^2_{35} - a^2_{45})a'_{ss} +$$
$$+ a_{33}a^2_{45} + a_{44}a^2_{35} + a_{55}a^2_{34} - a_{33}a_{44}a_{55} - 2a_{34}a_{35}a_{45} = 0\,.$$

Man erhåller under alla förhållanden reela värden på a'_{33}, a'_{44}, a'_{55} ur denna ekvation, så att man icke behöfver pålägga konstanterna a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{34}, a_{35}, a_{45} något inskränkande vilkor. Ekvationens alla rötter äro nemligen reela, för hvilka reela värden som helst på dessa konstanter. Detta inses på följande sätt.

Skrifves ekvationen under formen

$$a'^3_{ss} + p_1 a'^2_{ss} + p_2 a'_{ss} + p_3 = 0\,,$$

samt sedan multipliceras med polynomet

$$a'^3_{ss} - p_1 a'^2_{ss} + p_2 a'_{ss} - p_3$$

antager den utseendet

$$a'^6_{ss} - P_1 a'^4_{ss} + P_2 a'^2_{ss} - P^2_3 = 0\,,$$

der

$$P_1 = a^2_{33} + a^2_{44} + a^2_{55} + 2(a^2_{34} + a^2_{35} + a^2_{45})\,,$$
$$P_2 = (a_{33}a_{44} - a^2_{34})^2 + (a_{33}a_{55} - a^2_{35})^2 + (a_{44}a_{55} - a^2_{45})^2 +$$
$$+ 2(a_{33}a_{45} - a_{34}a_{35})^2 + 2(a_{34}a_{55} - a_{35}a_{45})^2 + 2(a_{35}a_{44} - a_{34}a_{45})^2\,,$$

$$P_3 = p_3 = - \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Emedan koefficienterna P_1, P_2, P^2_3 således äro positiva, reela kvantiteter, följer enligt DESCARTES' regel för tecknen att denna ekvations alla rötter äro reela; följaktligen måste den ursprungliga ekvationens rötter, hvilka ingå i denna senare, äfvenledes vara reela.

Sedan man nu på grund af ekvationen (27) bestämt värdena på a'_{33}, a'_{44}, a'_{55}, erhåller man medels (25), (25$_1$), (25$_2$) relationerna

$$\alpha'_\sigma : \beta'_\sigma : \gamma'_\sigma = \begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} - a'_{ss} & a_{45} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{34} & a_{45} \\ a_{33} - a'_{ss} & a_{35} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{33} - a'_{ss} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} - a'_{ss} \end{vmatrix} \quad (28),$$

hvilka relationer, sammanstälda med dem mellan vinkelkoefficienterna förefintliga sambanden, gifva rigtningskosinerna α'_σ, β'_σ, γ'_σ fullt bestämda.

5. Sedan vi på detta sätt funnit kvantiteterna a'_{ss}, α'_σ, β'_σ, γ'_σ, öfvergå vi till härledandet af rörelsens tidsintegral.

Emedan nu

$$x'_1 = a'_{34} = a'_{35} = a'_{45} = 0\,,$$

öfvergår första ekvationen i (23) till

$$(a'_{14} - a'_{25})x'_2x'_3 - a'_{15}x'^2_2 + a'_{24}x'^2_3 + a'_{44}x'_3y'_2 - a'_{55}x'_2y'_3 = 0. \quad (29)$$

Sammanställer man härmed, att man till problemet har integralen

$$x'_2y'_2 + x'_3y'_3 = n'\,, \quad (30)$$

får man

$$y'_2 = \frac{f_2}{f_1}\,, \quad y'_3 = \frac{f_3}{f_1}\,, \quad (31)$$

der

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a'_{55}x'^2_2 + a'_{44}x'^2_3\,, \\ f_2 &= n'a'_{55}x'^3_2 - (a'_{14} - a'_{25})x'_2x'^2_3 + a'_{15}x'^2_2x'_3 - a'_{24}x'^3_3\,, \\ f_3 &= n'a'_{44}x'^3_3 + (a'_{14} - a'_{25})x'^2_2x'_3 + a'_{24}x'_2x'^2_3 - a'_{15}x'^3_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (31_1)$$

Men vidare har man enligt sista ekvationen i (23):

$$a'_{33}x'_2y'_1 = \frac{dx'_3}{dt} - x'_2(a'_{13}x'_2 + a'_{23}x'_3)\,. \quad (32)$$

Insätter man värdena på y'_1, y'_2, y'_3, tagna ur (31) och (32), uti den första integralen i (23$_2$) och observerar, att koefficienten för

$\frac{dx'_3}{dt}$ blir identiskt noll, erhåller man slutligen differentialekvationen

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{a'_{33}}\frac{f_1^2}{x_2^2}\left(\frac{dx'_3}{dt}\right)^2 = \\ &=\left\{\left(a'_{11}-\frac{a'^2_{13}}{a'_{33}}\right)x'^2_2 + 2\left(a'_{12}-\frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}\right)x'_2x'_3+\left(a''_{22}-\frac{a'^2_{23}}{a'_{33}}\right)x'^2_3 - l\right\}f_1^2 + \\ &2a'_{24}x'_3f_1f_2+2a'_{14}x'_2f_1f_2+2a'_{15}x'_2f_1f_3+2a'_{25}x'_3f_1f_3+a'_{44}f_2^2+a'_{55}f_3^2 . \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Ur denna ekvation har man nu att uttrycka x'_3 i funktion af tiden. Men för att möjliggöra detta, införa vi en ny variabel z genom substitutionerna

$$x'_2 = \sqrt{m'}\frac{\lambda}{\sqrt{z^2+\lambda^2}}, \quad x'_3 = \sqrt{m'}\frac{z}{\sqrt{z^2+\lambda^2}}, \quad (34)$$

hvilka substitutioner äro giltiga, eftersom x'_2, x'_3 uppfylla vilkoret

$$x'^2_2 + x'^2_3 = m' .$$

Med λ beteckna vi en tills vidare obestämd konstant.

Emedan

$$\frac{dx'_3}{dt} = \sqrt{m'}\frac{\lambda^2}{(z^2+\lambda^2)^{3/2}}\frac{dz}{dt},$$

öfvergår ekvationen (33) till följande:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{m'\lambda^2}{a'_{33}}\frac{(a'_{44}z^2+a'_{55}\lambda^2)^2}{z^2+\lambda^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \\ &=m'^2\left\{\left(a'_{22}-\frac{a'_{23}}{a'_{33}}-\frac{l}{m'}\right)z^2+2\lambda\left(a'_{12}-\frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}\right)z+ \right.\\ &\left.+\lambda^2\left(a'_{11}-\frac{a'^2_{13}}{a'_{33}}-\frac{l}{m'}\right)\right\}(a_{44}z^2+a'_{55}\lambda^2)^2+2m'(a'_{44}z^2+a'_{55}\lambda^2)\times \\ &\times(a'_{24}z+\lambda a'_{14})[-a'_{24}m'z^3+\lambda(n'a'_{55}-m'a'_{14}+m'a'_{25})z^2+ \\ &+a'_{15}m'\lambda^2z+n'a'_{55}\lambda^3]+2m'(a'_{44}z^2+a'_{55}\lambda^2)(a'_{25}z+\lambda a'_{15})\times \\ &\times[n'a'_{44}z^3+m'\lambda a'_{24}z^2+\lambda^2(n'a'_{44}+m'a'_{14}-m'a'_{25})z-m'\lambda^3a'_{15}]+ \\ &+a'_{44}[-m'a'_{24}z^3+\lambda(n'a'_{55}-m'a'_{14}+m'a'_{25})z^2+m'a'_{15}\lambda^2z+ \\ &\qquad +n'a'_{55}\lambda^3]^2+a'_{55}[n'a'_{44}z^3+m'a'_{24}\lambda z^2+ \\ &\qquad +\lambda^2(n'a'_{44}+m'a'_{14}-m'a'_{25})z-m'\lambda^3a'_{15}]^2= \\ &=\gamma_0z^6+\gamma_1\lambda z^5+\gamma_2\lambda^2z^4+\gamma_3\lambda^3z^3+\gamma_4\lambda^4z^2+\gamma_5\lambda^5z+\lambda^6\gamma_6 , \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

hvarest

$$\left.\begin{aligned}
g_0 &= n'a'^2_{44}(2m'a_{25} + n'a'_{55}) - m'^2a'^2_{24}a'_{44} + \\
&\quad + m'^2a'_{44}\left(a'_{22} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{33}} - \frac{l}{m'}\right); \\
g_1 &= 2m'^2a'_{24}a'_{44}(a'_{14} + a'_{24}) + 2m'n'a'^2_{44}(a'_{14} + a'_{15}) + \\
&\quad + 2m'^2a'^2_{44}\left(a'_{12} - \frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}\right); \\
g_2 &= 2m'^2a'_{15}a'_{24}a'_{44} - m'^2a'^2_{24}a'_{55} - m'^2a'_{44}(a'_{14} - a'_{25})^2 + \\
&\quad + 2m'n'a'_{44}(a'_{25}a'_{44} + a'_{25}a'_{55} + a'_{14}a'_{55}) + \\
&\quad + n'^2a'_{44}a'_{55}(2a'_{44} + a'_{55}) + m'^2a'_{44}\left[a'_{44}\left(a'_{11} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{33}} - \frac{l}{m'}\right) + \right. \\
&\quad \left. + 2a'_{55}\left(a'_{22} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{33}} - \frac{l}{m'}\right)\right]; \\
g_3 &= 2m'^2[a'_{24}a'_{55}(a'_{14} + a'_{24}) + a'_{14}a'_{44}(a'_{14} - a'_{25}) - \\
&\quad - a'_{15}a'_{44}(a'_{24} + a'_{25})] + 2m'n'a'_{44}(a'_{14} + a'_{15})(a'_{44} + a'_{55}) + \\
&\quad + 4m'^2a'_{44}a'_{55}\left(a'_{12} - \frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}\right); \\
g_4 &= 2m'^2a'_{15}a'_{24}a'_{55} - m'^2a'^2_{15}a'_{44} - m'^2a'_{55}(a'_{14} - a'_{25})^2 + \\
&\quad + 2m'n'a'_{55}(a'_{14}a'_{44} + a'_{14}a'_{55} + a'_{25}a'_{44}) + \\
&\quad + m'^2a'_{55}\left[a'_{55}\left(a'_{22} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{33}} - \frac{l}{m'}\right) + 2ma'_{44}\left(a'_{11} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{33}} \frac{l}{m'}\right)\right]; \\
g_5 &= 2m'^2a'_{55}[a'_{14}(a'_{14} - a'_{25}) - a'_{15}(a'_{24} + a'_{25})] + \\
&\quad + 2m'^2a'^2_{55}\left(a'_{12} - \frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}\right) + 2m'n'a'_{44}a'_{55}(a'_{14} + a'_{15}), \\
g_6 &= 2m'n'a'^2_{55}a'_{14} - m'^2a'_{55}a'^2_{15} + n'^2a'_{44}a'^2_{55} + \\
&\quad + m'^2a'^2_{55}\left(a'_{11} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{33}} - \frac{l}{m'}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Högra ledet af ekvation (35) kan emellertid skrifvas under formen

$$(z^2 + \lambda^2)(h_0z^4 + h_1\lambda z^3 + h_2\lambda^2z^2 + h_3\lambda^3z + h_4\lambda^4),$$

der

$$h_0 = \gamma_0, \quad h_1 = \gamma_1, \quad h_2 = \gamma_2 - \gamma_0, \quad h_3 = \gamma_5, \quad h_4 = \gamma_6,$$

blott man mellan koefficienterna γ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots 6)$ fastställer relationerna

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 + \gamma_5 &= \gamma_3 ,\\ \gamma_0 + \gamma_4 &= \gamma_2 + \gamma_6 .\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Bestämmer man alltså två af de i koefficienterna γ_ν ingående arbiträra konstanterna x_0, y_0, z_0 på sådant sätt, att systemet (37) blir satisfieradt, antager differentialekvationen (35) slutligen utseendet

$$\int_{z_0}^{z} \frac{(z^2 + \mu^2)dz}{(z^2 + \lambda^2)\sqrt{h_0 z^4 + h_1\lambda z^3 + h_2\lambda^2 z^2 + h_3\lambda^3 z + h_4\lambda^4}} = \nu(t - t_0), \quad (38)$$

hvarest

$$\mu^2 = \lambda^2 \frac{a'_{55}}{a'_{44}}, \quad \nu^2 = -\frac{1}{\lambda^2 a'^2_{44}} \cdot \frac{a'_{33}}{m'} .$$

Införas i ekvationerna (37) uttrycken på γ_ν, tagna ur (36), erhåller man, sedan man bortdividerat faktorn $m'^2(a'_{44} - a'_{55})$, i och för bestämmande af tvenne af koordinaterna x_0, y_0, z_0, låt vara x_0, y_0, ekvationerna

$$\left.\begin{aligned}&\left(a'_{12} - \frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}}\right)(a'_{44} - a'_{55}) + (a'_{14} + a'_{15})(a'_{24} + a'_{25}) + \\ &\qquad + a'^2_{24} - a'^2_{14} = 0 ,\\ &\left(a'_{22} - a'_{11} - \frac{a'^2_{23} - a'^2_{13}}{a'_{33}}\right)(a'_{44} - a'_{55}) + (a'_{14} - a'_{15})^2 - \\ &\qquad - (a'_{15} + a'_{24})^2 = 0 .\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Den förra af dessa ekvationer kan på grund af (18_1), (18_2), och (21) skrifvas under formen

$$\begin{aligned}&(a'_{44} - a'_{55})[a_{12} - a_{13}y_0 + (a_{14} - a_{25})x_0 + a_{23}z_0 - a_{33}y_0z_0 + a_{34}z_0x_0 + \\ &+ a_{35}x_0y_0 - a_{45}x_0^2] - \frac{a'_{44} - a'_{55}}{a'_{33}}[\alpha'_1(a_{13} - a_{35}x_0 + a_{33}z_0) + \\ &+ \beta'_1(a_{14} - a_{45}x_0 + a_{34}z_0) + \gamma'_1(a_{15} - a_{55}x_0 + a_{35}z_0)] \\ &[\alpha'_1(a_{23} + a_{34}x_0 - a_{33}y_0) + \beta'_1(a_{24} + a_{44}x_0 - a_{34}y_0) + \\ &+ \gamma'_1(a_{25} + a_{45}x_0 - a_{35}y_0)] + [(\alpha'_2 + \alpha'_3)(a_{13} - a_{35}x_0 + a_{33}z_0) +\end{aligned}$$

$$+ (\beta'_2 + \beta'_3)(a_{14} - a_{45}x_0 + a_{34}z_0) + (\gamma'_2 + \gamma'_3)(a_{15} - a_{55}x_0 + a_{35}z_0)]$$
$$[(\alpha'_2 + \alpha'_3)(a_{23} + a_{34}x_0 - a_{33}y_0) + (\beta'_2 + \beta'_3)(a_{24} + a_{44}x_0 - a_{34}y_0) +$$
$$+ (\gamma'_2 + \gamma'_3)(a_{25} + a_{45}x_0 - a_{35}y_0)] + [\alpha'_2(a_{23} + a_{34}x_0 - a_{33}y_0) +$$
$$+ \beta'_2(a_{24} + a_{44}x_0 - a_{34}y_0) + \gamma'_2(a_{25} + a_{45}x_0 - a_{35}y_0)]^2 -$$
$$- [\alpha'_2(a_{13} - a_{35}x_0 + a_{33}z_0) + \beta'_2(a_{14} - a_{45}x_0 + a_{34}z_0) +$$
$$+ \gamma'_2(a_{15} - a_{55}x_0 + a_{35}z_0)]^2 = 0,$$

eller med stöd af (25), (25_1), (25_2):

$$(a'_{44} - a'_{55})[a_{12} - a_{13}y_0 + (a_{14} - a_{25})x_0 + a_{23}z_0 - a_{33}z_0y_0 + a_{34}z_0x_0 +$$
$$+ a_{35}x_0y_0 - a_{45}x_0^2] - \frac{a'_{44} - a'_{55}}{a'_{33}}[- a'_{33}\gamma'_1x_0 + a'_{33}\alpha'_1z_0 + r_1]$$
$$[a'_{33}\beta'_1x_0 - a'_{33}\alpha'_1y_0 + s'_1] + [-(a'_{55}\gamma'_3 + a'_{44}\gamma'_2)x_0 +$$
$$+ (a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3)z_0 + (r'_2 + r'_3)][(a'_{44}\beta'_2 + a'_{55}\beta'_3)x_0 -$$
$$-(a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3)y_0 + (s'_2 + s'_3)] + [a'_{44}\beta'_2x'_0 - a'_{44}\alpha'_2y_0 + s'_2]^2 -$$
$$- [- a'_{44}\gamma'_2x_0 + a'_{44}\alpha'_2z_0 + r'_2]^2 = 0,$$

der

$$a_{13}\alpha'_\sigma + a_{14}\beta'_\sigma + a_{15}\gamma'_\sigma = r'_\sigma, \quad a_{23}\alpha'_\sigma + a_{24}\beta'_\sigma + a_{25}\gamma'_\sigma = s'_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, 3).$$

eller slutligen:

$$Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0, \tag{40}$$

hvarest

$$A = (a'_{44} - a'_{55})(a'_{33}\beta'_1\gamma'_1 - a_{45}) - (a'_{44}\beta'_2 + a'_{55}\beta'_3)(a'_{44}\gamma'_2 + a'_{55}\gamma'_3) +$$
$$+ a'^2_{44}\beta'^2_2 - a'^2_{44}\gamma'^2_2,$$
$$B = (a'_{44} - a'_{55})(a_{35} - a'_{33}\alpha'_1\gamma'_2) + (a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3)(a'_{44}\gamma'_2 + a'_{55}\gamma'_3) -$$
$$- 2a'^2_{44}\alpha'_2\beta'_2,$$
$$C = a'^2_{44}\alpha'^2_2,$$
$$D = (a'_{44} - a'_{55})(a_{14} - a_{25} + \gamma'_1s'_1 - \beta'_1r'_1) - (s'_2 + s'_3)(a'_{44}\gamma'_2 + a'_{55}\gamma'_3) +$$
$$+ (r'_2 + r'_3)(a'_{44}\beta'_2 + a'_{55}\beta'_3) + 2a'_{44}(\beta'_2s'_2 + \gamma'_2r'_2) +$$
$$+ z_0\{(a'_{44} - a'_{55})(a_{34} - a'_{33}\alpha'_1\beta'_1) + (a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3)$$
$$(a'_{44}\beta'_2 + a'_{55}\beta'_3) + 2a'^2_{44}\alpha'_2\gamma'_2\},$$
$$E = (a'_{44} - a'_{55})(\alpha'_1r'_1 - a_{13}) - (r'_2 + r'_3)(a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3) -$$
$$- 2a'_{44}\alpha'_2s'_2 + z_0\{(a'_{44} - a'_{55})(a'_{33}\alpha'^2_1 - a_{33}) - (a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'^2_3)\}.$$

$$F = -a'_{44}\alpha'^2_2 z_0^2 + z_0\{(a'_{44} - a'_{55})(a_{23} - \alpha'_1 s'_1) + (s'_2 + s'_3)$$
$$(a'_{44}\alpha'_2 + a'_{55}\alpha'_3) - 2a'_{44}\alpha'_2 r'_2\} + (a'_{44} - a'_{55})\left(a_{12} - \frac{r'_1 s'_1}{a'_{33}}\right) +$$
$$+ (r'_2 + r'_3)(s'_2 + s'_3) + s'^2_2 - r'^2_2 .$$

Pa samma sätt antager den senare af ekvationerna (39) utseendet

$$(a'_{44} - a'_{55})[a_{22} - a_{11} + 2(a_{24} + a_{15})x_0 - 2a_{23}y_0 -$$
$$- 2a_{13}z_0 + a_{33}y_0^2 - a_{33}z_0^2 - 2a_{34}x_0y_0 + 2a_{35}x_0z_0 + (a_{44} - a_{55})x_0^2] -$$
$$- \frac{a'_{44} - a'_{55}}{a'_{33}}[a'_{33}\beta'_1 x_0 - (a_{33} + a_{34} + a_{35})y_0 + s'_1]^2 +$$
$$+ \frac{a'_{44} - a'_{55}}{a'_{33}}[- a'_{33}\gamma'_1 x_0 + (a_{33} + a_{34} + a_{35})z_0 - r'_1]^2 +$$
$$+ [(a'_{55}\gamma'_3 - a'_{44}\gamma'_2)x_0 + (a'_{44}\alpha'_2 - a'_{55}\alpha'_3)z_0 + (r'_2 - r'_3)]^2 -$$
$$- [(a'_{44}\beta'_2 - a'_{55}\gamma'_3(x_0 + (a'_{55}\alpha'_3 - a'_{44}\alpha'_2)z_0 + (s'_2 + r'_3)]^2 = 0 ,$$

eller

$$A'x_0^2 + B'x_0y_0 + C'y_0^2 + D'x_0 + E'y_0 + F' = 0 , \qquad (40_1)$$

der

$$A' = (a'_{44} - a'_{55})^2 + a'_{33}\gamma'^2_1(a'_{44} - a'_{55}) + (a'_{55}\gamma'_3 - a'_{44}\gamma'_2)^2 -$$
$$- (a'_{55}\gamma'_3 - a'_{44}\beta'_2)^2 ,$$
$$B' = 2(a'_{44} - a'_{55})[\beta'_1(a_{33} + a_{34} + a_{35}) - a_{34}] ,$$
$$C' = \frac{a'_{44} - a'_{55}}{a'_{33}}[a_{33}a'_{33} - (a_{33} + a_{34} + a_{35})^2] ,$$
$$D' = (a'_{44} - a'_{55})[2(a_{15} + a_{24}) - (a'_{33}\beta'^2_1 + 2\beta'_1 s'_1 + 2\gamma'_1 r'_1)] +$$
$$+ 2z_0[a_{35}(a'_{44} - a'_{55}) + (a'_{55}\gamma'_3 - a'_{44}\gamma'_2)(a'_{44}\alpha'_2 - a'_{55}\alpha'_3) -$$
$$- \gamma'_1(a'_{44} - a'_{55})(a_{33} + a_{34} + a_{35}) -$$
$$- (a'_{55}\gamma'_3 - a'_{44}\beta'_2)(a'_{44}\alpha'_2 - a'_{55}\alpha'_3)] ,$$
$$E' = 2(a'_{44} - a'_{55})\left[\frac{s'_1}{a'_{33}}(a_{33} + a_{34} + a_{35}) - a_{23}\right] ,$$
$$F' = \frac{a'_{44} - a'_{55}}{a'_{33}}[(a_{33} + a_{34} + a_{35})^2 - a_{33}a'_{33}]z_0^2 +$$
$$+ 2\Big[(r'_2 - r'_3)(a'_{44}\alpha'_2 - a'_{55}\alpha'_3) + (s_2 + r'_3)(a'_{44}\alpha'_2 - a'_{55}\alpha'_3) +$$

$$+ \frac{r'_1}{a'_{33}}(a'_{44} - a'_{55})(a_{33} + a_{34} + a_{35}) - a_{13}(a'_{44} - a'_{55})\Big]z_0 +$$
$$+ (a'_{44} - a'_{55})(a_{22} - a_{11}) + (r'_2 - r'_3)^2 - (s'_2 + r'_3)^2 .$$

Ur ekvationerna (40), (40_1) har man nu att bestämma x_0, y_0. Koordinaten z_0, som ännu är arbiträr, afpassas, så vidt möjligt, på sådant sätt, att man på x_0, y_0 erhåller ett reelt värdepar.

Sedan får man genom inversion af integralen i (38) z uttryckt i funktion af tiden t, och derefter, på grund af (34), (32), (31), x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3 och sedan, med stöd af (17), (16), (11), (28), (5), (3) v, n, p, q, r, α, β, γ, ξ, η, ζ framställda i funktioner af samma kvantitet.

Inversionen af integralen i (38) låter utan svårighet verkställa sig, exempelvis enligt en af WEIERSTRASS framställd metod i hans uppsats: »Über eine gattung reell periodischer Functionen», Monatsb. der Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1866.

Rörelsens beskaffenhet är beroende på beskaffenheten hos rötterna till ekvationen

$$h_0 z^4 + h_1 \lambda z^3 + h_2 \lambda^2 z^2 + h_3 \lambda^3 z + h_4 \lambda^4 = 0$$

samt på rörelsens begynnelsetillstånd. Äro tvenne af denna ekvationsrötter eller ock alla fyra reela, så blir rörelsen periodisk, om rörelsens begynnelsetillstånd är sådant, att integralens i (38) nedre gräns ligger mellan rotpunkterna till ekvationens numeriskt största eller minsta reela rot; och då kan z framställas såsom en för alla värden på tiden konvergerande trigonometrisk serie. I annat fall blir rörelsen icke periodisk.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 352.)

Bergen. *Museum.*
SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 2: P. 5—8. 1897. 8:o.

Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. 1896. 4:o.

— *K. Botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. N:o 8. 1897. 8:o.

— *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1897: H. 1. 8:o.

— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 49 (1897): H. 1—2. 8:o.

— *Physikalische Gesellschaft.*
Fortschritte der Physik. Jahrg. 47 (1891): Abth. 1—3. 8:o.
Verhandlungen. Jahrg. 16 (1897): N:o 8. 8:o.

— *K. Preussische geologische Landesanstalt.*
Abhandlungen. N. F. H. 21—23. 1896—97. 8:o.

— *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Bericht über die Thätigkeit. Jahr 1896. 8:o.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung. 1893: H. 3. 4:o.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam i. J. 1894: H. 2. 4:o.
Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen i. J. 1894. 4:o.

— *Physikalisch-technische Reichsanstalt.*
Die Thätigkeit. Jahr 1896/97. 8:o.

— *K. Sternwarte.*
Beobachtungs-Ergebnisse. H. 7. 1897. 4:o.

Bern. *Naturforschende Gesellschaft.*
Mittheilungen. Jahr 1895—96. 8:o.

Besançon. *Observatoire astronomique, chronométrique et météorologique.*
Bulletin chronométrique. 8. 1896. 4:o.
Bulletin météorologique. 10 (1894)—11 (1895). 4:o.

Bonn. *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande.*
Verhandlungen. Jahrg. 53 (1896): H. 2. 8:o.

— *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Sitzungsberichte. 1896: H. 2. 8:o.

Bordeaux. *Observatoire.*
Annales. T. 6. 1896. 4:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 32 (1897): N:o 10—15. 8:o.

Bremen. *Meteorologisches Observatorium.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahrg. 7 (1896). 4:o.

Breslau. *Verein für schlesische Insectenkunde.*
Fest-Schrift zur Feier des 50-jährigen Bestehens des Vereins. 1897. 8:o.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Bulletin. (3) T. 33 (1897): N:o 5—6; 34 (1897): 7. 8:o.

— *Société Belge de microscopie.*

Bulletin. Année 23 (1896/97): N:o 7—10. 8:o.

Budapest. *Musée National Hongrois.*

Természetrajzi füzetek. Vol. 20 (1897): P. 3. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad cientifica Argentina.*

Anales. T. 43 (1897): Entr. 5—6. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin botanique.*

WILDEMAN, É. DE, Prodrome de la Flore algologique des Indes Néerlandaises. Batavia 1897. 8:o.

Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*

Journal. Vol. 65 (1896): P. 1: N:o 3—4; P. 2: 3—4; P. 3: 1. 8:o.

Proceedings. 1896: N:o 6—10. 8:o.

— *Geological survey of India.*

Records. Vol. 30 (1897): P. 2. 8:o.

Cambridge. *Syndics of the university library.*

Annual report. Year 1896. 4:o.

CAYLEY, A., The collected mathematical papers. Vol. 12. 1897. 4:o.

— *Philosophical society.*

Proceedings. Vol. 9: P. 5 (1897). 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*

Memoirs. Vol. 19: N:o 2; 20—21 & Atlas. 1897. 4:o.

— *Astronomical observatory of Harvard college.*

Annals. Vol. 26: P. 2. 1897. 4:o.

Cape Town. *South African Museum.*

Report of the trustees. Year 1896. Fol.

— *Geological commission.*

Annual report. 1 (1896). 4:o.

Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*

Bullettino delle sedute. Fasc. 46—47. 1897. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. T. 5 (1897): N:o 6—9. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Abhandlungen. H. 2. 1897. 4:o.

Das Klima des Königreiches Sachsen. H. 4. 1897. 4:o.

Chicago. *Academy of sciences.*

Bulletin of the geological and natural history survey. N:o 1. 1896. 8:o.

Annual report. 39 (1896). 8:o.

Danzig. *Naturforschende Gesellschaft.*

Schriften. N. F. Bd 9: H. 2. 1897. 8:o.

Dresden. *K. Sächsisches statistisches Bureau.*

Zeitschrift. Jahrg. 43 (1897): H. 1—2. 4:o.

Kalender. Jahr 1898. 8:o.

Dublin. *R. Irish academy.*

Proceedings. (3) Vol. 4 (1897): H. 2—3. 8:o.

Edinburgh. *Royal Society.*
Transactions. Vol. 11: P. 2; 12: 1–2; 13: 1; 15: 4. 1831—44. 4:o.
Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 20: H. 1; 23: H. 3. 1897. 4:o.
Genève. *Société de physique et d'histoire naturelle.*
Mémoires. T. 32: P. 2. 1896—97. 4:o.
Genova. *Museo civico di storia naturale.*
Annali. (2) Vol. 17. 1896—97. 8:o.
— *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 8 (1897): N. 2. 8:o.
's-Gravenhage. *Nederlandsche vereeniging voor electrotechniek.*
1896/97: 3–4. 8:o.
Güstrow. *Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg.*
Archiv. Jahr 50 (1896): Abt. 1–2 & Register 31—50. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Mathem.-physikal. Kl. 1897: H. 1. 8:o.
» Geschäftliche Mittheilungen. 1897: H. 1. 8:o.
Habana. *R. Colegio de Belen de la Compania de Jesus.*
Observaciones magnéticas y meteorológicas. Año 1894—95. Fol.
Hamburg. *Sternwarte.*
Mittheilungen. N:o 3. 1897. 8:o.
Bericht. 1895—96. 8:o.
Beobachtungen von Cometen und kleinen Planeten 1894—96 von R. SCHORR. 4:o.
Resultate aus Beobachtungen von 55 Sternen im Parallel des Mondes von W. LUTHER. 1896. 4:o.
Harlem. *Musée Teyler.*
Archives. (2) Vol. 5: P. 3. 1897. 8:o.
— *Koloniaal Museum.*
Bulletin. 1897: Juni, Juli. 8:o.
— *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 1 (1897): Livr. 1. 8:o.
Helsingfors. *Universitets-Biblioteket.*
Akademiskt tryck 1896/97. 24 st. 8:o & 4:o.
Indianapolis. *Indiana academy of science.*
Proceedings. 1894—95. 8:o.
Ithaca. *Cornell university.*
Bulletin (Science). Vol. 3: N:o 1. 1897. 8:o.
Jena. *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Denkschriften. Bd 5: Lief. 4–5: Text & Atlas; 8: Lief. 3: Text & Atlas. 1896—97. 4:o.
Karlsruhe. *Technische Hochschule.*
Akademiskt tryck 1896/97. 3 st. 8:o.
Kazan. *Kejserl. universitetet.*
Učenija zapiski. G. 64 (1897): N:o 4–6. 8:o.
— *Société physico-mathématique.*
Bulletin. (2) T. 6 (1896): N:o 1–4; 7 (1897): 1. 8:o.

Kharkow. *Université impériale.*
Annales. G. 1897: Kn. 2—3. 8:o.
— *Société des naturalistes.*
Travaux. T. 30 (1896). 8:o.
Kiel. *Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.*
Schriften. Bd 11: H. 1. 1897. 8:o.
— *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd 2: H: 2. 1897. 4:o.
Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. (6) Naturv.-math. afd. T. 8: N:o 4. 1897. 4:o.
Oversigt over Forhandlinger. 1897: N:r 2—3. 8:o.
Klagenfurt. *Naturhistorisches Landes-Museum von Kärnten.*
Jahrbuch. H. 24. 1897. 8:o.
Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1896. Fol.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1897: N:o 4—6. 8:o.
Kristiania. *Videnskabs-Selskabet.*
Forhandlinger. Aar 1896. 8:o.
Skrifter. 1896: 1. 8:o.
— *Editorial Committee of the Norwegian North-Atlantic expedition.*
Den norske Nordhavs-Expedition 1876—78. 24. 1897. 4:o.
— *Den höiere Landbrugsskole i Aas.*
Beretning. Aar 1895/96. 8:o.
La Plata. *Museo.*
Revista. T. 7: P. 2. 1896. 8:o.
Anales. Paleontologia Argentina. 4. 1896. Fol.
» Seccion Antropologica. 1. 1896. Fol.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 33 (1897): N:o 124. 8:o.
Lawrence. *Kansas university.*
The Kansas university quarterly. Vol. 6 (1897): N:o 2: A—B. 8:o.
Leiden. *Nederlandsche botanische vereeniging.*
Nederlandsch kruidkundig archief. (3) D. 1: St. 2. 1897. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Kl. Bd 17: N:o 6. 1897. 8:o.
Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Cl. 1897: 1—3. 8:o.
Liège. *Société géologique.*
Annales. T. 24: Livr. 1. 1896—97. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1897): P. 3. 8:o.
— *British museum (natural history).*
Catalogue of the fossil Cephalopoda. P. 3. 1897. 8:o.
» » » Tertiary Mollusca. P. 1. 1897. 8:o.
» » » African plants collected by FR. WELWITSCH in 1853—61. Dicotyledons. P. 1. 1896. 8:o.
Guide to the fossil mammals and birds. 1896. 8:o.
» » » fossil reptiles and fishes. 1896. 8:o.

London. *R. astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 57 (1897): N:o 7–8. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 69—70 (1896): Suppl.; 71—72 (1897): 6–9. 8:o.
Proceedings. Session 1896/97: N:o 181–182. 8:o.
List 1897, May. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 53 (1897): P. 3. 8:o.
— *Linnean society.*
Transactions. (2) Botany. Vol. 5: P. 5. 1896. 4:o.
» » Zoology. Vol. 6: P. 6–8; 7: 1–3. 1896—97. 4:o.
Journal. Botany. Vol. 31: N:o 218–219; 32; 33: 228. 1896—97. 8:o.
» Zoology. Vol. 25: N:o 163–165; 26: 166–167. 1896—97. 8:o.
Proceedings. 1895/96. 8:o.
Catalogue of the library. New ed. 1896. 8:o.
List. 1896/97. 8:o.
— *R. microscopical society.*
Journal. 1897: P. 3–4. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 60: N:o 368; 61: 374–378. 1897. 8:o.
— *Zoological society.*
Proceedings. 1897: P. 1–2. 8:o.
List of the fellows. 1897, May. 8:o.
— *R. gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1896: N:o 120; 1897: 122–123. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian entomologist. Vol. 29 (1897): N:o 6–8. 8:o.

Manila. *Observatorio.*
Boletín mensual. 1896: 7–12. 4:o.

Melbourne. *Royal society of Victoria.*
Proceedings. N. S. Vol. 9. 1897. 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 10 (1896—97): N. 1–4. 8:o.
— *Instituto medico nacional.*
Anales. T. 3 (1897): N:o 2–3. 4:o.
— *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1897: N:o 3, 5. 4:o.
Boletín de agricultura, minera é industrias. Año. 6 (1896/97): N:o 5–6. 8:o.

Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Memorie. Cl. di lettere ... Vol. 20: Fasc. 4–5. 1896—97. 4:o.
» » » scienze mat. e nat. Vol. 18: Fasc. 2–3. 1896. 4:o.
Rendiconti. (2) Vol. 29 (1896). 8:o.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 14 (1895—96). 8:o.
— *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 37: Fasc. 1. 1897. 8:o.
Memorie. T. 6: Fasc. 1. 1897. 4:o.

Montevideo. *Museo nacional.*
Anales. 6. 1897. 8:o.
Montreal. *Natural history society.*
The Canadian record of science. Vol. 7: N. 4. 1897. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1897: H. 1. 8:o.
» Philos.-philol. u. hist. Cl. 1897: H. 1—2. 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 3 (1897): Fasc. 5—7. 8:o.
— *American museum of natural history.*
Annual report. Year 1896. 8:o.
— *Public library.*
Bulletin. Vol. 1 (1897): N:r 6—8. 8:o.
— *Microscopical society.*
Journal. Vol. 13 (1897): N:o 3. 8:o.
Odessa. *Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.*
Mémoires. T. 20: P. 2; 21: 1. 1896, 97. 8:o.
Ottawa. *Field-naturalists' club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 11 (1897): N:o 1, 4. 8:o.
Palermo. *R. Orto botanico.*
Bollettino. Anno 1: Fasc. 2. 1897. 8:o.
— *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 11 (1897): Fasc. 4—5. 8:o.
Paris. *Bureau des longitudes.*
Connaissance des temps pour l'an 1899. 8:o.
Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1898. 4:o.
Conférence internationale des étoiles fondamentales de 1896. Procès-verbaux. 4:o.
Rapport sur les observatoires astronomiques de province. Année 1895. 8:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux des séances de 1895. 8:o.
— *Observatoire de Paris.*
Annales. Observations 1888. 4:o.
— *Observatoire d'astronomie physique.*
Annales. T. 1. 1896. 4:o.
— *Académie des sciences.*
LAPLACE, Oeuvres complètes. T. 8—10. 1891—94. 4:o.
— *École des mines.*
Annales des mines. (9) T. 10 (1896): Livr. 9—12; 11 (1897): 1—3. 8:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1897: 6—8. 8:o.
— *Société des études scientifiques.*
La feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 27 (1897): N:o 321—322. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 18 (1897): Trim. 1. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1897: N:o 4—14. 8:o.

Paris. *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 24 (1896): N:o 10; 25 (1897): 3—4. 8:o.
Mémoires. Paléontologie. T. 7: Fasc. 1—3. 1897. 4:o.
Philadelphia. *Free museum of science and art. Dep. of archæology and palæontology.*
Bulletin. N:o 1. 1897. 8:o.
— *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1896: P. 1. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 36 (1897): N:o 154. 8:o.
Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*
Atti. Memorie. Vol. 15. 1897. 8:o.
» Processi verbali. Vol. 10 (1897): p. 201—242. 8:o.
Plymouth. *Marine biological association.*
Journal. N. S. Vol. 5: N:o 1. 1897. 8:o.
Portland. *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 2: P. 4. 1897. 8:o.
Potsdam. *Internationale Erdmessung.*
Comptes-rendus des séances de la commission permanente, 1896. 4:o.
Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1896: Cl. für Philosophie . . .; Math.-naturw. Cl.: 1—2. 8:o.
Jahresbericht für das Jahr 1896. 8:o.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 8.

Onsdagen den 13 Oktober.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens ledamöter Norske Jernbane-direktören CARL ABRAHAM PIHL och Professorn vid universitetet i Kristiania HJALMAR HEIBERG med döden afgått.

Med anledning af remiss från Kongl. Ecklesiastik-Departementet å en af härvarande Kongl. Belgiske Minister på hans regerings vägnar gjord framställning om upplysning rörande organisationen af de meteorologiska undersökningarne i Sverige hade föreståndaren för statens Meteorologiska Centralanstalt Professor R. RUBENSON afgifvit infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Från Letterstedtske stipendiaten Docenten S. MURBECK hade inkommit berättelse om den resa, som han för botaniskt ändamål utfört till Alger och Tunis.

Herr WITTROCK dels redogjorde för innehållet af ofvannämnda berättelse af Docenten MURBECK, och dels förevisade en del intressanta frukter af slägtena Ephedra, Opuntia, Vitis, Duchesnea och Phaseolus, som under förliden sommar kommit till mognad å fritt land i Akademiens botaniska trädgård å Bergielund.

Friherre NORDENSKIÖLD dels förelade Akademien ett af honom nyss från trycket utgifvet, omfattande kartverk med titel: »Periplus. Utkast till sjökortens och sjöböckernas äldsta historia», och dels meddelade en uppsats af Lektorn E. JÄDERIN med titel: »Nivåsextant, konstruerad för ANDRÉES polarexpedition».

Herr AURIVILLIUS redogjorde för en af honom i Stockholms skärgård upptäckt ny parasitstekel, som lefver i äggen af Semblis lutoria samt har två slags honor, en vingad och en ovingad.

Herr HASSELBERG aflemnade för införande i Akademiens skrifter en af honom författad afhandling med titel: »Untersuchungen über die Spectra der Metalle im electrischen Flammenbogen. IV. Spectrum des Mangans», samt lemnade en redogörelse för de undersökningar som legat till grund för denna afhandling.

Herr RETZIUS öfverlemnade å författarnes vägnar följande från trycket utkomna arbeten: 1:o) »Allmän helsovårdslära med särskildt afseende på svenska förhållanden», af Professor E. ALMQVIST; 2:o) »Klinische und anatomische Beiträge zur Patologie des Gehirns», af Professor S. E. HENSCHEN; 3:o) »Behandlung der Erkrankungen des Gehirns und seiner Häute», af densamme.

Herr PETTERSSON öfverlemnade för offentliggörande följande vid Stockholms Högskolas laboratorium utarbetade afhandlingar: 1:o) »Ueber Bisnitrosylbenzyle» af C. KJELLIN och K. G. KUYLENSTJERNA; 2:o) »Ueber einige aliphatische Abkömlinge des Oxythioharnstoffs», af desamme; 3:o) »Zur Kenntniss der β-substituirten Hydroxylamine», af C. KJELLIN.

Till ledamot af Kongl. Direktionen öfver Stockholms stads undervisningsverk efter Justitierådet HAMMARSKJÖLD, som af Akademien haft detta uppdrag sedan år 1891, men som på grund af helsoskäl nu afsagt sig detsamma, utsåg Akademien Professor WITTROCK.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Marina Chlorophyceer från Japan», af Professor F. R. KJELLMAN; 2:o) »Muciporus und die Familie der Tulasnellaceen», af Docent H. O. JUEL; och

i Öfversigten: 1:o) »Nachträgliche Bemerkungen über die mesozoische Flora Spitzbergens», af Professor A. G. NATHORST; 2:o) »Relationer mellan distanserna inom Saturnus-systemet», af Professor K. BOHLIN; 3:o) »Om lösningen af Maxwells eqvationer för det elektromagnetiska fältet», af Lektor C. A. MEBIUS; 4:o) »Zu dem Probleme der Zurückführung Abelscher Integrale in elliptische», af Doktor F. DE BRUN; och 5:o) »Ueber den elektrischen Kohlen-Lichtbogen», af Docenten G. GRANQVIST.

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Göteborg. *Högskola.*
Årsskrift. Bd 3. 1897. 8:o.

Lund. *Universitetet.*
TEGNÉR, E., Lunds universitet 1872—1897. 1897. 4:o.

Upsala. *Universitetet.*
Upsala universitet 1872—1897. Festskrift utgifven af R. GEIJER. 1897. 4:o.

Amsterdam. *K. Akademie van wetenschappen.*
Verhandelingen. Sect. 1: D. 5: N:o 3—8; Sect. 2: D. 2, 5: N:o 4—10. 1896—97. 8:o.
Verslagen van de gewone vergaderingen der wis — en natuurkundige afd. D. 5 (1896/97). 8:o.
Verslagen en mededeelingen. Afd. Letterkunde. (3) D. 12. 1896. 8:o.
— Register (3) D. 1—12. 8:o.
Jaarboek. 1896. 8:o.
Reditus Augusti. Accedunt quatuor poemata laudata. 1897. 8:o.

Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1897: 26—39. 8:o.
— *K. Universität.*
Akademiskt tryck 1896/97. 33 st. 8:o & 4:o.

Breslau. *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*
Jahresbericht. 74 (1896) & Erg.-heft. 8:o.
Bruxelles. *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*
Bulletin. (2) T. 11 (1897): Fasc. 1. 8:o.
Budapest. *Magyar tudományos akadémia.*
Archæologiai értesitö. K. 16 (1896): 3–5; 16 (1897): 1–3. 8:o.
Mathematikai és természettudományi értesitö. K. 14 (1896): 3–5; 15 (1897): 1–2. 8:o.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd 13: H. 2. 1897. 8:o.
Rapport sur les travaux de l'académie Hongroise des sciences en 1896. 8:o.
Buitenzorg. *Jardin botanique.*
Annales. Vol. 14: P. 2. 1897. 8:o.
Mededeelingen. 20. 1897. 8:o.
Glasgow. *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 28 (1896/97). 8:o.
Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. H. 33 (1896). 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Neue Folge. Philol.-hist. Kl. Bd 1: Nr. 6–8; 2: 1–3. 1897. 4:o.
» » » Math.-phys. Kl. Bd 1: Nr. 1. 1897. 4:o.
Nachrichten. Philol.-hist. Kl. 1897: H. 2. 8:o.
» Math.-physikal. Kl. 1897: H. 2. 8:o.
Heidelberg. *Universitäts-bibliothek.*
Akademiskt tryck 1896/97. 130 st. 8:o.
Helsingfors. *Finska vetenskaps-societeten.*
Acta. T. 21. 1896. 4:o.
Öfversigt af förhandlingar. 38 (1895/96). 8:o.
Kjöbenhavn. *Danmarks geologiske Undersögelse.*
[Skrifter] Række 1: Nr 2, 4–5; 2: 6–7. 1897. 8:o.
Linz. *Museum Francisco-Carolinum.*
Jahresbericht. 55 (1896). 8:o.
BANCALARI, G., Bibliotheks-Katalog. 1897. 8:o.
Liverpool. *Biological society.*
Proceedings and transactions. Vol. 10 (1895/96). 8:o.
London. *Adams memorial committee.*
ADAMS, J. C, The scientific papers. Vol. 1. Cambridge 1896. 4:o.
Moscou. *Société impériale des naturalistes.*
Bulletin. Année 1896: N:o 4. 8:o.
Paris. *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 25 (1897): N:o 5. 8:o.
Mémoires. Paléontologie. T. 7: Fasc. 4: P. 1. 1897. 4:o.

(Forts. å sid. 388.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 8.
Stockholm.

Nachträgliche Bemerkungen über die mesozoische Flora Spitzbergens.

Von A. G. NATHORST.

(Mitgetheilt den 13. Oktober 1897.)

In meiner Arbeit über die mesozoische Flora Spitzbergens, welche kürzlich erschienen ist,[1]) habe ich auch hin und wieder Vergleichungen mit den von HEER aus dem Jura Sibiriens beschriebenen und abgebildeten Pflanzen anstellen müssen, da ja mehrere Beziehungen zwischen den Jura-Floren der beiden Länder vorhanden sind. Da ich während des soeben verflossenen Sommers (1897) als Theilnehmer des 7:ten internationalen Geologencongresses St. Petersburg besuchte, benutzte ich auch die Gelegenheit, die im Museum der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften gut aufgestellten und geordneten Originale zu HEER's Arbeiten,[2]) mit besonderer Rücksicht auf die Jura-Flora Spitzbergens, zu studiren, und ich theile unten die Resultate dieser

[1]) A. G. NATHORST, Zur mesozoischen Flora Spitzbergens, gegründet auf die Sammlungen der schwedischen Expeditionen. K. V. A. Handl. Bd. 30, N:o 1, Stockholm 1897. Auch besonders herausgegeben als: Zur fossilen Flora der Polarländer. Th. 1, Lief. 1.

[2]) HEER hat drei verschiedene Arbeiten über die Jura-Flora Sibiriens veröffentlicht, und zwar: Beiträge zur Jura-Flora Ostsibiriens und des Amurlandes (Mém. Acad. imp. des sc. St. Pétersbourg, 7me série, t. 22, n:o 12; Flora foss. arctica. Vol. 4); Beiträge zur fossilen Flora Sibiriens und des Amurlandes (Mém. etc. t. 25, n:o 6; Flora foss. arctica. Vol. 5); Nachträge zur Jura-Flora Sibiriens (Mém. etc. t. 27, n:o 10; Flora foss. arctica. Vol. 6, Abth. 1). Diese drei Abhandlungen werden hier als »Beiträge I», »Beiträge II» und »Nachträge» bezeichnet.

Studien mit. Für die freie Benutzung der schönen Sammlung und für sonstige Unterstützung beim Studium derselben spreche ich meinem hochverehrten Freund, Herrn Akademiker Dr. Fr. Schmidt, meinen herzlichsten Dank aus.

Elatides. Als synonym mit *Elatides curvifolia* Dunker sp. hatte ich nicht nur *Elatides falcata* Heer, welche auf blatttragende Zweige gegründet worden ist, sondern auch die auf Zapfen gegründeten *E. ovalis*, *parvula* und *Brandtiana* desselben Autors (Beiträge, I, S. 77—79) aufgeführt, wie ja auch Schenk seiner Zeit die vier Arten zu einer einzigen vereinigt hatte. Bei der Untersuchung der Petersburger Sammlung konnte ich ebenfalls keine Verschiedenheit zwischen *Elatides falcata* aus dem Sandstein der Kaja-Mündung und den blatttragenden Zweigen von *Elatides curvifolia* aus Spitzbergen entdecken, weshalb die Identifizierung dieser Reste in der That richtig sein dürfte. Dagegen scheint es mir jetzt unsicher, ob die Zapfen der drei übrigen Arten (welche ich als eine einzige betrachte) aus Ust-Balei wirklich mit *Elatides curvifolia* aus Spitzbergen zu identifizieren sind. Neben den von Heer abgebildeten Exemplaren dieser Zapfen liegen auch andere vor, welche sämmtlich auch isolirt, d. h. von den Zweigen getrennt vorkommen, während die Zapfen aus Spitzbergen umgekehrt immer an den Zweigen sitzen. Es scheint deshalb, als wären die Zapfen der Pflanze von Ust-Balei regelmässig abgefallen, während sie an der spitzbergischen Pflanze lange sitzen blieben.[1]) Dazu kommt noch, dass die Zapfen aus Spitzbergen so schlecht erhalten sind, dass man die wahre Form ihrer Schuppen nicht mit Sicherheit ermitteln kann.[2])

Unter diesen Umständen dürfte es jedenfalls am besten sein, die sibirischen Zapfen (*Elatides ovalis*, mit *E. Brandtiana* und *parvula* darin einbegriffen) bis auf Weiteres nicht als synonym mit *Elatides curvifolia* zu betrachten.

---

[1]) Schenk fasst die muthmasslichen Zapfen aus Ust-Balei als weibliche Blüthen auf. Man könnte dann allerdings annehmen, dass sie nicht befruchtet wurden und deshalb abfielen.

[2]) Anscheinend ist auch ihre Zahl wohl grösser, als in den Zapfen aus Ust-Balei.

Feildenia. In meiner erwähnten Abhandlung hatte ich (S. 57) die Meinung ausgesprochen, dass die von HEER (Beiträge, I) als *Podozamites ensiformis* und *cuspiformis* beschriebenen Blätter in umgekehrter Stellung gezeichnet sind, und dass sie wahrscheinlich zu *Feildenia* gehören. Diese Vermuthung hat sich bei der Untersuchung der Originale bestätigt. Obschon die Nervatur meistens schlecht erhalten ist, glaubte ich doch am Original zu HEER's Taf. 4, Fig. 8 *a* mit Bestimmtheit beobachten zu können, dass die Gefässbündel sich im schmäleren Theil des Blattes (nach dem breiteren hin) gabelten. *Feildenia* kommt also wirklich im Jura Sibiriens vor.

Meine an derselben Stelle ausgesprochene Vermuthung, dass der in »Beiträge, II» aus Tapka beschriebene *Podozamites ensiformis* eine andere Pflanze, und zwar ein *Zamites*, sei, hat sich ebenfalls als richtig erwiesen. Die Nerven sind am Grunde der Blättchen mehr radial, als in der Abbildung angegeben wird. Die Pflanze ist deshalb künftighin als *Zamites ensiformis* HEER sp. zu bezeichnen.

Drepanolepis. Die Annahme (S. 71), dass *Carpolithes Hartungi* HEER (Beiträge, II) zu *Drepanolepis* gehören dürfte, wurde ebenfalls, soweit der Erhaltungszustand die Entscheidung der Frage zulässt, bei der Untersuchung des Originals bestätigt.

Nilssonia? Bei meiner Besprechung von *Nilssonia? Öbergiana* HEER sp. (S. 12) habe ich hervorgehoben, dass dieselbe eine recht grosse Ähnlichkeit mit *Pterophyllum Helmersenianum* HEER (Beiträge, I) darbietet. »Dies ist aber kein ächtes *Pterophyllum*». Die Untersuchung dieser Art, ebenso von *Anomozamites Schmidtii* HEER und *A. angulatus* HEER (Beiträge, I) in der Petersburger Sammlung hat es recht wahrscheinlich gemacht, dass sie sämmtlich zu *Nilssonia* gehören.[1]) Die Frage mit Sicherheit zu entscheiden war leider nicht möglich, da kein einziges von den von mir untersuchten Exemplaren die Nervatur

[1]) Ein als *Pterophyllum Helmersenianum* bezeichnetes Exemplar einer Blattspitze war einer *Ctenis* recht ähnlich, da aber die Nervatur nicht erhalten ist, konnte es nicht bestimmt werden. Die übrigen Exemplare hatten aber mit *Ctenis* nichts zu thun.

und Anheftung der Blattlamina hinreichend deutlich zeigte. Sollte sich aber meine Vermuthung, dass die erwähnten Arten Nilssonien sind, bestätigen, so dürfte dasselbe wahrscheinlich auch für *Anomozamites acutilobus* HEER und *Pterophyllum Sensinovianum* Giltigkeit haben.

Betreffs *Nilssonia comtula* HEER (Beiträge, II) sei bemerkt, dass dieselbe, obschon etwas grösser, an *Nilssonia schaumburgensis* DUNKER sp. recht sehr erinnert, und daher wohl als deren Vorläufer betrachtet werden kann.

Was den Namen **Pinites (Pityostrobus) Conwentzi** NATH. (S. 63) betrifft, sei beiläufig bemerkt, dass man mich darauf aufmerksam gemacht hat, dass es schon einen *Pinites Conwentzianus* GÖPPERT giebt.[1]) Da dieser aber, nach der jetzigen Nomenclatur, *Pityoxylon Conwentzianum* genannt werden muss, und ausserdem, nach SCHENK[2]) und SOLMS,[3]) zweifelhafter Natur zu sein scheint, dürfte es vorläufig unnöthig sein, den von mir gegebenen Namen zu verändern. Eine Verwechselung der beiden Arten dürfte jedenfalls nicht zu befürchten sein.

Es soll endlich nicht unerwähnt bleiben, dass ich bei der Besprechung von **Pinites Nordenskiöldi** (S. 18—19) leider übersehen habe, dass auch ZEILLER die Ansicht vertreten hat, dass die von SCHMALHAUSEN beschriebenen »Jura-Floren» von der Petschora und vom Altai eher permischen Alters sein dürften.[4]) Über seine in demselben Aufsatz geäusserte Vermuthung,[5]) dass die Jura-Floren von Kap Boheman, von Sibirien und vom Amurland vielleicht eher zum Lias oder Rhät als zum braunen Jura gehören könnten, will ich mich jetzt nicht äussern.

---

[1]) GÖPPERT, Revision meiner Arbeiten über die Stämme der fossilen Coniferen. Botanisches Centralblatt. 5 (1881), S. 405.

[2]) SCHENK, Paläophytologie. S. 876.

[3]) SOLMS, Einleitung in die Paläophytologie. S. 85.

[4]) R. ZEILLER, Remarques sur la flore fossile de l'Altaï etc. Bull. soc. géol. France. 24 (1896): p. 466.

[5]) ZEILLER, l. c. p. 478, Fussnote.

Im Anschluss an diese Bemerkungen über solche sibirische Jurapflanzen, welche für die Jura-Flora Spitzbergens ein besonderes Interesse haben, mögen auch einige andere Arten hier besprochen werden.

Confervites subtilis HEER (Beiträge, I) ist gewiss keine Alge, sondern eher irgend welche Haarbildung pflanzlichen oder thierischen Ursprungs. Professor N. WILLE aus Christiania, der hervorragende Algolog, welcher zusammen mit mir das Exemplar untersuchte, war ganz derselben Meinung.

Protorrhipis reniformis HEER (Nachträge), von welcher er selbst sagt, dass »die verwischte Nervation eine ganz sichere Bestimmung nicht zulässt», macht eher den Eindruck einer Schuppe als eines Blattes, und die scheinbaren »Nerven» sehen eher wie Runzeln aus. Vielleicht handelt es sich um eine ähnliche Schuppe wie *Zamiostrobus* sp. (Nachträge, S. 10, Taf. I, Fig. 9).

Taeniopteris parvula HEER (Beiträge, I) ist in Wirklichkeit ein *Taxites*-Blatt, und die scheinbaren Seitennerven sind nur Querrunzeln, wie sie an fossilen *Taxites*-Blättern recht häufig vorkommen.

Cycadites sibiricus HEER (Beiträge, II) ist kein *Cycadites*. Das Exemplar Taf. 4, Fig. 1 stellt vielmehr das Blatt einer *Taeniopteris* oder *Nilssonia* mit gänzlich verwischten Seitennerven dar, während Fig. 1 *b* ein Blattlappen von *Baiera* oder dergleichen sein kann. Jedenfalls ist *Cycadites sibiricus* als besondere Pflanze zu streichen. Von *Cycadites* (richtiger *Taxites*) *gramineus* HEER (Beiträge, I) sollte das Exemplar Taf. 23, Fig. 1 *b* ausgeschlossen werden, da es nur ein Fragment eines unbestimmbaren Blattstiels ist. Die übrigen Exemplare dieser Art sah ich nicht.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 382.)

Prag. *Česka akademia císaře Františka Josefa.*
Rozpravy. Třídu 2: Ročník 5: c. 1–43. 1896—97. 8:o.
PERNER, J., Foraminifery vrstev Bělohorských. 1897. 4:o.
LÁSKA, V., Vyšší geodesie. 1896. 8:o.
Bulletin international. 3. 1896. 8:o.

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze morali ... (5) Memorie. Vol. 2—3. 1896. 4:o.
» » » » » » Notizie degli scavi. Vol. 4 (1896): 2, 8–9, 12; 5 (1897): 1–7. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali ... (5) Vol. 5 (1896): 8–9, 11–12; 6 (1897): 1–6. 8:o.
» » » » fisiche ... (5) Vol. 6 (1897): Sem. 1: Fasc. 2–12; Sem. 2: 1–5. 8:o.

— *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*
Atti. Anno 50 (1897): Sess. 4–6. 4:o.

— *Ministero della pubblica istruzione.*
Indici e cataloghi. 11: Vol. 2: Fasc. 3; 13; 15: Vol. 1: Fasc. 7. 8:o & Fol.

— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Anno 27 (1896): N:o 1–4. 8:o.

S:t Petersburg. *Institut Imp. de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 5: N:o 2–5. 1897. 4:o.

Stavanger. *Museum.*
Aarsberetning for 1896. 8:o.

Stuttgart. *Verein für vaterländische Naturkunde.*
Jahreshefte. Jahrg. 53 (1896). 8:o.

Sydney. *Linnean society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 21 (1896): P. 4. 8:o.

— *Royal society of New South Wales.*
Journal and proceedings. Vol. 30 (1896). 8:o.

— *Australian museum.*
Memoir. 3: P. 3. 1897. 8:o.
Records. Vol. 3: N:o 2. 1897. 8:o.

Trieste. *Museo civico di storia naturale.*
MARCHESETTI, C., Flora di Trieste e de' suoi dintorni. 1896–97. 8:o.

Tromsö. *Museum.*
Aarshefter. 18 (1895). 8:o.
Aarsberetning for 1894. 8:o.

Trondhjem. *K. norske Videnskabers Selskab.*
Skrifter. 1896. 8:o.

(Forts. å sid. 412.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 8.
Stockholm.

Relationer mellan distanserna inom Saturnus-systemet.

Af KARL BOHLIN.

[Meddeladt den 13 Oktober 1897 genom D. G. LINDHAGEN.]

Meningarna äro delade angående den s. k. BODE'ska serien eller TITIUS'ska lagen, upptäckt af Wittenbergerprofessorn TITIUS 1766 och sedermera bekantgjord genom Berlinerastronomen BODE. Under det den från vissa håll betecknas såsom blott en lek med siffror, ett misslyckadt försök af en sjuklig kombinationslusta, så har den dock å andra sidan vindicerat sig en plats i hvarje astronomisk lärobok och ingår i sjelfva verket i vårt medvetande såsom en verklig naturlag, om äfven ännu till sitt väsen outforskad. Ingen lär heller vilja förneka, att man efter upptäckten af asteroiderna betraktar som den naturligaste sak i verlden, att deras medelafstånd från solen motsvarar den plats, där TITIUS' lag hade lemnat en lucka. Efterföljande utredning beträffande afstånden inom Saturnus-systemet synes gifva vid handen tillvaron af en analog lag för Saturnusmånarna.

I.

Vi utgå från följande värden af banornas halfva storaxlar, hemtade ur *Annuaire du bureau des longitudes pour l'an 1897:*

	f	$f-a$
Ring	1.8	0.0
Mimas	3.1	1.3
Enceladus . . .	4.0	2.2
Tethys	4.9	3.1
Dione	6.3	4.5
Rhea	8.8	7.0
Titan	20.5	18.7
Hyperion . . .	25.1	23.3
Japetus	59.6	57.8

Då afståndet för midten af Saturnusringen från planetens centrum är 16″.5 och Saturnus ekvatorsradie är 9″.0, så är ringens medeldistans uttryckt i Saturnusradier 1.8, hvilket tal blifvit anfördt i början af kolumnen för f. Om vi nu vilja försöka att i analogi med TITIUS' lag framställa denna talföljd genom en formel af följande gestalt:

$$f = a + b\mu^n\,, \tag{1}$$

så hafva vi för exponenten n att använda talföljden

$$n = -\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ , \tag{2}$$

i det värdet $n = -\infty$ hänföres till ringen och de följande heltalsvärdena tillordnas de successiva satelliterna. Följaktligen måste vi antaga

$$a = 1.8\,.$$

Då vidare $n = 0$ för Mimas, måste värdet för b ligga i omgifningen af talet 1.3. Vi erhålla med lätthet en bestämning af μ, så snart b till sitt värde är kändt.

Utföra vi nu denna bestämning af μ för olika värden af b:

$$b = 1.0,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5$$

så erhålla vi följande tablå öfver kvantiteten μ^n:

Log μ^n.

	$\lg(f-a)$	$b=1.0$	$b=1.1$	$b=1.2$	$b=1.3$	$b=1.4$	$b=1.5$
$n = -\infty$	—	—	—	—	—	—	—
0	0.114	—	—	—	—	—	—
1	0.342	0.342	0.301	0.263	0.228	0.196	0.166
2	0.491	0.491	0.450	0.412	0.377	0.345	0.315
3	0.653	0.653	0.612	0.574	0.539	0.507	0.477
4	0.845	0.845	0.804	0.766	0.731	0.699	0.669
5	—	—	—	—	—	—	—
6	1.272	1.272	1.231	1.193	1.158	1.126	1.096
7	1.367	1.367	1.326	1.288	1.253	1.221	1.191
8	1.762	1.762	1.721	1.683	1.648	1.616	1.586

och häraf erhålla vi åter följande tablå öfver kvantiteten μ:

Log μ.

n	$b = 1.0$	$b = 1.1$	$b = 1.2$	$b = 1.3$	$b = 1.4$	$b = 1.5$
1	0.342	0.301	0.263	0.228	0.196	0.166
2	0.245	0.225	0.206	0.188	0.172	0.157
3	0.218	0.204	0.191	0.180	0.169	0.159
4	0.211	0.201	0.191	0.188	0.175	0.168
5	—	—	—	—	—	—
6	0.212	0.205	0.199	0.193	0.188	0.188
7	0.195	0.189	0.184	0.179	0.174	0.170
8	0.220	0.215	0.210	0.206	0.202	0.198

Af denna senare sammanställning inses, hvarför vi i dessa båda tabeller uteslutit raden 5. Vi erhålla nemligen därigenom en större öfverensstämmelse inom de särskilda vertikala kolonnerna. Omisskänligt är ock af den senare tabellen, att vi genom vår formel (1) funnit en lag, till hvilken Saturnussatelliternas afstånd kan anslutas. Öfverensstämmelsen är dock icke så noggrann, att icke kvantiteterna μ och b ännu kunna väljas temligen godtyckligt inom vissa gränser.

Värdena μ koincidera för de närmaste Satelliterna bäst för $b = 1.5$ och för samma värde ansluter sig äfven 7 Hyperion. Men tager man hänsyn till 6 Titan, så synes kolumnen 1.3 medföra den relativt bästa öfverensstämmelsen. Häraf framgår bland annat, att det är omöjligt att åstadkomma fullständig öfverensstämmelse såväl för de yttre som för de inre satelliterna.

Ställer man sig nu uppgiften att få de inre satelliterna att öfverensstämma så väl som möjligt, så kan detta ske, antingen i det man fäster mindre afseende vid Titan än vid Hyperion, hvilken bättre synes ansluta sig till de inre Satelliterna, eller genom att gifva företrädet åt Titan. På grund däraf att Titan och Japetus bättre öfverensstämma sins emellan än Japetus och Hyperion, vilja vi taga det senare alternativet och till en början utelemna Hyperion.

Om vi nu vid ett par tiondedelars afvikelse i de första talen fästa mindre afseende, så kunna vi äfven bestämma oss för att i stället för $b = 1.3$ för enkelhets skull sätta

$$b = 1\,.$$

Medeltalet af häremot svarande värden är med uteslutande af $n = 1$, som afviker väl mycket, 0.222, alltså ej mycket skildt från värdet för Japetus samt motsvarande $\mu = 1.66$. Titan ger åter $\mu = 1.63$. Taga vi medeltalet mellan värdena för Titan (vigt 2) och Japetus (vigt 1) så erhålla vi

$$\mu = 1.64\,.$$

Vår formel blir då, i det vi dessutom i rundt tal sätta

$$a = 2$$

i stället för $a = 1.8$ af följande utseende:

$$f = 2 + (1.64)^n\,. \qquad (3)$$

Denna formel representerar distanserna f på följande sätt:

	Formel (3).	Verkl. dist.
$n = -\infty$	$f =$ 2.0	$f =$ 1.8
0	3.0	3.1
1	3.6	4.0
2	4.7	4.9
3	6.4	6.3
4	9.2	8.8
5	13.9	—
6	21.5	20.5
7	34.0	25.1
8	54.5	59.6

Att i sjelfva verket en härmed jemförlig öfverensstämmelse ernås med andra system af konstanter framgår af följande exempelvis härledda serier:

$a = 2$ $b = 1.24$ $\mu = 1.55$	Verkl. dist.	$a = 2$ $b = 1.12$ $\mu = 1.60$
f	f	f
2.0	2.0	2.0
3.2	3.1	3.1
3.9	4.0	3.8
4.9	4.9	4.9
6.5	6.3	6.6
9.0	8.8	9.3
12.9	—	13.7
19.1	20.5	20.7
28.5	25.1	32.0
43.1	59.6	50.0

Utelemna vi nu Saturnringen ur diskussionen och hålla oss endast till satelliternas distanser, så kunna vi härleda följande formel:

$$f = 3 + (1.8)^n, \qquad (4)$$

hvilken ansluter sig till de verkliga afstånden något bättre, såsom följande sammanställning visar.

		Formel (4).	Verkl. dist.
Mimas . .	$n = -\infty$	$f =$ 3.0	$f =$ 3.1
Enceladus	0	4.0	4.0
Tethys . .	1	4.8	4.9
Dione . .	2	6.2	6.3
Rhea . .	3	8.8	8.8
— . .	4	13.5	—
Titan . .	5	21.9	20.5
Hyperion .	6	37.0	25.1
Japetus .	7	64.0	59.6

Sätta vi åter t. ex. $\mu = 1.75$ i stället för $\mu = 1.8$, så erhålla vi följande representation:

Formel.	Verkl. dist.
$f =$ 3.0	$f =$ 3.1
4.0	4.0
4.7	4.9
6.1	6.3
8.4	8.8
12.4	—
19.4	20.5
31.7	25.1
53.3	59.6

så att äfven här valet af konstanter är inom vissa gränser godtyckligt.

II.

Sätter man i formeln (1)

$$n = N - \tau\,, \tag{5}$$

så ikläder sig den samma följande form:

$$f = \alpha + \beta e^{-\nu\tau}\,. \tag{6}$$

För $\tau = 0$ få vi enl. (5)

$$N = n$$

alltså, med användning af den yttersta månen Japetus,

$$N = 9\,.$$

hvarmed värdet af konstanten β låter bestämma sig. Formeln (6) representerar ett aftagande af den drabantbildande hufvudkroppen från en maximalradie af storleken $\alpha + \beta$ till värdet α, som uppnås för $\tau = \infty$.

Sambandet mellan variabeln τ och tiden kunna vi antaga vara gifvet genom en relation af följande yttre form:

$$\tau = t\,\{1 + \varphi(t)\}$$

och vi hafva att föreställa oss att drabanterna afskiljas vid de tider

$$t = t_0 = 0\,,\quad t = t_1\,,\quad t = t_2\,,\quad .\ .\ .\quad t = t_n\,,$$

hvilka åt funktionen τ gifva heltalsvärdena

$$\tau_n = N - n\,.$$

Huruvida vi med någon grad af tillnärmelse kunna antaga

$$\tau = \gamma^t\,;$$

är en fråga, som vi måste lemna öppen.

Formeln

$$f = \alpha + \beta e^{-\nu\tau}\,; \quad \tau = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

ger oss anledning, att i stället för talföljden

$$n = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots,$$

hvilken är karaktäristisk för TITIUS' lag, tillordna serien

$$n = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

till de successiva satelliterna i enlighet med följande tablå:

Ringen . . .	$n = -1$	$f =$ 1.8
Mimas . . .	0	3.1
Enceladus . .	1	4.0
Thetys . . .	2	4.9
Dione . . .	3	6.3
Rhea	4	8.8
. . . . . .	5	—
Titan	6	20.5
Hyperion . .	7	25.1
Japetus . . .	8	59.6

Under förutsättning att dessa distanser låta sig framställas under formen

$$f = a + b\mu^n \tag{7}$$

erhålla vi exempelvis

$$\left.\begin{aligned} 8.8 &= a + b\mu^4 \\ 4.9 &= a + b\mu^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

och kombinera vi härmed formeln för Mimas

$$3.1 = a + b \tag{9}$$

så erhålla vi de båda ekvationerna

$$5.7 = b(\mu^4 - 1)$$
$$1.8 = b(\mu^2 - 1),$$

hvaraf vi med lätthet härleda

$$\mu^2 = \tfrac{57}{18} - 1.$$

Vi erhålla nu följande bestämning af de båda konstanterna μ och b:

$$\left.\begin{aligned}\mu &= 1.47\\ b &= 1.54.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Härefter ger t. ex. formeln (9)

$$a = 1.6. \quad (11)$$

Emedan värdena för μ och b så nära sammanfalla, ersätta vi formeln (7) med följande formel:

$$f = a + c\mu^{n+1}, \quad (12)$$

hvarvid vi veta, att vi hafva nära nog följande värden på konstanterna:

$$a = 1.6$$
$$c = 1.0$$
$$\mu = 1.5.$$

Ersätta vi nu vidare i formeln (12) $n+1$ med m, så få vi slutligen följande representation af våra afstånd f:

$$f = 1.6 + \mu^m. \quad {\scriptstyle m=0,1,2,3,\ldots} \quad (13)$$

Med användning af de gifna distanserna erhålles nu följande tablå:

	$f-a$	$\text{Log}\frac{f-a}{c}$	$\text{Log}\,\mu$	μ
$m = 0$	0.2	9.301	—	—
1	1.5	0.176	0.176	1.50
2	2.4	0.380	0.190	1.55
3	3.3	0.519	0.173	1.49
4	4.7	0.672	0.168	1.47
5	7.2	0.857	0.171	1.48

	$f-a$	$\text{Log}\frac{f-a}{c}$	Log μ	μ
6	—	—	—	—
7	18.9	1.276	0.182	1.52
8	23.5	1.371	0.172	1.49
9	58.0	1.763	0.196	1.57

Det allmänna medeltalet för μ blir härmed 1.51. Utelemna vi Japetus, få vi åter

$$\mu = 1.50\,,$$

hvilket är det värde vi skola fastställa. Vår formel blir således

$$f = 1.6 + (1.5)^m\,. \qquad (14)$$

Den samma framställer de ifrågavarande afstånden på sätt, som nedanstående sammanställning utvisar:

	Formel (14).	Verkl. dist.
$m = 0$	$f =$ 2.6	$f =$ 1.8
1	3.1	3.1
2	3.9	4.0
3	5.0	4.9
4	6.7	6.3
5	9.2	8.8
6	13.0	—
7	18.7	20.5
8	27.2	25.1
9	40.0	59.6

Värdet 2.6 för $m = 0$ stämmer närmare med afståndet till ringens yttre rand, som uttryckt i Saturnusradier är 2.2, än med afståndet för ringsystemets medellinie, som, efter hvad förut blifvit sagdt, är här ofvan anförda värde 1.8. För $m = -1, -2, -3, \ldots$ erhålla vi allt mindre och mindre värden för f, hvilkas gränsvärde är 1.6. Utan att här vilja tillmäta denna omständighet betydelse, kunna vi tillfoga den anmärkningen, att den inre ringens inre radie nära nog öfverensstämmer med detta gränsvärde. Dess afstånd i Saturnusradier är nemligen 1.4.

Att formeln för Japetus afviker väl mycket, är i öfverensstämmelse med förhållandet för Neptunus och den Titius'ska lagen och kan ju möjligen föras i samband med hvardera systemets kosmogoni. I öfrigt är formelns öfverensstämmelse, såsom det synes, fullt tillfredsställande. Vi kunna härtill ännu foga den anmärkningen, att satelliternas afstånd genom banornas excentriciteter något variera från medelafstånden och att vi naturligtvis icke kunna göra anspråk på att med en formel, som den härledda, representera satellitafstånden nogare än på banexcentriciteterna när.

Att vi i TITIUS' lag såsom ock i den härofvan deducerade lagen beträffande Saturnus-systemet icke hafva att göra med blott en tillfällighet synes otvifvelaktigt, emedan den i båda fallen härledda lagen är af samma natur nemligen af formen (12) eller, om vi så vilja, af formen (6).

Såväl af den sista framställningen i enlighet med formeln (14), som af de provisionella jemförelser, som i afd. I anfördes för hvarje särskild supposition angående konstanterna i de formler, hvilka där togos i betraktande, framgår tillvaron af en lucka i Saturnus-systemet mellan *Rhea* och *Titan*,[1]) där, efter hvad ofvan anförts, otvifvelaktigt en ny måne eller en ring motsvarande asteroiderna i solsystemet återstår att upptäcka.

Då en liten ändring af konstanten a i vår formel (12) är af föga inflytande på siffrornas öfverensstämmelse, kunna vi ersätta värdet 1.6 med 1.5 och erhålla så följande formel för distanserna i Saturnus-systemet:

$$f = 1.5 + (1.5)^m . \quad m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (15)$$

---

[1]) Såsom först under tryckningen af detta meddelande blef mig bekant, har Prof. DANIEL KIRKWOOD i en uppsats »On certain Harmonies of the Solar System» The american journal of science and arts (second series), Tome 38. 1864, p. 14, påvisat luckor i Saturnussystemet mellan Rhea och Titan samt mellan Hyperion och Japetus. Utan att härleda en generel formel för satellitsystemet finner han genom interpolation värdet 14, 48 för afståndet till den mellan Rhea och Titan felande satelliten.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 8.
Stockholm.

Om lösningen af MAXWELL's ekvationer för det elektromagnetiska fältet.

Af C. A. MEBIUS.

(Meddeladt den 13 Oktober 1897 genom B. HASSELBERG.)

1. De af MAXWELL uppställda ekvationerna för kraftfördelningen och krafternas ändring med tiden inom ett elektromagnetiskt fält i den fria etern äro:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} A\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ A\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ A\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Här betyda X, Y, Z komposanterna af den elektriska kraften längs x-, y- och z-axlarne i ett rätvinkligt koordinatsystem [1]), L, M, N motsvarande komposanter af den magnetiska kraften, t tiden och A det inverterade värdet af ljusets hastighet.

Ur (1) och (2) härledas ekvationerna

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \text{ och } \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \qquad (3)$$

då man antager, att de redan i jämviktstillståndet gälla.

[1]) Är den positiva x-axeln riktad åt höger, den positiva z-axeln uppåt, så bör den positiva y-axeln vara riktad *mot* åskådaren. I annat fall bör motsatt tecken tagas på ena sidan om likhetstecknen i (1) och (2).

2. En lösning till dessa ekvationer är gifven af HERTZ.[1]) Han säger:

»Hinsichtlich der Lösung der Gleichungen beschränken wir uns auf den besonderen, aber wichtigen Fall, dass die Vertheilung der elektrischen Kraft symmetrisch um die z-Axe ist, und zwar derart, dass diese Kraft in jedem Punkte in die durch die z-Axe gelegte Meridianebene fällt und nur abhängig ist von den z-Coordinate des Punktes und seinem Abstand $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ von der z-Axe.»

Denna lösning är

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \\ Y &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \\ Z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}, \end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad \left.\begin{aligned} L &= A\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}, \\ M &= -A\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}, \\ N &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

hvarest Π är en för öfrigt godtycklig funktion af ϱ, z, t, som satisfierar differentialekvationen

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \qquad (6)$$

3. I det följande skall meddelas en möjlig lösning till de MAXWELL'ska ekvationerna, hvilken ej är bunden vid de ofvan nämnda inskränkningarne.

Hvar och en af de elektriska kraftkomposanterna uppdelas dervid i tre komposanter, X_1, X_2, X_3 längs x-axeln etc., och hvar och en af de magnetiska kraftkomposanterna i tvenne, och dessa sammanföras i tre kraftsystem af följande form:

1:o. $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, 0$;
2:o. $X_2, Y_2, Z_2, L_2, 0, N_2$;
3:o. $X_3, Y_3, Z_3, 0, M_3, N_3$.

Betrakta vi det första systemet för sig, så satisfierar det MAXWELL's ekvationer, om vi i enlighet med HERTZ' lösning sätta

[1]) HERTZ: Wied. Ann. Bd. 36, p. 1, 1889.

$$\left.\begin{aligned} X_1 = -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z}, \quad Y_1 = -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z}, \quad Z_1 = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}, \\ L_1 = A\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t}, \quad M_1 = -A\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

om blott

$$A^2 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \varDelta H.$$

På samma sätt satisfiera det andra och det tredje systemet hvar för sig (1) och (2), om vi sätta

$$\left.\begin{aligned} X_2 = -\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}, \quad Y_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad Z_2 = -\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}, \\ L_2 = -A\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial t}, \quad N_2 = A\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

och

$$\left.\begin{aligned} X_3 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad Y_3 = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad Z_3 = -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}, \\ M_3 = A\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial t}, \quad N_3 = -A\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

om blott

$$A^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \varDelta G \text{ och } A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \varDelta F.$$

En möjlig lösning till (1) och (2) är följaktligen

$$\left.\begin{aligned} X = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3, \\ L = L_1 + L_2 \quad, \quad M = M_1 + M_3 \quad, \quad N = N_2 + N_3 \quad, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

hvarom man för öfrigt lätt öfvertygar sig genom insättning i (1), (2), af hvilka (2) satisfieras identiskt och (1) med tillhjälp af villkorsekvationerna för F, G och H.

Man kan gifva ekvationssystemet (10) en mera symmetrisk form och erhåller då:

Om funktionerna F, G och H hvar för sig satisfiera differential-ekvationen

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

och om man inför beteckningen

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

så är

$$\left.\begin{aligned} X &= \Delta F - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ Y &= \Delta G - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z &= \Delta H - \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}\right\} (12) \quad \left.\begin{aligned} L &= A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \\ M &= A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\ N &= A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} (13)$$

en möjlig lösning till MAXWELL's *ekvationer.*

Äro F, G, H oberoende af t, hafva de elektriska krafterna en potential V, och de magnetiska äro noll.

Naturligen kan man låta F, G, H betyda samma funktion Π, ehuru lösningen då är mindre allmän.

4. Differentierar man ekvationssystemen (1) och (2) partiellt i afseende på t, multiplicerar med A och insätter värdena på $\frac{\partial L}{\partial t}$ etc. ur (1) och (2) samt använder ekv. (3), så erhåller man sex ekvationer alla af samma form, af hvilka blott en utskrifves, nämligen

$$A^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X. \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Häraf framgår, att uttrycken för de sex kraftkomposanterna alla satisfiera ekvationen (6). Detta är naturligt, derföre att ekv. (6) satisfieras af hvarje summa med konstanta koefficienter af partiella derivator af Π tagna ett godtyckligt antal gånger i afseende på x, y, z, t, såvida dessa äro kontinuerliga.

Denna fullkomliga symmetri, hvilken också nära nog återfinnes i (1) och (2), häntyder på den speciella karaktären af den i ekvationssystemen (12) och (13) framställda lösningen (förutom det förhållandet, att enligt (13) $L + M + N = 0$, då man antager $F = G = H$). Man bör nämligen vänta sig, att de magnetiska kraftkomposanterna skola låta framställa sig genom uttryck af nära nog samma form som de elektriska.

Med ledning af den HERTZ'ska lösningen finner man derföre utan svårighet följande lösning

$$\left.\begin{aligned} X &= -A\frac{\partial^2 J}{\partial y\partial t}, \\ Y &= +A\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial t}, \\ Z &= 0, \end{aligned}\right\} (15) \qquad \left.\begin{aligned} L &= -\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial z}, \\ M &= -\frac{\partial^2 J}{\partial y\partial z}, \\ N &= \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2}, \end{aligned}\right\} (16)$$

under förutsättning att

$$A^2\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = \Delta J,$$

och man inser, att den gäller under samma förutsättningar som den HERTZ'ska, om man blott utbyter »elektrisk» kraft mot »magnetisk», d. v. s. då den elektriska kraften är vinkelrät mot z-axeln och den magnetiska symmetrisk i afseende på samma axel.

Ur föregående lösning härleder man en allmännare genom samma förfaringssätt, som användes i fråga om (10), och man erhåller då, att

$$\left.\begin{aligned} X &= -A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right), \\ Y &= -A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial x}\right), \\ Z &= -A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} (17) \qquad \left.\begin{aligned} L &= \Delta F_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x}, \\ M &= \Delta G_1 - \frac{\partial V_1}{\partial y}, \\ N &= \Delta H_1 - \frac{\partial V_1}{\partial z}, \end{aligned}\right\} (18)$$

hvarest

$$V_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}, \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

är en möjlig lösning, såvida

$$A^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} = \Delta F_1,\quad A^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} = \Delta G_1,\quad A^2\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} = \Delta H_1.$$

Äfven här kan anmärkas, att då F_1, G_1, H_1 äro oberoende af t, de magnetiska krafterna hafva en potential V_1, och de

elektriska äro noll. Liksom i föregående fall (12) och (13), hafva emellertid krafterna äfven i andra fall en potential. För de magnetiska krafterna är detta fallet, om det finnes en funktion T sådan, att

$$A^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad A^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial y}, \quad A^2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial z}. \qquad (20)$$

Ekvationssystemet (20) är satisfieradt, om man antager

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad G_1 = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad H_1 = \frac{\partial U}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (21)$$

och

$$A^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U.$$

Det är klart, att en ny lösning erhålles, om man tager summan af motsvarande komposanter i (12) och (13) samt (17) och (18). Detta nya ekvationssystem innehåller då sex funktioner, hvilka äro fullkomligt arbiträra blott med det undantaget, att de alla måste satisfiera ekvation (6). Man erhåller sålunda:

$$\left.\begin{aligned} X &= \Delta F - \frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right), \\ Y &= \Delta G - \frac{\partial V}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial x}\right), \\ Z &= \Delta H - \frac{\partial V}{\partial z} - A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \Delta F_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x} + A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \\ M &= \Delta G_1 - \frac{\partial V_1}{\partial y} + A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\ N &= \Delta H_1 - \frac{\partial V_1}{\partial z} + A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

är en möjlig lösning till (1) *och* (2), *om hvar och en af de sex funktionerna* F, G, H, F_1, G_1, H_1 *satisfiera differentialekvationen*

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi$$

och

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}, \quad V_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}.$$

5. HERTZ tillämpade den af honom angifna lösningen i ett speciellt fall och antog dervid

$$\Pi = \frac{El}{r} \operatorname{Sin}(mr - nt), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

hvarest E är en elektricitetsmängd, l en längd, $m = \frac{2\pi}{\lambda}$ en reciprok längd, $n = \frac{2\pi}{T}$ en reciprok tid, samt $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Han visar, att detta motsvarar en vibrerande elektrisk dubbelpunkt, hvars axel faller utefter z-axeln och hvars moment varierar med perioden $\frac{1}{2}T$ mellan $+ El$ och $- El$. Kraftfördelningen föreställer alltså verkan af en rätlinig oscillation, som har den lilla längden l, och i hvars poler de fria elektricitetsmängderna $+ E$ och $- E$ vid maximum uppträda.

På samma funktionsform skall nu tillämpas ekvationssystemen (12) och (13), hvarvid vi antaga $F = G = H = \Pi$. Till en början anmärkes, att det i (24) angifna värdet på Π satisfierar (6), såvida $A^2 = \frac{m^2}{n^2} = \frac{T^2}{\lambda^2}$, utom i origo. För att erfara, hvilka elektriska företeelser i origo motsvara den gifna kraftfördelningen betrakta vi, i likhet med HERTZ, dess närmaste omgifning.

Införes beteckningen $\theta = mr - nt$, så är i allmänhet

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = - \frac{n^2 El \operatorname{Sin} \theta}{r}, \quad V = El \frac{(x+y+z)}{r} \left(\frac{m \operatorname{Cos} \theta}{r} - \frac{\operatorname{Sin} \theta}{r^2} \right),$$

$$X = - \frac{m^2 El \operatorname{Sin} \theta}{r} - \frac{\partial V}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Antages r försvinnandet litet i jämförelse med λ och nt, blir $\theta = - nt$, och de termer, som innehålla $\frac{1}{r}$ och $\frac{1}{r^2}$, kunna försummas i jämbredd med dem, som innehålla $\frac{1}{r^3}$. Vi få således

$$V = \frac{E \operatorname{Sin} nt \cdot l}{r^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{E \operatorname{Sin} nt \cdot l}{r^2} \cdot \frac{y}{r} + \frac{E \operatorname{Sin} nt \cdot l}{r^2} \cdot \frac{z}{r},$$

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Krafterna hafva således en potential, som härrör från tre elektriska vibrerande dubbelpunkter af nyssnämda slag, hvilkas axlar sammanfalla med koordinataxlarne; de äro omvändt proportionella med kuben på afståndet från trippel-svängningen.

På större afstånd från origo få uttrycken för kraftkomposanterna följande form.

Införas beteckningarne

$$R = \frac{m^2 El \operatorname{Sin} \theta}{r} \text{ och } S = \frac{m El \operatorname{Cos} \theta}{r^2} - \frac{El \operatorname{Sin} \theta}{r^3},$$

och observerar man, att

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} = \sqrt{3} \operatorname{Cos} \varphi, \text{ [1]}$$

hvarest φ är vinkeln mellan r och den räta linien $x = y = z$ d. v. s. trippelsvängningens symmetrilinie eller axel, så erhåller man

$$X = -(R + S) + (R + 3S) \sqrt{3} \cdot \operatorname{Cos} \varphi \cdot \frac{x}{r},$$

$$Y = -(R + S) + (R + 3S) \sqrt{3} \cdot \operatorname{Cos} \varphi \cdot \frac{y}{r},$$

$$Z = -(R + S) + (R + 3S) \sqrt{3} \cdot \operatorname{Cos} \varphi \cdot \frac{z}{r}.$$

De elektriska kraftkomposanterna bestå således af två delar, af hvilka de första, der x, y och z ej förekomma explicite, hafva resultaten $\sqrt{3}(R + S)$. Denna resultant är parallell med trippelsvängningens axel.

De andra delarne hafva resultanten $\sqrt{3}(R + 3S) \operatorname{Cos} \varphi$, och dess riktning sammanfaller med riktningen af r.

---

[1] På grund af denna relation kan man äfven skrifva $V = \frac{E \operatorname{Sin} nt \cdot l\sqrt{3}}{r^2} \cdot \operatorname{Cos} \varphi$ och uppfatta trippelsvängningen som en enda af längden $l\sqrt{3}$, hvilken svänger utefter axeln $x = y = z$.

I hvarje punkt af den sferiska vågen verka således två elektriska krafter, den ena parallell med trippelsvängningens axel och den andra i radiens riktning. Deras plan är ett meridianplan. Upplöses den första kraften i två komposanter $-\sqrt{3}(R+S)\operatorname{Cos}\varphi$ och $-\sqrt{3}(R+S)\operatorname{Sin}\varphi$ i radiens riktning och vinkelrätt mot densamma, så kommer den elektriska kraften i sin helhet att bestå af de båda komposanterna

$$2\sqrt{3}\,S\operatorname{Cos}\varphi \text{ och } -\sqrt{3}(R+S)\operatorname{Sin}\varphi.$$

Den förre representerar en longitudinalvåg, den senare en transversalvåg. I axelns riktning, der $\varphi = 0$, hafva vi således en ren longitudinalvåg, i ekvatorplanet, der $\varphi = 90°$, en ren transversalvåg. I mellanliggande punkter är longitudinalvågen desto mera och transversalvågen desto mindre utvecklad, ju närmare punkten ligger intill polen. Transversalsvängningarne för den elektriska kraften försiggå i meridianplanet. Då r är oändligt stor i förhållande till våglängden λ, försvinner S i jämbredd med R. Longitudinalvågen försvinner derföre mer och mer och den sferiska vågen närmar sig till att blifva en ren transversalvåg med mot polerna aftagande intensitet.

Det är en allmänt utbredd åsigt, att longitudinalsvängningar äro omöjliga enligt MAXWELL's teori. Föregående exempel visar emellertid, att sådana kunna förekomma, om de också här i allmänhet göra det i förening med transversalsvängningar. De bevis, som framställts, för att blott transversalsvängningar äro möjliga, äro sålunda icke allmängiltiga. Dylika longitudinalkomposanter äro äfven af HERTZ experimentelt påvisade och framgå äfven ur hans teori för den enkla rätliniga svängningen. Då han säger: [1]) »Stellen wir daher die Kraft für einen Punkt in üblicher Weise durch eine von dem betrachteten Punkt ausgehende Linie dar, so oscillirt der Endpunkt dieser Linie während der Schwingung nicht etwa in einer Geraden hin und her, sondern beschreibt eine Ellipse». Den är således sammansatt af en transversal- och en longitudinalkomposant med olika faser.

---

[1]) HERTZ: l. c. p. 10.

De magnetiska kraftkomposanterna antaga formen

$$L = P\left(\frac{y}{r} - \frac{z}{r}\right), \quad M = P\left(\frac{z}{r} - \frac{x}{r}\right), \quad N = P\left(\frac{x}{r} - \frac{y}{r}\right),$$

der

$$P = \frac{m^2 El \operatorname{Sin} \theta}{r} + \frac{Elm \operatorname{Cos} \theta}{r^2}.$$

Härur fås

$$L\frac{1}{\sqrt{3}} + M\frac{1}{\sqrt{3}} + N\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$L\frac{x}{r} + M\frac{y}{r} + N\frac{z}{r} = 0,$$

hvaraf följer, att den magnetiska kraften är vinkelrät dels mot trippelsvängningens axel dels mot r, alltså mot meridianplanet eller de elektriska krafternas svängningsplan. Den magnetiska kraften fortplantar sig således som en ren transversalvåg.

Då $L = P\left(\frac{y}{r} - \frac{z}{r}\right) = \sqrt{3}\, P\left(\frac{y}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{z}{r}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ etc., så inses, att om α, β, γ äro den magnetiska kraftens riktningskosiner, är

$$L = \sqrt{3} \cdot P \cdot \operatorname{Sin} \varphi \cdot \alpha, \quad M = \sqrt{3} \cdot P \cdot \operatorname{Sin} \varphi \cdot \beta, \quad N = \sqrt{3} \cdot P \cdot \operatorname{Sin} \varphi \cdot \gamma.$$

Häraf följer, att den magnetiska kraften har storleken

$$\sqrt{3} \cdot P \operatorname{Sin} \varphi.$$

Den magnetiska kraften är således störst i ekvatorplanet och aftager till noll i axelns riktning.

6. I det nyss behandlade exemplet hade de tre elektriska vibrationerna samma fas. Ville man behandla det fall, då de hafva olika faser, låter det sig lätt göra, men man får då använda ekvationssystemen (12) och (13) i sin allmänhet.

Använde man ekvationssystemet (16) på samma funktionsform Π, ekv. (24), så hade man att göra med en rätlinig magnetisk svängning, från hvilken den magnetiska kraften fortplantade sig som en ren transversalvåg i svängningens ekvatorplan och som en ren longitudinalvåg i axelns riktning. I mellanliggande

riktningar förekomma båda slagen af vibrationer. Den elektriska kraften åter fortplantar sig som en ren transversalvåg med mot axeln ända till noll aftagande intensitet.

7. Om de elektriska och de magnetiska företeelserna icke försiggå i den fria etern utan i en homogen isotrop oledare, så antaga grundekvationerna (1) och (2) formen

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{aligned}\right\}(1\,a) \qquad \left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned}\right\}(2\,a)$$

De införda konstanterna μ och ε äro positiva tal, μ mediets magnetiseringskonstant och ε dess dielektricitetskonstant.

De med (4) och (5) samt (15) och (16) analoga lösningarne äro:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial z}, \\ Y &= -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\,\partial z}, \\ Z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}, \end{aligned}\right\}(4\,a) \qquad \left.\begin{aligned} L &= A\varepsilon\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}, \\ M &= -A\varepsilon\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}, \\ N &= 0, \end{aligned}\right\}(5\,a)$$

hvarest

$$A^2\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta\Pi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6\,a)$$

och

$$\left.\begin{aligned} X &= -A\mu\frac{\partial^2 J}{\partial y \partial t}, \\ Y &= +A\mu\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial t}, \\ Z &= 0, \end{aligned}\right\}(15\,a) \qquad \left.\begin{aligned} L &= -\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial z}, \\ M &= -\frac{\partial^2 J}{\partial y \partial z}, \\ N &= \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2}, \end{aligned}\right\}(16\,a)$$

hvarest

$$A^2\mu\varepsilon\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = \Delta J.$$

De skilja sig således från de nyssnämda endast deruti, att i det första systemet uttrycken för de magnetiska kraftkomposanterna multiplicerats med ε och i det andra systemet uttrycken för de elektriska med μ samt att $A\sqrt{\mu\varepsilon}$ trädt i stället för A i den karakteristiska differentialekvationen.

Man kan derföre utan svårighet uppskrifva den lösning, som är analog med den allmännaste i det föregående angifna.

Vi få således, att

$$\left.\begin{aligned} X &= \Delta F - \frac{\partial V}{\partial x} - A\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right), \\ Y &= \Delta G - \frac{\partial V}{\partial y} - A\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial x}\right), \\ Z &= \Delta H - \frac{\partial V}{\partial z} - A\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \Delta F_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x} + A\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \\ M &= \Delta G_1 - \frac{\partial V_1}{\partial y} + A\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\ N &= \Delta H_1 - \frac{\partial V_1}{\partial z} + A\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

hvarest

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \text{ och } V_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}, \quad . \; . \; . \; . \; (27)$$

är en möjlig lösning till (1 *a*) *och* (2 *a*), *om hvar och en af de i öfrigt arbiträra funktionerna* F, G, H, F_1, G_1, H_1 *satisfiera differentialekvationen*

$$A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6\,a)$$

8. Den i (25) och (26) angifna lösningen utsäger naturligen ej något mera än ekvationerna (1 *a*) och (2 *a*). De sex af hvarandra oberoende kraftkomposanterna hafva blifvit uttryckta i sex funktioner, hvilka ej äro bundna genom andra villkor, än att de skola satisfiera samma differentialekvation som kraftkomposanterna sjelfva. Då de ursprungliga ekvationerna för tillämpningar i speciella fall stundom äro så godt som obruk-

bara, äro de i (25) och (26) angifna uttrycken af en sådan form, att tillämpningen lätt går för sig. Detta är deras stora företräde. Jag har i § 6 antydt några sådana tillämpningar, men åtskilliga andra erbjuda sig. Det torde emellertid vara lämpligare att behandla dessa i ett annat sammanhang.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. fr. sid. 388.)

Venezia. *R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.*
Atti. T. 54 (1895/96): Disp. 5—10; 55 (1896/97): 1—2. 8:o.
Memorie. Vol. 25: N:o 8. 1896. 4:o.

Washington. *U. S. Department of agriculture.*
Yearbook. 1896. 8:o.

Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Philos.-hist. Cl. Bd 44. 1896. 4:o.
» Math.-naturw. Cl. Bd 63. 1896. 4:o.
Sitzungsberichte. Philos.-hist. Cl. Bd 134—135. 1896—97. 8:o.
» Math. naturw. Cl. Abt. 1: Bd 105 (1896): 1—10. 8:o.
» » » » » 2a: Bd 105 (1896): 1—10. 8:o.
» » » » 2b: Bd 105 (1896): 1—10. 8:o.
» » » » 3: Bd 105 (1896): 1—10. 8:o.
Tabulæ codicum manu scriptorum. Vol. 9. 1897. 8:o.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd 83: H. 2. 1897. 8:o.
Fontes rerum Austriacarum. Abt. 2: Bd 49: H. 1. 1896. 8:o.
HUBER, A., Geschichte der Gründung und der Wirksamkeit der K. Akademie der Wissenschaften. 1897. 8:o.

Wiesbaden. *Nassauischer Verein für Naturkunde.*
Jahrbücher. Jahrg. 50 (1897). 8:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 8.
Stockholm.

Zu dem Probleme der Zurückführung ABELSCHER Integrale erster Gattung in elliptische.

Von FRANS DE BRUN.

[Mitgetheilt den 13 Oktober 1897 durch M. FALK.]

1. Eine der mehr interessanten Fragen der Theorie der algebraischen und ABELSCHEN Functionen dürfte ohne Zweifel die der Zurückführung eines ABELSCHEN Integrals erster Gattung zu einem Integrale niedrigeren Ranges, besonders zum elleptischen, sein. Das Problem ist auch von vielen Mathematikern behandelt worden, unter welchen wir JACOBI, WEIERSTRASS, KOWALEVSKY, PICARD und POINCARÉ nennen wollen, ohne doch als abgeschlossen angesehen werden zu können.

In der folgenden Abhandlung werde ich das Problem von rein functionentheoretischem Gesichtspunkte betrachten, und will ich eine allgemeine Methode zeigen, durch welche man, da ein ABELSCHES Integral erster Gattung vorliegt, entscheiden kann, ob dasselbe mittels rationalen Substitutionen in das elliptische Integral überzuführen möglich ist.

2. Wir nehmen an, dass das algebraische Gebilde des Ranges ϱ

$$f(xy) = 0 \tag{1}$$

durch die rationalen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R(xy)_{\lambda_0} \\ \eta &= R(xy)_{\mu_0} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

in ein Gebilde niedrigeren Ranges ϱ_0

$$\varphi(\xi\eta) = 0 \tag{3}$$

transformiert werden kann.

Weil die in (2) angegebenen Substitutionen nicht birational sind, entsprechen jeder Stelle $(\xi\eta)$, welche zu (3) gehört, am wenigsten zwei Stellen (xy) des Gebildes (1). Werden sie mit

$$(xy)\,,\ (x'y')\,,\ (x''y'')\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (x^{(r-1)}\,y^{(r-1)})$$

bezeichnet, haben wir

$$\left.\begin{array}{l} R(xy)_{\lambda_0} = R(x'y')_{\lambda_0} = R(x''y'')_{\lambda_0} = \ldots = R(x^{(r-1)}\,y^{(r-1)})_{\lambda_0} \\ R(xy)_{\mu_0} = R(x'y')_{\mu_0} = R(x''y'')_{\mu_0} = \ldots = R(x^{(r-1)}\,y^{(r-1)})_{\mu_0}\,. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Hieraus folgt, dass algebraische Substitutionen

$$\begin{array}{ll} x = F_{1\nu}(x^{(\nu)}\,y^{(\nu)}) & x^{(\nu)} = \overline{F}_{1\nu}(xy) \\ y = F_{2\nu}(x^{(\nu)}\,y^{(\nu)}) & y^{(\nu)} = \overline{F}_{2\nu}(xy) \end{array}$$
$$\nu = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ (r-1)$$

das Gebilde (1) in sich selbst überführen. Wenn $F_{1\nu}(x^{(\nu)}\,y^{(\nu)})$ und $F_{2\nu}(x^{(\nu)}\,y^{(\nu)})$ eindeutige sind, werden auch $\overline{F}_{1\nu}(xy)$ und $\overline{F}_{2\nu}(xy)$ eindeutige Functionen. In diesem Falle ist die Substitution birational.

Damit ein Abelsches Integral erster Gattung wenigere unabhängige Perioden als 2ϱ haben soll, ist durchaus erforderlich, dass das algebraische Gebilde in sich selbst übergeht, wenn man eine angemessene, bialgebraische (oder birationale) Substitution macht. Weiter muss das Integral für diese Substitution invariant sein.

3. Jede algebraische Gleichung kann in gewisse Normalcurven oder Normalformen transformiert werden, welche dadurch karakterisiert sind, dass die Umgebung der Stelle $(\infty\infty)$ durch ein einziges Paar der Functionenelemente dargestellt werden kann, dass gegen jeden in begränztem Gebiete gelegenen Werth des einen Veränderlichen entsprechen nur in begränztem Gebiete gelegene Werthe des anderen, dass die beiden Ordnungen der Veränderlichen relative Primzahlen sind, und dass die Ordnungszahl des einen Veränderlichen den Rang nicht übergeht. Einen

strengen Beweis für die Möglichkeit der Transformation in diese Weierstrassischen Normalformen habe ich in meiner Abhandlung »Till teorien för algebraiska funktioner», K. V. A. Ö. 1896 gegeben. Wir nehmen nun an, dass alle unsere algebraischen Gleichungen solche Normalcurven sind.

4. Anfänglich werden wir weiter annehmen, dass r gleich zwei ist, welcher der einfachste Fall.

Die Functionen $R(xy)_{\lambda_0}$ und $R(xy)_{\mu_0}$ sind dann unendliche nur in den beiden Stellen $(\infty\infty)$ und (ab) $(\neq(\infty\infty))$ und in jeder von den Ordnungen λ_0 und μ_0 resp.; die Entwicklungen in den Umgebungen sind identisch.

Jedem Werthpaare (xy) entspricht *ein* Werthpaar $(\xi\eta)$. Gegen $(\xi\eta)$ entsprechen wieder zwei Werthe der Stelle (xy), nämlich (xy) und $(x'y')$. Also jedem Werthpaare (xy) entspricht *ein* einziges Werthpaar $(x'y')$ d. i. *unsere Gleichung* (1) *übergeht durch eine birationale Substitution in sich selbst.*

In dem ersteren Theile dieser Abhandlung werden wir den Fall behandeln, dass das Gebilde eine birationale Substitution zulässt.

5. Sei

$$f(xy) = 0$$

eine Weierstrassische Normalcurve ϱ:ten Ranges, welche in sich selbst übergeht, wenn man die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x' &= R(xy\,;\ ab)_\lambda \\ y' &= R(xy\,;\ ab)_\mu \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

macht, wo $R(xy;\ ab)_\varkappa$ eine rationale Function des Grades $\varkappa$ von dem Werthpaare (xy), welche als einzige Unendlichkeitsstelle die in begränztem Gebiete belegene Stelle (ab) hat.

Falls die Gleichung (1) nur eine Substitution (6) zulässt, d. i. falls es nur eine solche Stelle (ab) giebt, dass man rationale Functionen der Grade λ und μ bilden kann, welche nur in dieser Stelle unendlich werden, muss man

$$\left.\begin{aligned} x'' &= R(x'y'\,;\ ab)_\lambda = x \\ y'' &= R(x'y'\,;\ ab)_\mu = y \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

haben.

Wenn dagegen mehrere solche Centra der Transformation existieren, versteht sich, dass $(x''y'')$ mit (xy) nicht zusammenfallen darf. Man findet eine Gruppe von Substitutionen, für welche (1) ungeändert ist.

Auch giebt es Gleichungen, die eine Gruppe ganzer Substitutionen (solcher, die $(ab) = (\infty\infty)$ haben) zulassen.

6. Wir fangen mit der Behandlung des Falles an, dass (1) ein einziges Substitutionenpaar (6) zulässt. Man kann dann zwei invariante rationale Functionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R(xy)_{\lambda_0} \\ \eta &= R(xy)_{\mu_0} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

bilden, die nur $(\infty\infty)$ und (ab) als Unendlichkeitsstellen haben. Jede Unendlichkeitsstelle soll von der Ordnung λ_0 und μ_0 resp. sein. Die Entwicklungen in den Umgebungen derselben müssen identisch sein. Weiter werden wir von λ_0 und μ_0 annehmen, dass sie relative Primzahlen sind, dass $2\lambda_0$ die niedrigste Zahl, die möglich ist, und dass $2\mu_0$ die nächste, mögliche, gerade Zahl ist.

Durch die Substitution (8) geht (1) über in eine andere Normalcurve

$$\varphi(\xi\eta) = 0\,, \quad (9)$$

die niedrigeren Rang hat.

Jeder Stelle $(\xi\eta)$ entsprechen zwei Stellen (xy) und $(x'y')$. Hieraus folgt, dass jede rationale Function von (xy), die (6) zulässt, eine rationale Function von $(\xi\eta)$ ist.

7. Wenn wir in den ABELSCHEN Integralen erster Gattung

$$u_1\,,\ u_2\ \ldots\ u_\varrho$$

die Substitutionen (6) machen, übergehen dieselben in neue Integrale erster Gattung

$$u'_1\,,\ u'_2\ \ldots\ u'_\varrho\,.$$

Von diesen können wir — was HURWITZ als möglich bewiesen — ganze lineare Ausdrücke

$$\begin{aligned} &\omega_1\,,\ \omega_2\ \ldots\ \omega_\varrho \\ &\omega'_1\,,\ \omega'_2\ \ldots\ \omega'_\varrho \end{aligned}$$

darstellen, unter welchen wir die Relationen

$$\left. \begin{aligned} d\omega'_\alpha &= \varepsilon_\alpha \, d\omega_\alpha \\ \varepsilon_\alpha^2 &= +1 , \quad \alpha = 1, 2 \ldots \varrho \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

haben. Alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varrho$ in (10) können nicht gleich -1 sein, falls nicht die neue Gleichung (9) den Rang 0 hat. Wenn ϱ_0 von den $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varrho$ gleich $+1$, und die übrigen gleich -1 sind, ist der Rang ϱ_0, und die Anzahl der unabhängigen Perioden $2\varrho_0$. Um deshalb zu untersuchen, ob ein ABELSCHES Integral erster Gattung zwei unabhängige Perioden hat, hat man nur die ϱ Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varrho$ zu bilden, und ob *ein* von $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\varrho$ gleich $+1$, die übrigen gleich -1 sind, zu beobachten. Da indessen diese Methode sehr mühsam ist, wenn die Gleichungen nicht hyperelliptisch sind, will ich hier, um die wichtige Frage beantworten zu können, einen anderen Weg einschlagen, mit dem ausserdem der Vorzug verknüpft ist, dass er uns unmittelbar die Substitutionen (8) giebt.

Es sei

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= +1 \\ \varepsilon_{1+\alpha} &= -1 , \quad \alpha = 1, 2, \ldots (\varrho - 1) . \end{aligned}$$

Wenn wir in ω_1 die Substitutionen (8) machen, werden wir

$$d\omega_1 = d\xi \psi_1(\xi\eta) \, \psi_2(xy)$$

erhalten; hier bezeichnen ψ_1 und ψ_2 rationale Functionen von den Veränderlichen. Da nun das Membrum, sowohl an der rechten, wie an der linken Seite, für (6) invariant ist, muss $\psi_2(xy)$ eine rationale Function sein. Hieraus geht hervor, dass

$$d\omega_1 = H_1(\xi\eta) \, d\xi ,$$

falls wir mit $\int H_1(\xi\eta) \, d\xi$ ein ABELSCHES Integral erster Gattung der Gleichung (3) bezeichnen.

8. Diese Gleichung (3) ist des ersten Ranges, wenn

$$\lambda_0 = 2 , \quad \mu_0 = 3$$

ist. Unsere nächste Aufgabe ist daher die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen man rationale Functionen des vierten und sexten Grades bilden kann, die unendlich nur in $(\infty\infty)$ und (ab) werden und in den Umgebungen der Stellen $(\infty\infty)$ und (ab) identische Entwicklungen haben. Diese Untersuchung ausführlich für jede Normalcurve durchzuführen und die Resultate in besonderen Tabellen mitzutheilen, würde zu mühsam sein in Verhältniss zum kleinen Nutzen, den sie bringt. Um indessen zu zeigen, wie eine solche Analyse durchgeführt werden kann, will ich die Frage untersuchen unter der Annahme, dass die Normalcurve (1) λ gleich drei hat, welcher Fall der nächste ist nach dem der hyperelliptischen Gleichungen, welche ich vorher behandelt habe. (»Om invarianta hyperelliptiska likheter», K. V. A. Ö. 1897).

Die existierenden Singularitäten

$$(\alpha_1\beta_1),\ (\alpha_2\beta_2)\ .\ .\ .\ (\alpha_N\beta_N)$$

nehmen wir der Einfachheit halber an, gewöhnliche Doppelpunkte zu sein. Die Umgebungen derselben sind durch

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_\nu + t \\ y &= \beta_\nu + t\mathfrak{P}_{\nu\mu}(t) \\ \mu &= 1,\ 2;\ \nu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ N \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

dargestellt. In der Umgebung der $(\infty\infty)$ sind

$$\left.\begin{aligned} x &= t^{-\lambda} \\ y &= t^{-\mu}[c_0 + t\mathfrak{P}(t)],\ c_0 \neq 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Weil die Gleichung für (6) invariant ist, findet man ohne weiteres

$$\eta = x + x' = x + R(xy;\ ab)_3\,. \quad (13)$$

Nehmen wir an, dass wir in der Umgebung der Stelle (ab)

$$\left.\begin{aligned} x &= a + t \\ y &= b + t\mathfrak{P}(t) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

haben, ist

$$\xi = (x - a)(x' - a) = (x - a)[R(xy;\ ab)_3 - a]\,. \quad (15)$$

Sobald eine Normalcurve dritter Ordnung unter den gemachten Voraussetzungen für birationale Substitutionen invariant ist, kann sie auch durch rationale Substitutionen in die Normalcurve des Ranges 1 (oder 0) übergeführt werden.

9. Um die Bedingungen der Transformation zu erhalten, setzen wir

$$\xi = R(xy)_2 = \frac{y^2 \overset{f_1}{F_1(x)} + y\overset{f_2}{F_2(x)} + \overset{f_3}{F_3(x)}}{(x-a)^2 \prod\limits_{\nu=1}^{N}(x-\alpha_\nu)}, \tag{16}$$

wo $F_1(x)$, $F_2(x)$ und $F_3(x)$ ganze rationale Functionen von x des Grades f_1, f_2 und f_3 resp. sind. Diese Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$ und $F_3(x)$ werden wir erstens so bestimmen, dass $R(xy)_2$ nur in $(\infty\infty)$ und (ab) unendlich wird und in diesen beiden Stellen von zweiter Ordnung. Dann müssen wir

$$6 + 3N - 2\mu - 3f_1 + 2 \geqq 0$$
$$6 + 3N - \mu - 3f_2 + 2 \geqq 0$$
$$6 + 3N - 3f_3 + 2 \geqq 0$$

haben.

Nach der Formel (15) meiner Abhandlung »Bidrag till WEIERSTRASS' teori för algebraiska funktioner», Upsala 1895 (im Folgenden mit B. citiert) ist

$$\left.\begin{aligned} \mu - 1 &= N + \varrho, \\ \therefore f_1 &\leqq 2 + \frac{N}{3} - \frac{2\varrho}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Da

$$f_1 \geqq 0,$$

muss folglich

$$2 + \frac{N}{3} \geqq \frac{2\varrho}{3}.$$

Nach den Formeln B. (78)—(83) ist

$$N \leqq \frac{\varrho}{2}$$

Also haben wir

$$\varrho \leqq 4 . \tag{18}$$

Die Fälle, die wir zu betrachten haben, sind mithin

$$
\begin{aligned}
&1{:}o)\ \varrho = 3, \quad N = 0, \quad \mu = 4;\\
&2{:}o)\ \varrho = 3, \quad N = 1, \quad \mu = 5;\\
&3{:}o)\ \varrho = 4, \quad N = 2, \quad \mu = 7.
\end{aligned}
$$

10. Die verschiedenen Gebilde darzustellen ist nun übrig. Man findet gleich, dass der erste Fall ausgeschlossen werden muss, weil man theils (nach B. pag. 42 und folgenden) nicht

$$x' - a = \frac{z_5}{z_6}$$

haben kann (wenn z_x eine ganze algebraische Function der $x$ten Ordnung bezeichnet) da eine Function fünften Grades, welche eine einzige Unendlichkeitsstelle hat, zu bilden unmöglich ist, theils

$$x' - a = \frac{x}{y}$$

in der Umgebung der Stelle $(xy) = (\infty\infty)$

$$
\begin{aligned}
x' &= a + t^2\\
y' &= t^3 \mathfrak{p}(t)
\end{aligned}
$$

giebt, was gegen die Voraussetzung, dass a ein regulärer Werth ist, streitet.

11. Dagegen führen

$$\varrho = 3, \quad N = 1, \quad \mu = 5$$

zu der Curve

$$y^3 + P_1(x) y^2 + P_2(x) y + x^2 P_3(\overset{3}{x}) = 0, \tag{19}$$

wenn wir

$$(a, b) = (0, 0)$$

setzen und in ihrer Umgebung

$$\left.\begin{aligned} x &= t\\ y &= t^2 \mathfrak{p}(t) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

haben. Weiter sei $(\alpha\beta)$ die Doppelstelle der Gleichung, woraus folgt, dass

$$\left.\begin{array}{l} 3\beta^2 + 2\beta P_1(\alpha) + P_2(\alpha) = 0 \\ P'_1(\alpha)\beta^2 + P'_2(\alpha)\beta + 2\alpha P_3(\alpha) + \alpha^2 P'_3(\alpha) = 0 \\ \beta^3 + P_1(\alpha)\beta^2 + P_2(\alpha)\beta + \alpha^2 P_3(\alpha) = 0\,. \end{array}\right\} \quad (21)$$

Die Gleichung (19) ist für eine birationale Substitution invariant, wenn man rationale Functionen dritten und vierten Grades, welche die einzige Unendlichkeitsstelle (00) haben, bilden kann.

Wir setzen

$$x' = \frac{(y-\beta)(y-\beta') + (x-\alpha)[Ay + \overset{2}{H}(x)]}{xy(x-\alpha)},$$

wo die ganze rationale Function $H(x)$ von

$$\beta\beta' + (a_\nu - \alpha)\, H(a_\nu) = 0 \qquad \nu = 1, 2, 3$$

bestimmt wird. Mit β' meinen wir den Werth ausser β, welchen y für x gleich α annimmt, mit a_1, a_2, a_3 die drei Nullstellen der Function $P_3(x)$, und mit b' und b'' den Werth ausser Null, welchen y für x gleich Null annimmt.

Weil $(0b')$, $(0b'')$ nicht Unendlichkeitsstellen sind, haben wir

$$\alpha A = P_1(\alpha) + \beta - P_1(0)\,,$$
$$\beta\beta' - \alpha H(0) = P_2(0)\,.$$

Von allen diesen Formeln finden wir

$$x' = \frac{(y-\beta)(y-\beta') + \frac{P_1(\alpha)+\beta-P_1(0)}{\alpha}(x-\alpha)y + (x-\alpha)H(x)}{xy(x-\alpha)}, \quad (22)$$

wenn wir

$$\left.\begin{array}{l} H(x) = \dfrac{\beta\beta'}{\alpha - a_1} + \dfrac{\beta\beta'}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}(x-a_1) + \\ \qquad + \dfrac{\beta\beta'}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)}(x-a_1)(x-a_2) \end{array}\right\} (22^*)$$

setzen.

Auf denselben Weg bekommen wir

$$z = \frac{(y'-\beta)(y'-\beta') + \frac{P_1(\alpha)+\beta-P_1(0)}{\alpha}(x'-\alpha)y' + (x'-\alpha')H(x')}{x'y'(x'-\alpha)}. \quad (23)$$

Diese beiden geben

$$y' = R(xy)_4 .$$

Da das Rechnen in diesem Falle sehr compliciert ist, werden wir von der Darstellung des invarianten Integrals abstehen, und uns damit begnügen, hier unten die allgemeine Methode mitzuteilen, welche wir statt dessen in den anderen Fällen, wo die Resultate leicht erlangt werden können, anwenden wollen.

Die Annahme, dass die Umgebung der (00) sich durch

$$x = t$$
$$y = t^p \mathfrak{P}(t)$$
$$p = 3,\ 4,\ 5$$

darstellen lässt, führt zu keiner invarianten Gleichung.

12. Wir betrachten nun die lezte Möglichkeit

$$\lambda = 3,\ \varrho = 4,\ N = 2,\ \mu = 7,$$

$$\because\ y^3 + y^2 P_1(x) + y P_2(x) + x^3 P_3(x) = 0\,, \tag{24}$$

welche Normalcurve die beiden Doppelstellen $(\alpha_1 \beta_1)$, $(\alpha_2 \beta_2)$ hat. Die Coefficienten der Functionen $P_x(x)$ sind den Bedingungen

$$\beta_\nu^3 + \beta_\nu^2 P_1(\alpha_\nu) + \beta P_2(\alpha_\nu) + \alpha_\nu^3 P_3(\alpha_\nu) = 0$$
$$3\beta_\nu^2 + 2\beta_\nu P_1(\alpha_\nu) + P_2(\alpha_\nu) = 0$$
$$\beta_\nu^2 P'_1(\alpha_\nu) + \beta_\nu P'_2(\alpha_\nu) + \alpha_\nu^3 P'_3(\alpha_\nu) + 3\alpha_\nu^2 P_3(\alpha_\nu) = 0$$

unterworfen.

Nach B pag. 42 muss

$$x' = \frac{z_6}{z_7}\,,$$

$$\because\ x' = \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{y}\,. \tag{25}$$

In der Umgebung der (00) sind

$$x = t$$
$$y = t^3(c_0 + t\mathfrak{P}(t))\,,\ c_0 \neq 0\,.$$

Da wir in den Umgebungen der Stellen $(\alpha_\nu \beta_\nu)$

$$x = \alpha_\nu + t$$
$$y = \beta_\nu + t\mathfrak{P}_{\nu\mu}(t)$$
$$\nu = 1, 2 \ldots N; \ \mu = 1, 2$$

haben, wird

$$P_3(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 ,$$
$$\therefore \ x' = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{y},$$
$$\therefore \ x = \frac{(x' - \alpha_1)(x' - \alpha_2)}{y'},$$
$$\therefore \ y' = \frac{(x' - \alpha_1)(x' - \alpha_2)}{x}.$$

Die Gleichung bleibt folglich ungeändert für

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{y} \\ y' &= \frac{1}{x}\cdot\left[\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{y} - \alpha_1\right]\cdot\left[\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{y} - \alpha_2\right], \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

und die rationalen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{y} \\ \eta &= x + \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{y} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

überführen die Gleichung in eine des ersten Ranges.

Das invariante ABELSCHE Integral werden wir in folgender Weise erhalten. Da jedes solches Integral geschrieben werden kann

$$\int \frac{\psi(xy)\,dx}{f_2(xy)} = \int \frac{\psi(xy)\,dx'}{X(x'y')\,f_2(x'y')\,\frac{\partial(x'y')}{\partial(xy)}}, \quad (27)$$

wo $\psi(xy)$ eine ganze rationale Function der (xy), und

$$X(x'y') = \frac{f(xy)}{f(x'y')}, \quad (28)$$

bekommen wir

$$\psi(x'y') = \frac{\psi(xy)}{X(x'y')\,\frac{\partial(x'y')}{\partial(xy)}}. \tag{29}$$

Hier haben wir

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{2x - \alpha_1 - \alpha_2}{y}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{x'}{y},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{(2x - \alpha_1 - \alpha_2)(2x' - \alpha_1 - \alpha_2)}{xy} - \frac{y'}{x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{2x' - \alpha_1 - \alpha_2}{xy}\,x',$$

$$\therefore \frac{\partial(x'y')}{\partial(xy)} = -\frac{x'y'}{xy}.$$

Weiter ist

$$X(x'y') = \frac{xy^2}{x'y'^2}.$$

Wir werden also $\psi(xy)$ durch die Gleichung

$$\frac{\psi(xy)}{y} = -\frac{\psi(x'y')}{y'}.$$

bestimmen.

Weil

$$\psi(xy) = y\overset{1}{\varphi}(x) + \overset{3}{\psi}(x),$$

muss man nach dieser Formel

$$\psi(xy) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) - xy \tag{30}$$

haben.

Das invariante Abelsche Integral ist

$$\int \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) - xy}{f_2(xy)}\,dx. \tag{31}$$

13. Wir haben bisher

$$x = a + t$$
$$y = b + t\mathfrak{P}(t)$$

angenommen. Die nächste Möglichkeit

$$x = a + t^2$$
$$y = b + t\mathfrak{P}(t)$$

leitet zu keinem neuen Falle. Wenn wir dagegen annehmen, dass die Umgebung der Stelle (ab) durch

$$x = a + t^3$$
$$y = b + t\mathfrak{p}(t)$$

sich darstellen lässt, finden wir noch eine Gleichung, welche invariant ist.

Wir transformieren so, dass

$$a = b = 0$$

und setzen

$$\xi = \frac{y^2F_1(x) + yF_2(x) + xF_3(x)}{x\prod_{\nu=1}^{N}(x - \alpha_\nu)}. \tag{32}$$

Falls

$$N > 0,$$

muss

$$3N + 3 - 2\mu + 2 \geqq 0,$$
$$\therefore\ N + 3 \geqq 2\varrho .$$

Aber da

$$N \leqq \frac{\varrho}{2},$$

wird

$$N \leqq 1,\ \therefore N = 1,$$
$$\therefore\ \varrho \leqq 2 .$$

Also in diesem Falle nichts neues.

Wenn dagegen keine singuläre Stellen existieren d. i. wenn

$$N = 0$$

ist, finden wir, dass in dem Falle μ gleich 5

$$\xi = \frac{y}{x} \tag{33}$$

keine andere Unenendlichkeitsstellen hat, als (00 und ($\infty\infty$).

14. Diese Gleichung ist die Normalcurve des vierten Ranges und der zweiten Kategorie

$$y_3 + y^2xP_1(x) + yxP_2(x) + xP_3(\overset{4}{x}) = 0. \tag{34}$$

Weil

$$\xi = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

ist, ist die Gleichung für

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{k}{x} \\ y' &= k \cdot \frac{y}{x^2}, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

wo k eine Constante bezeichnet, invariant.

Die rationalen Functionen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{y}{x} \\ \eta &= x + \frac{k}{x} \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

führen die Normalcurve über in eine neue solche Curve, aber in eine des ersten Ranges.

Da das Rechnen hier sehr einfach ist, wollen wir den Fall näher ausführen. Die Bedingungen, unter welchen die Gleichung invariant ist, sind

$$P_1\left(\frac{k}{x}\right) = P_1(x)$$

$$\frac{x^2}{k} P_2\left(\frac{k}{x}\right) = P_2(x)$$

$$\frac{x^4}{k^2} P_3\left(\frac{k}{x}\right) = P_3(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \because\; P_1(x) &= p_{10} \\ P_2(x) &= p_{20} + p_{21}x + \frac{p_{20}}{k}x^2 \\ P_3(x) &= p_{30} + p_{31}x + p_{32}x^2 + \frac{p_{31}}{k}x^3 + \frac{p_{30}}{k^2}x^4, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

wo $p_{\mu\nu}$ arbiträre Constanten sind.

Durch die Substitution (36) geht unsere Gleichung über in

$$\eta^2 + \eta \cdot \frac{p_{22}\xi + p_{31}}{p_{30}} + \frac{\xi^2 + p_{21}\xi + p_{10} - 2kp_{30} + p_{32}}{p_{30}} = 0. \quad (38)$$

Die Integrale erster Gattung sind von der Form

$$\int \frac{Ay + G(x)}{3y^2 + 2xyP_1(x) + xP_2(x)}\,dx = -\int \frac{Ay' + G\left(\frac{x'}{k}\right)\frac{x'^2}{k}}{3y'^2 + 2x'y'P_1(x') + x'P_2(x')}\,dx',$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Function ist.

Setzen wir

$$G(x) = -\frac{x^2}{k}\,G\left(\frac{k}{x}\right),$$

erhält man

$$G(x) = g_0 - \frac{g_0}{k}\,x^2$$

wo g_0 eine arbiträre Constante bezeichnet.

Das invariante Integral ist folglich

$$\int \frac{k - x^2}{3y^2 + 2xyP_1(x) + xP_2(x)}\,dx\,. \tag{39}$$

Aus

$$\eta = x + \frac{k}{x},$$

$$\because\ d\eta = \left(1 - \frac{k}{x^2}\right)dx$$

haben wir

$$\frac{k - x^2}{3y^2 + 2xyP_1(x) + xP_2(x)}\,dx = -\frac{d\eta}{3\xi^2 + 2p_{10}\xi + p_{21} + \frac{p_{20}}{k}\cdot\eta}\,. \tag{40}$$

In derselben Weise wie wir hier die Curven dritter Ordnung untersucht haben, können wir Gleichungen höherer Ordnungen behandeln. Wenn auch das Rechnen mehr verwickelt wird, ist der Unterschied doch unwesentlich.

15. Weiter ist deutlich, dass man, dieselbe Methode folgend, die Bedingungen erhalten kann, unter welchen ein oder mehrere ABELSCHE Integrale erster Gattung einer Curve sich mittels solchen Integralen niedrigeren Ranges darstellen lassen.

Wenn wir fragen, wann die hyperelliptische Gleichung

$$y^2 = x(x-1)(x-c_1)\ldots\left(x - \frac{c_1}{c_\varrho}\right) \tag{41}$$

welche für

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{c_1}{x} \\ y' &= \frac{c_1^{\frac{\varrho+1}{2}}}{x^{\varrho+1}} \cdot y \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

invariant ist, durch gebrochene rationale Substitutionen in eine andere des zweiten Ranges sich transformieren kann, erhalten wir, wenn man in der Umgebung der Stelle (00)

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t\mathfrak{P}(t) \end{aligned}$$

hat, dass

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + x' \\ \eta &= \frac{yF(x)}{x^2} \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

und also

$$\varrho \leqq 4 .$$

16. Betrachten wir

$$y^3 + 3P(x)y + \overset{\mu}{Q(x)} = 0 \quad (44)$$

und suchen die Bedingungen, unter welchen diese in eine neue Gleichung zweiten oder dritten Ranges sich transformieren lässt, finden wir, dass die gewöhnlichen Voraussetzungen in der Umgebung (00)

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t\mathfrak{P}(t) , \end{aligned}$$

nicht taugen (weil in diesem Falle der Rang $\varrho_0 = 1$).

Wir müssen annehmen, dass

$$\begin{aligned} x &= t^3 \\ y &= t\mathfrak{P}(t) . \end{aligned}$$

Der Rang ϱ_0 kann nicht zwei sein. Die Gleichung kann in die Normalcurve dritten Ranges, welche keine Singularitäten hat, übergeführt werden, wenn, wie wir leicht finden,

$$\varrho \leqq 5 . \quad (45)$$

u. s. w.

17. Wir gehen nun dazu über, den Fall zu betrachten, dass die Gleichung für mehrere gebrochene Substitutionenpaare invariant ist, d. h. dass mehrere in begränztem Gebiete gelegene Stellen (ab) der im voraus gegebenen Bedeutung existieren. Es ergiebt sich, dass man dann neue invariante Functionen ξ und η, welche das invariante ABELSCHE Integral in das elliptische reducieren, finden kann.

Betrachte z. B. die Gleichung fünften Ranges

$$y^2 = x\prod_{\nu=1}^{5}(x-c_\nu)\cdot\prod_{\nu=1}^{5}\left(x-\frac{c_1}{c_\nu}\right). \tag{46}$$

Sie lässt — wie wir wissen — die Transformation

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{c_1}{x} \\ y' &= \frac{c_1^{3/2}}{x^3}\,y \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

zu, und geht daher durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{c_2}{(c_1-c_2)(1-c_2)}\cdot\frac{(x-1)(x-c_1)}{x} \\ \eta &= \left[\frac{c_2}{(c_1-c_2)(1-c_2)}\right]^{5/2}\cdot\frac{y}{x^3} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

in die neue hyperelliptische Gleichung

$$\eta^2 = \xi(\xi-1)\cdot\prod_{\nu=1}^{3}(\xi-e_\nu) \tag{49}$$

über, wo

$$e_\nu = \frac{(1-c_{\nu+2})(c_1-c_{\nu+2})\,c_2}{(1-c_2)(c_1-c_2)\,c_{\nu+2}}, \qquad \nu=1,2,3. \tag{50}$$

Diese Gleichung wieder ist invariant für

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{e_1}{\xi} \\ \eta' &= \frac{e_1^{3/2}}{\xi^3}\cdot\eta\,, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

wenn wir

$$e_1 = e_2e_3 \tag{52}$$

haben. Sie geht durch

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{(\xi - 1)(\xi - e_1)}{\xi} \\ \bar{\eta} &= \frac{\eta(\xi + \sqrt{e_1})}{\xi^2} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

in die elliptische Gleichung über.

Man findet, wenn k eine Constante bezeichnet,

$$\bar{\xi} = k \cdot \frac{(x - c_2)\left(x - \frac{c_1}{c_2}\right)(x - c_3)\left(x - \frac{c_1}{c_3}\right)}{x(x-1)(x-c_1)}, \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} \because \frac{(x' - c_2)\left(x' - \frac{c_1}{c_2}\right)(x' - c_3)\left(x' - \frac{c_1}{c_3}\right)}{x'(x'-1)(x'-c_1)} &= \\ = \frac{(x - c_2)\left(x - \frac{c_1}{c_2}\right)(x - c_3)\left(x - \frac{c_1}{c_3}\right)}{x(x-1)(x-c_1)}&. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Ausser

$$x'_1 = x$$

$$x' = x + \frac{c_1}{x},$$

welche (55) genügen, existieren zwei Lösungen x'' und x''', die der Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{(u-1)(u-c_1)}{u} \cdot \frac{(x-1)(x-c_1)}{x} &= \\ = \frac{(c_1 - c_2)(1 - c_2)}{c_2} \frac{(c_1 - c_3)(1 - c_3)}{c_3} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

genügen. Die Substitution, im allgemeinen bialgebraisch, wird birational, falls wir

$$u = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{57}$$

haben können. In solchem Falle finden wir die Gleichung (46) invariant für

$$x'' = \frac{c_1 x - c_1}{x - c_1}, \tag{58}$$

wenn die Bedingungen der Constanten $c_1 c_2 \ldots c_5$

$$\frac{c_1 - c_2}{1 - c_2} = c_3 \qquad \frac{c_1 - c_4}{1 - c_4} = c_5 \tag{59}$$

sind.

Da die Gleichung sowohl die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{c_1}{x} \\ y' &= \frac{c_1^3}{x^6} \end{aligned}\right| \tag{60}$$

als

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{c_1 x - c_1}{x - c_1} \\ y'' &= \bar{k} \cdot \frac{y}{(x - c_1)^6}, \end{aligned}\right| \tag{61}$$

wo $\bar{k}$ eine gewisse Constante ist, zulässt, muss sie auch für

$$\left.\begin{aligned} x''' &= \frac{x - c_1}{x - 1} \\ y''' &= \frac{\bar{k}}{c_1^3} \cdot \frac{y}{(x - 1)^6} \end{aligned}\right| \tag{62}$$

invariant sein.

Es ist also möglich, dass dieselbe Gleichung durch eine Substitution in eine Gleichung ϱ_0:ten Ranges, durch eine andere Substitution in eine ϱ'_0:ten Ranges ($\varrho'_0 \mp \varrho_0$) übergeht. Um die Gleichungen zu bestimmen, welche in die elliptische Normalcurve sich transformieren lassen, bilden wir die beiden rationalen invarianten Functionen des Werthpaares (xy).

18. Falls wir z. B. untersuchen wollen, ob die hyperelliptische Gleichung

$$y^2 = x(x - 1)(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_{2\varrho - 1}) \equiv \prod_{\nu=1}^{2\varrho+1} (x - c_\nu) \tag{63}$$

(welche wir nur für *rationale* Substitutionen mit invarianten Integrale invariant zu sein annehmen) sich in die elliptische überführen lässt, müssen wir zuerst die rationalen Functionen zu bilden suchen. Die Centra der Transformation sind unter

$$(00), (10), (c_1 \cdot 0) \ldots (c_{2\varrho} 0)$$

zu nehmen.

Da eine Function ersten Grades darzustellen nicht möglich ist, muss man

$$p \leqq \varrho - 1$$

haben. Die beiden rationalen Functionen sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{F(\overset{f}{x})}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(x - c_\nu)} \\ \eta &= \frac{yG(\overset{g}{x})}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(x - c_\nu)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Die höchsten Exponenten f und g werden durch

$$2p - 2f + 2 = 0$$

$$4p - 2\varrho - 1 - 2g + 3 = 0\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \because\ f &= p + 1 \\ g &= 2p - \varrho + 1\,, \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

bestimmt. Also muss

$$\varrho - 1 \geqq p \geqq \frac{\varrho - 1}{2}\,. \quad (66)$$

Weiter ist die Gleichung (46) für

$$\left.\begin{aligned} x' - c_\alpha &= \frac{k_{1\alpha}}{x - c_\alpha} \\ y' &= \frac{k_{2\alpha}}{(x - c_\alpha)^{\varrho+1}}\cdot y \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

invariant, wenn

$$\left.\begin{aligned} (c_{\mu'} - c_\alpha)(c_\mu - c_\alpha) &= k_{1\alpha} \\ \mu,\ \mu' &= 1,\ 2, \ldots (2\varrho + 1)\,, \\ \alpha &= 1,\ 2, \ldots p\,, \\ \mu \neq \mu'\,,\ \mu &\neq \alpha\,,\ \mu' \neq \alpha\,. \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

19. Hieraus geht hervor, wie man unter den gemachten Voraussetzungen sich benehmen muss, um eine Normalcurve jeder Ordnung und jeden Ranges zu untersuchen, ob sie in die Curve ersten Ranges transformiert werden kann.

Die Transformationen, mit welchen wir bisjetzt zu thun gehabt haben, sind gebrochen gewesen. Dies hat wesentlich die Untersuchung vereinfacht, weil man weiss, dass die Substitution S, welche die Normalcurve zulässt, seiner umgekehrten S^{-1} gleich ist.

20. Wir kommen jetzt zu den Normalformen, welche *ganze*, rationale Substitutionen zulassen.

Wir denken uns die Gleichung unter der Gestalt geschrieben

$$\bar{y}^\lambda + \bar{P}_2(\bar{x})\bar{y}^{\lambda-2} + \ldots + \bar{P}_\lambda(\overset{\mu}{\bar{x}}) = 0\,, \tag{69}$$

welcher für die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}' &= a\bar{x} + b \\ \bar{y}' &= c\bar{y} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

invariant ist. Wenn wir die neuen Veränderlichen

$$x = \bar{x} - \frac{b}{1-a}$$

$$y = \bar{y}$$

einführen, findet man, dass die Gleichung die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= cy \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

zulässt. Da weiter die Substitution, eine gewisse begränzte Anzahl (r) Male wiederholt, (xy) zurückgeben soll d. i.

$$x^{(r)} = x$$

$$y^{(r)} = y\,,$$

muss

$$a^r = 1$$

$$c^r = 1$$

sein. Wir lassen r die kleinste Zahl, die (xy) zurückgiebt, bezeichnen.

Wenn also die Curve

$$y^\lambda + P_2(\overset{\mu_2}{x})\,y^{\lambda-2} + \ldots + P_\lambda(\overset{\mu}{x}) = 0 \tag{72}$$

für

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varepsilon_1 x \\ y' &= \varepsilon_1 y\,, \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

wo ε_1 und ε_2 durch

$$\varepsilon_1^r = \varepsilon_2^r = 1$$

bestimmt werden, invariant ist, haben wir dieselbe identisch mit

$$y^\lambda + \varepsilon_2^{-2} P_2(\varepsilon_1^{\mu_2} x) y^{\lambda-2} + \ldots + \varepsilon_2^{-k} P_k(\varepsilon_1^{\mu_k} x) y^{\lambda-k} + \ldots + \varepsilon_2^{-\lambda} P_\lambda(\varepsilon_1^{\mu} x) = 0,$$

$$\because\ \varepsilon_2^{-k} P_k(\varepsilon_1 x) = P_k(x) \qquad {\scriptstyle k=2,3,\ldots\lambda.} \qquad (74)$$

21. Nehmen wir an, dass jede Nullstelle a der Funktionen $P_k(x)$ von Null verschieden ist, folgt, wenn wir

$$P_k(x) = A_k \prod_{\nu=1}^{\mu_k} (x - a_{k_\nu}) \qquad (75)$$

setzen, dass

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^{\mu_k} &= \varepsilon_2^k \\ a_{k_\nu} &= \varepsilon_1 a_{k_{\nu'}} \\ \nu &\neq \nu'\,, \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

$$\because\ \varepsilon_1^{\mu_k} = 1\,,$$

$$\varepsilon_2^k = 1\,.$$

Sei ν gleich r_1 der kleinste Werth, welcher

$$\varepsilon^\nu = 1$$

genügt. Dann ist

$$\frac{r}{r_1} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Unsere Gleichung hat die Form

$$y^\lambda + P_2(x^{r_1})\, y^{\lambda-2} + \ldots + P_\lambda(x^{r_1}) = 0\,. \qquad (77)$$

Also soll

$$\frac{\mu_k}{r_1} = \text{einer ganzen Zahl,} \qquad {\scriptstyle (k=2,3,\ldots\lambda).}$$

Ebenso ist

$$\frac{\lambda}{r_2} = \text{einer ganzen Zahl,}$$

wenn r_2 die kleinste Zahl σ ist, welche

$$\varepsilon_2^{\sigma} = 1$$

genügt. Da (00) nicht des Gebildes ist, haben wir

$$N = r_1 r_2 N_0 , \tag{78}$$

wenn N_0 die Anzahl der Doppelstellen der neuen Gleichung bezeichnet.

Diese Gleichung ist aber ersten Ranges, wenn

$$\lambda_0 = 2, \ \mu_0 = 3, \ N_0 = 0,$$

$$\because \ \lambda = 2r_2, \ \mu = 3r_1, \ N = 0. \tag{79}$$

Um die Gleichung in die des ersten Ranges überzuführen, haben wir daher

$$\left.\begin{aligned} \xi &= F(x^r) \\ \eta &= G(x^r, y), \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

wo F und G ganze rationale Funktionen sind, zu setzen. Die Functionen F und G werden daraus bestimmt, dass in der Umgebung der Stelle $(\infty\infty)$ man

$$\left.\begin{aligned} \xi &= t^{-2\varkappa}(c_0 + t\mathfrak{P}(t)) \\ \eta &= t^{-3\varkappa}(d_0 + t\mathfrak{P}(t)) \\ & c_0 \neq 0, \ d_0 \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

haben soll.

Exempel 1. Wenn

$$\lambda = 2, \ \mu = 2\varrho + 1$$

sind, muss man

$$r_2 = 1, \ r_1 = \frac{2\varrho + 1}{3} = \text{einer ganzen Zahl}$$

haben. Hieraus ergiebt sich

$$\varrho \equiv 1 \mod 3 .$$

Die Gleichung hat die Gestalt

$$y^2 = R\left(x^{\frac{2\varrho+1}{3}}\right),$$

wo R eine ganze rationale Function dritten Grades von $x^{\frac{2\varrho+1}{3}}$ ist. Das Integral

$$\int \frac{x^{\frac{2\varrho-2}{3}}}{y}\,dx$$

geht durch die Substitution

$$\xi = x^{\frac{2\varrho+1}{3}}$$
$$\eta = y$$

in

$$\int \frac{d\xi}{\eta} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

über.

Exempel 2. Wenn

$$\lambda = 3\,,\ \mu = 1 + \varrho$$

sind, bekommt man

$$r_2 = 1,\ r_1 = \frac{1+\varrho}{2},$$
$$\because\ \varrho \equiv 1 \bmod 2\,.$$

Hieraus folgt, weil ϱ nicht mit drei theilbar ist, entweder

$$\varrho \equiv 1 \bmod 6$$

oder

$$\varrho \equiv 5 \bmod 6,$$

u. s. w.

22. Wenn nicht alle $a_{k\nu}$ von Null verschieden, ohne $\bar{\mu}_k$ derselben gleich Null sind, würde

$$P_k(x) = A_k x^{\bar{\mu}_k} \prod_{\nu=1}^{\mu_k - \bar{\mu}_k} (x - \bar{a}_{k\nu})\,, \tag{82}$$

$$\left.\begin{aligned} &\because\ \varepsilon_1^{\mu_k} = \varepsilon_2^k \\ &\quad \bar{a}_{k\nu} = \varepsilon_1 \cdot \bar{a}_{k\nu_1} \\ &\nu,\ \nu_1 = 1,\ 2,\ \ldots (\mu_k - \bar{\mu}_k), \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

$$\because\ \varepsilon_1^{\bar{\mu}_k} = \varepsilon_1^{\mu_k} = \varepsilon_2^k\,.$$

Die Frage fordert besondere Untersuchung.

Betrachten wir z. B. die Gleichung

$$y^2 = x \prod_{\nu=1}^{2\varrho}(x - c_\nu),$$

dann sieht man, dass

$$c_\nu = \varepsilon_1 c_{\nu_1}$$
$$(\nu, \nu_1 = 1, 2 \ldots 2\varrho)$$
$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1^{2\varrho+1},$$
$$\because \varepsilon_1 = \varepsilon_2^2,$$
$$\varepsilon_1^{2\varrho} = 1.$$

Wenn r die kleinste Zahl ist, die

$$\varepsilon_1^r = 1 \quad \left(\frac{2\varrho}{r} = \text{ganzen Zahl}\right)$$

genügt, ist deutlich, dass die Gleichung die Gestalt

$$y^2 = x \prod_{\nu=1}^{\frac{2\varrho}{r}}(x^r - e_\nu)$$

hat.

Das allgemeine Integral

$$\int \frac{\varphi(\overset{k}{x})\, dx}{y}$$
$$(k \leqq \varrho - 1)$$

ist invariant, wenn

$$\varepsilon_1^{k+1} = \varepsilon_1,$$
$$\because \varepsilon_1^{2k+1} = 1,$$
$$\because \frac{2k+1}{r} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Wenn ϱ eine Primzahl grösser als zwei ist, wird

$$k = \frac{\varrho - 1}{2}.$$

Da dieses Integral das einzige invariante ist, kann dasselbe sich in elliptische reducieren. Ist aber

$$\varrho = 2^n, \ (n = \text{ganzen Zahl}),$$

ist keines Integral invariant. Der Rang ϱ_0 ist Null. Wenn ϱ mit mehreren Zahlen theilbar ist, finden wir

$$\varrho_0 > 1 .$$

In gleicher Weise kann man die verschiedenen Möglichkeiten, um den Rang

$$\varrho_0 = 1$$

bei den Normalformen höherer Ordnungen zu erhalten, diskutieren.

23. Wenn die Gleichung mehrere Substitutionen sowohl ganze wie gebrochene zulässt, wird sie zuerst durch ganze rationale Functionen in eine Gleichung, die nur für gebrochene Substitutionen invariant ist, übergeführt. Darauf sucht man die Centra der Transformation $(a_i b_i)$ und stellt die gebrochenen, invarianten, rationalen Functionen dar, welche die Gleichung in die des niedrigeren Ranges transformiert.

24. *Jedes* ABELSCHE Integral erster Gattung einer Gleichung kann dann, und nur dann, sich auf das elliptische reducieren, wenn 1:o) die Gleichung am wenigsten für ϱ Substitutionen, 2:o) jedes der ϱ Integrale für eine dieser ϱ Substitutionen invariant ist.

Die Gleichung

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{2\varrho+1} (x - c_\nu) ,$$

wo keine der Constantene c_0 gleich Null ist, kann nicht mehr als $\varrho - 1$ verschiedene, gebrochene, rationale Substitutionen zulassen. Also ist eine ganze nothwendig. Diese ist rational, falls die Gleichung die Form

$$y^2 = A_0 + A_1 x^{\frac{2\varrho+1}{3}} + A_2 x^{\frac{4\varrho+2}{3}} + A_3 x^{2\varrho+1}$$

hat. Wenn wir

$$\frac{2\varrho + 1}{3} = r$$

setzen, kann sie geschrieben werden

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{3} \left(x^r - a_\nu^3\right) .$$

Man hat die Substitutionen

$$x' = \varepsilon x$$
$$y' = \pm y$$
$$\varepsilon^r = 1\,,$$
$$\therefore\ \frac{x'^k\,dx'}{y'} = \frac{x^k\,dx}{y}\,,$$

wenn man

$$k = \frac{2\varrho - 2}{3}$$

setzt, und das Zeichen + vor y gebraucht. Weiter sollen die Bedingungen

$$(c_{\mu'} - c_\alpha)(c_\mu - c_\alpha) = k_{1\alpha}$$
$$\left.\begin{matrix}\mu\\ \mu'\end{matrix}\right\} = 1,\ 2\ldots(2\varrho + 1)$$
$$\alpha = 1,\ 2\ldots(\varrho - 1)$$
$$\mu' \neq \alpha \neq \mu \neq \mu'$$

gelten.

Als solche Gleichungen können wir auch die von PICARD mitgeteilte

$$y^2 = x^8 + ax^4 + b$$

ansehen. Diese ist für sowohl

$$x' = \pm\, ix$$
$$y' = -y$$

als für

$$x'' = \frac{\sqrt[4]{b}}{x} \qquad\qquad x''' = \frac{\sqrt[4]{b}}{x}$$
$$y'' = \frac{\sqrt{b}}{x^4}\,y \qquad\qquad y''' = -\frac{\sqrt{b}}{x^4}\,y$$

invariant. Man hat

$$\int\frac{x'dx'}{y'} = \int\frac{xdx}{y} = \text{einem elliptischen Integrale,}$$
$$\int\frac{\left(x''^2 - \sqrt[4]{b}\right)dx''}{y''} = \int\frac{\left(x^2 - \sqrt[4]{b}\right)dx}{y} = \text{einem elliptischen Integrale,}$$
$$\int\frac{\left(x'''^2 + \sqrt[4]{b}\right)dx'''}{y'''} = \int\frac{\left(x^2 + \sqrt[4]{b}\right)dx}{y} = \text{einem elliptischen Integrale.}$$

25. In dem Vorigen haben wir uns bei den algebraischen Gebilden, welche birationale Substitutionen zulassen, vielleicht zu lange aufgehalten. Diese Gleichungen sind leicht zu untersuchen, besonders falls man sich dieselben unter Normalformen denkt; sie sind im übrigen von grösserem Interesse. Schwieriger ist die Aufgabe das Problem der Reduktion zu untersuchen, wenn die Gleichungen nur bialgebraische Substitutionen zulassen. Indessen kann man dann auch die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen — wie wir jetzt zeigen wollen — finden.

Wir nehmen an, wie im Vorhergehenden, dass in den Umgebungen der Stellen $(a_i b_i)$ $(i = 1, 2 \ldots s)$

$$\left.\begin{aligned} x &= a_i + t \\ y &= b_i + t\mathfrak{P}_i(t), \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

und dass in den Umgebungen der singulären Stellen $(\alpha_\nu \beta_\nu)$ $(\nu = 1, 2 \ldots N)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_\nu + t \\ y &= \beta_\nu + t\mathfrak{P}_{\nu\mu}(t), \quad {\scriptstyle \mu=1,2.} \end{aligned}\right\} \quad (85)$$

In jeder der Functionen

$$\left.\begin{aligned} \xi = R(xy)_{\lambda_0} &= \frac{F(xy)}{\prod\limits_{i=1}^{s}(x-a_i)^{\lambda_0}\prod\limits_{\nu=1}^{N}(x-\alpha_\nu)} \\ \eta = R(xy)_{\mu_0} &= \frac{G(xy)}{\prod\limits_{i=1}^{s}(x-a_i)^{\mu_0}\prod\limits_{\nu=1}^{N}(x-\alpha_\nu)}, \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

wo $F(xy)$ und $G(xy)$ ganze rationale Functionen sind, müssen die Entwicklungen ξ_t und η_t in den Umgebungen der Stellen $(\infty\infty)$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $\ldots (a_s b_s)$ identisch sein. Weiter ist es nothwendig, dass das ABELSCHE Integral für dieselbe bialgebraische Substitution invariant ist.

Wenn wir uns speciel mit dem Falle

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= 2 \\ \mu_0 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

beschäftigen wollen, welcher vor übrigen wichtig ist, haben wir

$$dw = \frac{T(xy)\,dx}{f_2(xy)} = \frac{T(x'y')\,dx'}{f_2(x'y')} = \frac{d\xi}{\eta}, \tag{88}$$

$$\because\ \eta = \frac{1}{T(xy)}\frac{\partial[R(xy)_{\lambda_0} f(xy)]}{\partial[xy]}. \tag{89}$$

Weiter hatten wir die Bedingungen zu finden, unter welchen ξ und η in den Umgebungen der verschiedenen Unendlichkeitsstellen $(\infty\infty)$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $\ldots (a_s b_s)$ dieselben Entwicklungen haben. Da die Frage von der Reduktion der ABELSCHER Integrale in das elliptische ist, erhält man ohne Zweifel am einfachsten die übrigen Bedingungen durch

$$\eta^2 = \prod_{\mu=1}^{3}(\xi - e_\mu) \tag{90}$$

direkt zu setzen, woraus sich ergiebt

$$G(xy)^2 \cdot \prod_{\nu=1}^{N}(x-\alpha_\nu) = \prod_{\mu=1}^{3}\Big[F(xy) - e_\mu \prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^2 \prod_{\nu=1}^{N}(x-\alpha_\nu)\Big]. \tag{91}$$

Wenn $G(xy)$ die Nullstellen

$$(c_j d_j)\ (j = 1,\ 2,\ \ldots k) \tag{92}$$

hat, müssen wir

$$\left.\begin{aligned} R(c_{j_1} d_{j_1})_{\lambda_0} &= e_1 \\ R(c_{j_2} d_{j_2})_{\lambda_0} &= e_2 \\ R(c_{j_3} d_{j_3})_{\lambda_0} &= e_3 \qquad {\scriptstyle j_1 j_2 j_3 = 1,\,2,\ldots k} \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

haben. Nachdem man mit $G(xy)$ dividiert hat, erhält man

$$\prod_{\mu=1}^{3}{}^{c_j\,d_j}\Big[F(x_t y_t) - e_\mu \prod_{i=1}^{s}{}^{c_j d_j}(x_t - a_i)^2 \prod_{\nu=1}^{N}{}^{c_j d_j}(x_t - \alpha_\nu)\Big]_t = 0\,. \tag{95}$$

26. Zum Beispiel werden wir die Gleichung

$$y^2 = x(x-1)\prod_{\kappa=1}^{2\varrho-1}(x - c_\kappa) \tag{96}$$

noch einmal betrachten.

Dann haben wir

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R(xy)_{\lambda_0} = R(x)\,, \\ T(xy) &= T(x)\,, \\ f(xy)_2 &= 2y\,, \\ \because\ \eta &= y\frac{R'(x)}{T(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Wenn wir nun

$$R(x) = \sum_{i=1}^{r} g_i x^i + \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i}{x - c_i} = \frac{R_0(x)}{\prod_{i=1}^{s} (x - c_i)}, \tag{98}$$

$$\therefore \; R'(x) = \sum_{i=1}^{r} i g_i x^{i-1} - \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i}{(x - c_i)^2} = \frac{\overline{R}(x)}{\prod_{i=1}^{s} (x - c_i)^2} \tag{99}$$

annehmen, wo

$$k_i \neq 0$$

$$i = 1, 2, \ldots s,$$

ergiebt sich

$$\eta = y \frac{\overline{R}(x)}{T(x) \prod_{i=1}^{s} (x - c_i)^2}. \tag{100}$$

Weil die Nullstellen der Function $T(x)$ Unendlichkeitsstellen den Function $R(xy)_{\mu_0}$ nicht sind, muss $\overline{R}(x)$ mit $T(x)$ theilbar sein. Die Bezeichnung

$$\Psi(x) = \frac{\overline{R}(x)}{T(x)} \tag{101}$$

anwendend, werden wir die Identität

$$\Psi(x)^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{2\varrho+1} (x - c_i) = \prod_{\mu=1}^{s} \left[R_0(x) - e_\mu \prod_{i=1}^{s} (x - c_i)\right] \tag{102}$$

haben.

Hieraus folgt, dass

$$2\varrho + 1 - s + 2\psi_0 = 3r + 3s,$$

$$\therefore \; 2\varrho + 1 + 2\psi_0 = 3r + 4s, \tag{103}$$

wenn ψ_0 der Grad der Function $\Psi(x)$ ist. Weiter hat man den Grad der $T(x)$ — τ — durch

$$\tau = r + 2s - 1 - \psi_0,$$

$$\therefore \; \tau = \varrho - \frac{1 + r}{2}, \tag{104}$$

gegeben.

Wir können die Bedingungen der Reduktion durch

$$\left.\begin{aligned} R_0(x) &= \Phi_1(x)^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{s+r_1} (x - c_i) + e_1 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \Phi_2(x)^2 \cdot \prod_{i=s+r_1+1}^{s+r_1+r_2} (x - c_i) + e_2 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \Phi_3(x)^2 \cdot \prod_{i=s+r_1+r_2+1}^{s+r_1+r_2+r_3} (x - c_i) + e_3 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

ausdrücken, wo

$$\Psi(x) = \Phi_1(x)^{\varphi_{10}} \cdot \Phi_2(x)^{\varphi_{20}} \cdot \Phi_3(x)^{\varphi_{30}} . \quad (106)$$

Aus diesen Identitäten folgt, dass

$$\left.\begin{aligned} s + r_1 + r_2 + r_3 &= 2\varrho + 1 \\ \varphi_{10} + \varphi_{20} + \varphi_{30} &= \psi_0 \\ r_1 + 2\varphi_{10} = r_2 + 2\varphi_{20} = r_3 + 2\varphi_{30} &= r + s . \end{aligned}\right\} \quad (107)$$

27. Als unsere erste Aufgabe betrachten wir den Fall, dass

$$\tau = \varrho - 1 , \quad (108)$$

$$\therefore\ r = 1 . \quad (109)$$

Dann ist

$$\psi_0 = 2s - \varrho + 1 . \quad (110)$$

Wenn ϱ eine ungerade Zahl ist, wollen wir s durch

$$\varrho = 2s + 1 \quad (111)$$

bestimmt annehmen,

$$\therefore\ \psi_0 = 0 , \quad (112)$$

$$\therefore\ T(x) = R(x) , \quad (113)$$

woraus folgt, dass

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_{30} &= 0 \\ r_1 = r_2 = r_3 &= s + 1 , \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

und also

$$\left.\begin{aligned} R_0(x) &= \prod_{i=s+1}^{2s+1} (x - c_i) + e_1 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \prod_{i=2s+2}^{3s+2} (x - c_i) + e_2 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \prod_{i=3s+3}^{4s+3} (x - c_i) + e_3 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) . \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Man erhält die Relationen der Constanten

$$c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots c_{2\varrho-1}\,,$$

wenn man in $R_0(x)$ nach einander x gleich $c_1, c_2 \ldots c_s$ setzt, nämlich

$$\left.\begin{array}{c}\prod_{i=s+1}^{2s+1}(c_j - c_i) = \prod_{i=2s+2}^{3s+2}(c_j - c_i) = \prod_{i=3s+3}^{4s+3}(c_j - c_i)\\ j = 1,\ 2,\ \ldots s\,.\end{array}\right\} \quad (116)$$

Die Anzahl der Moduln dieser hyperelliptischen Gleichungen ist folglich

$$2\varrho - 1 - 2s = \varrho\,.$$

In dem jetzt betrachteten Falle kann nur ein der ϱ Abelschen Integrale in das elliptische reduciert werden.

Exempel. Wenn wir

$$s = 2$$
$$\varrho = 5$$

annehmen, und $R(x)$, wie folgt, setzen:

$$R(x) = x + \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x-1}\,,$$
$$\because\ \bar{R}(x) = x^2(x-1)^2 - k_1(x-1)^2 - k_2x^2\,,$$
$$\because\ T(x) = x^2(x-1)^2 - k_1(x-1)^2 - k_2x^2\,,$$

ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{\prod_{i=1}^{9}(x - c_i)}{x^3(x-1)^3} = \prod_{\mu=1}^{3}\left[R(x) - e_\mu\right],$$

welche eine Identität sein soll. Hieraus erhalten wir

$$k_1 = c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6 = c_7c_8c_9$$
$$k_2 = (c_1 - 1)(c_2 - 1)(c_3 - 1) = (c_4 - 1)(c_5 - 1)(c_6 - 1) =$$
$$= (c_7 - 1)(c_8 - 1)(c_9 - 1)$$
$$e_1 = c_1 + c_2 + c_3 - 1$$
$$e_2 = c_4 + c_5 + c_6 - 1$$
$$e_3 = c_7 + c_8 + c_9 - 1\,.$$

Um die bialgebraische Substitution zu bekommen, lösen wir

$$x' + \frac{c_1 c_2 c_3}{x'} + \frac{(c_1 - 1)(c_2 - 1)(c_3 - 1)}{x' - 1} =$$

$$= x + \frac{c_1 c_2 c_3}{x} + \frac{(c_1 - 1)(c_2 - 1)(c_3 - 1)}{x - 1}$$

auf, nachdem wir die Wurzel $x' = x$ weggenommen haben. Man findet

$$x'^2 - x'\left[1 + \frac{c_1 c_2 c_3}{x} + \frac{(c_1 - 1)(c_2 - 1)(c_3 - 1)}{x - 1}\right] + \frac{c_1 c_2 c_3}{x} = 0 .$$

28. Wählen wir s in anderer Weise und setzen

$$\varrho = 2s - 1 , \tag{118}$$

wird

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0 = 2 , \\ \because\ &\varphi_{10} = \varphi_{20} = 1 , \ \varphi_{30} = 0 , \\ \because\ &r_1 = s - 1 , \ r_2 = s - 1 , \ r_3 = s + 1 . \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

Also

$$\left.\begin{aligned} R_0(x) &= \Phi_1(x)^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{2s-1} (x - c_i) + e_1 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \Phi_2(x)^2 \cdot \prod_{i=2s}^{3s-1} (x - c_i) + e_2 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \prod_{i=3s}^{4s-1} (x - c_i) + e_3 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) , \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

$$\left.\begin{aligned} \because\ \Phi_1(c_j)^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{2s-1} (c_j - c_i) = \Phi_2(c_j)^2 \cdot \prod_{i=2s}^{3s-1} (c_j - c_i) = \prod_{i=3s}^{4s-1} (c_j - c_i) . \\ j = 1, 2, \ldots s \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Die Gleichungen sind $2s$; die Constanten $2\varrho + 1$. Folglich ist die Anzahl der Moduln

$$2\varrho + 1 - 2s = \varrho . \tag{122}$$

Exempel: $s = 2 \qquad \because\ \varrho = 3$

$$\because\ r_1 = 1 , \ r_2 = 1 , \ r_3 = 3 .$$

Wenn wir

$$\Phi_1(x) = x - a$$

$$\Phi_2(x) = x - b$$

setzen, werden die Bedingungen

$$a^2 = \frac{c_3 c_4 c_5}{c_1}; \quad (1-a)^2 = \frac{(c_3-1)(c_4-1)(c_5-1)}{c_1-1};$$

$$b^2 = \frac{c_3 c_4 c_5}{c_2}; \quad (1-b)^2 = \frac{(c_3-1)(c_4-1)(c_5-1)}{c_2-1}.$$

In dieser Art können wir ohne Schwierigkeit die verschiedenen Bedingungen herleiten, unter welchen das hyperelliptische Gebilde ungeraden Grades ein ABELSCHES Integral hat, das in ein elliptisches reducierbar ist.

29. Wenn ϱ eine gerade Zahl ist, wird die Function $R(x)$ von ihrem niedrigsten Grade, falls wir

$$\psi_0 = 1, \tag{123}$$

$$\because \ \varrho = 2s, \tag{124}$$

setzen. Man findet dann

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{10} = \varphi_{20} = 0, \ \varphi_{30} = 1, \\ r_1 = r_2 = s+1, \ r_3 = s-1 \end{array}\right\} \tag{125}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \because \ R_0(x) = & \prod_{i=s+1}^{2s+1} (x-c_i) + e_1 \prod_{i=1}^{s} (x-c_i) = \\ = & \prod_{i=2s+2}^{3s+2} (x-c_i) + e_2 \prod_{i=1}^{s} (x-c_i) = \\ = \Phi_3(x)^2 \cdot & \prod_{i=3s+3}^{4s+1} (x-c_i) + e_3 \prod_{i=1}^{s} (x-c_i). \end{array}\right\} \tag{126}$$

Wie im Vorhergehenden erhält man die gesuchten Relationen, wenn man nach einander x gleich $c_1, c_2 \dots c_s$ in $R_0(x)$ setzt, nämlich

$$\left.\begin{array}{c} \prod_{i=s+1}^{2s+1} (c_j - c_i) = \prod_{i=2s+2}^{3s+2} (c_j - c_i) = \Phi_3(c_j)^2 \cdot \prod_{i=3s+3}^{4s+1} (c_j - c_i) \\ j = 1, 2, \dots s. \end{array}\right\} \tag{127}$$

Es ergeben sich zwei Werthe der Constanten der $\Phi_3(x)$. Daraus folgt, dass zwei Integrale sich in elliptische reducieren können. Wir erinnern an den Satz des Herrn PICARD für $\varrho = 2$.

Die Anzahl der Moduln ist ϱ.

Man kan jetzt auch die besonderen Fälle, in welchen ψ'_0 höhere Werthe annimmt, betrachten.

Da aber nichts wesentlich neues sich dadurch ergiebt, wollen wir statt dessen zu dem Falle, dass r gleich drei ist, übergehen.

30. Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned} r = 3 \because \tau &= \varrho - 2\,, \\ \because\ \psi_0 &= 2s + 4 - \varrho\,. \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

Hier ist

$$\psi'_0 = 0\,, \quad (129)$$

falls wir

$$\varrho = 2s + 4 \quad (130)$$

annehmen. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_{30} &= 0 \\ r_1 = r_2 = r_3 &= s + 3\,, \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

$$\left.\begin{aligned} \because\ R_0(x) &= \prod_{i=s+1}^{2s+3} (x - c_i) + e_1 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \prod_{i=2s+4}^{3s+6} (x - c_i) + e_2 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i) = \\ &= \prod_{i=3s+7}^{4s+9} (x - c_i) + e_3 \prod_{i=1}^{s} (x - c_i)\,. \end{aligned}\right\} \quad (132)$$

Die Relationen werden folglich

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{i=s+1}^{2s+3} (c_j - c_i) = \prod_{i=2s+4}^{3s+6} (c_j - c_i) = \prod_{i=3s+7}^{4s+9} (c_j - c_i) \\ &\qquad j = 1,\ 2,\ \ldots s \\ &c_{s+1} + c_{s+2} + \ldots + c_{2s+3} = c_{2s+4} + c_{2s+5} + \ldots + c_{3s+6} = \\ &\qquad = c_{3s+7} + c_{3s+8} + \ldots + c_{4s+9} \\ &c_{s+1}c_{s+2} + \ldots + c_{2s+2}c_{2s+3} = c_{2s+4}c_{2s+5} + \ldots + c_{3s+5}c_{3s+6} = \\ &\qquad = c_{3s+7}c_{3s+8} + \ldots + c_{4s+8}c_{4s+9}\,. \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Die Anzahl der Moduln ist $\varrho - 1$.

Wie wir hier gezeigt haben, kann man auch in jedem Falle die Bedingungen erhalten, unter welchen ein Integral gegebenen Grades (τ) durch gebrochenen Substitutionen der gegebenen Ordnungen r und s sich in das elliptische transformieren lässt.

31. Den Fall, der

$$s = 0 \tag{134}$$

hat, wollen wir nun betrachten.

Man findet

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R(x) \\ \therefore \frac{R'(x)\,dx}{\eta} &= \frac{T(x)\,dx}{y} \\ \therefore \eta &= y\cdot\frac{R'(x)}{T(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Also muss

$$\frac{R'(x)}{T(x)} = \text{einer ganzen Function} = \Psi(x) \tag{136}$$

sein. Weiter ist

$$x(x-1)\prod_{i=1}^{2\varrho-1}(x-c_i)\cdot\Psi(x)^2 = \prod_{\mu=1}^{3}\left[R(x)-e_\mu\right], \tag{137}$$

$$\therefore 2\varrho + 1 + 2\psi_0 = 3r. \tag{138}$$

Wenn man

$$\psi_0 = 0 \tag{139}$$

haben will, wird

$$r = \frac{2\varrho+1}{3} = \text{einer ganzen Zahl}, \tag{140}$$

$$\left.\begin{matrix} R(c_i) = e_1 \\ {\scriptstyle i=1,2\dots r} \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} R(c_{i_1}) = e_2 \\ {\scriptstyle i_1=(r+1),(r+2)\dots 2r} \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} R(c_{i_{11}}) = e_3 \\ {\scriptstyle i_{11}=(2r+1),(2r+2),\dots(2\varrho+1).} \end{matrix}\right\} \tag{141}$$

Die Function

$$R(x) = \sum_{i=1}^{r} g_i x^i$$

hat r Constanten. Sie werden durch die r ersten Gleichungen bestimmt. Die Anzahl der Moduln ist

$$2\varrho - 1 - 3\cdot(r-1) + r = \frac{2\varrho+4}{3}. \tag{142}$$

Als ein Exempel nennen wir

$$y^2 = 4(x^3+1)^9 - g_2(x^3+1)^3 - g_3,$$

welche Gleichung für

$$x' = \varepsilon[(x^3 + 1)^3 - 1]^{1/3}$$
$$y' = \pm y$$
$$\varepsilon^3 = 1$$

invariant ist.

Das reducierbare Integral ist

$$\int \frac{x^2(x^3 + 1)^2\,dx}{y} = \frac{1}{9}\int \frac{d\xi}{\eta} = \pm \frac{1}{9}\int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}},$$

wenn

$$\xi = (x^3 + 1)^3$$
$$\eta = y\,.$$

In derselben Weise, in welcher wir hier die hyperelliptische Gleichung behandelt, ist es auch möglich jede Gleichung zu untersuchen und die Bedingungen der Reduktion herzuleiten. Obgleich der allgemeine Fall, in welchem λ und μ andere, ganze Werthe, wie sie auch sein mögen, annehmen, mehrere Möglichkeiten darbietet und dadurch sehr compliciert ist, geht nichts neues hervor, als wir im voraus dargestellt haben. Auch versteht sich ohne weiteres, wie man untersuchen kann, wo und wann ein Integral eines Gebildes in ein solches niedrigeren Ranges, aber grösseren als des ersten, übergeführt werden kann.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897. N:o 8.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Ueber den elektrischen Kohlen-Lichtbogen.

Von G. GRANQVIST.

[Mitgeteilt den 13. October 1897 durch K. ÅNGSTRÖM.]

1. In Wied. Ann. Bd. 57 S. 158 ff. berichtet L. ARONS über einige von ihm vorgenommene Untersuchungen des elektrischen Lichtbogens. Unter anderem sucht ARONS hier die Grenze der elektromotorischen Kraft zu bestimmen, welche eine Accumulatorenbatterie mindestens haben muss, um sofort nach dem Aufhören des Hauptstroms einen Strom durch die Gasstrecke eines Lichtbogens senden zu können. Unter Hauptstrom verstehe ich im folgenden den Strom, welcher den Lichtbogen zu stande gebracht hat. ARONS ist dabei zu folgendem Resultat gelangt: »Der Zustand der Kohlenelektroden und der Gasstrecke nach dem Verlöschen des elektrischen Lichtbogens ist ein derartiger, dass es einer bestimmten äusseren elektromotorischen Kraft bedarf, um einen Strom durch die Gasstrecke zu senden — es handelt sich also hierbei nicht um die Überwindung eines einfachen, wenn auch mit der Zeit schnell wachsenden Widerstandes, wie man nach dem vereinzelten Versuch Stengers glauben könnte; die Beobachtungen an dem im umgekehrten Sinne fortbrennenden Lichtbogen deuten darauf hin, dass die elektromotorische Kraft der Accumulatorenbatterie anfangs eine Unterstützung durch eine vorhandene elektromotorische Gegenkraft im Lichtbogen erfährt, die sehr rasch verschwindet.»

Diese Schlussfolgerungen widersprechen den Erfahrungen, welche ich bei einigen Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen, die ich bereits 1894 vornahm, gemacht habe.[1]) Obgleich ich damals eine sehr empfindliche Anordnung zu meiner Verfügung hatte, gelang es mir nicht, eine elektromotorische Kraft in der Gasstrecke nach dem Aufhören des Hauptstroms nachzuweisen. (Ich nehme die kleine 0,23 Volt erhaltene elektromotorische Kraft aus, welche vermutlich thermoelektrischen Ursprungs war.) Ferner konnte ich ohne Schwierigkeit einen Strom von einem DANIEL'schen Element durch die Gasstrecke senden, wo ARONS wieder aufgrund seiner Untersuchungen der Ansicht ist, dass die geringste elektromotorische Kraft, welche man hierzu braucht, sich auf 18 bis 22 Volt belaufen solle.

Die Ursache dafür, dass ARONS schon bei einer weit niedrigeren elektromotorischen Kraft in der Accumulatorenbatterie keinen elektrischen Strom durch die Gasstrecke nachweisen konnte, scheint mir in der Unempfindlichkeit seiner Versuchsanordnung zu liegen. Auch scheint es mir, dass den Beobachtungen ARONS eine andere Deutung als die, welche er selbst giebt, gegeben werden kann.

2. Die in dem Lichtbogen absorbierte elektrische Energie kann bekanntlich durch die Formel $IE + RI^2$ ausgedrückt werden, wobei E, R und I die elektromotorische Gegenkraft, den Widerstand und die Stromstärke in dem Lichtbogen bezeichnen.

Der erste Terminus in diesem Ausdruck repräsentiert den Energieverbrauch infolge der elektromotorischen Gegenkraft, der letztere dagegen die JOUL'sche Wärme. Nach meinen früheren Untersuchungen über den Lichtbogen wird die elektrische Energie, welche von der elektromotorischen Gegenkraft herrührt, in Wärmeenergie verwandelt. Die elektromotorische Gegenkraft E ist die Summe der Gegenkraft in der Anode und in der Kathode. Von diesen ist diejenige in der Anode am grössten.

[1]) G. GRANQVIST, Undersökningar öfver den elektriska ljusbågen. Fysiografiska Sällskap:s i Lund Handl. B. 5.

Hier ist also ein grösserer Potentialfall und infolgedessen eine grössere Wärmeentwickelung als in der Kathode. Die Folge hiervon ist, dass die Temperatur in der Anode jeder Zeit grösser ist als in der Kathode.

Nach ROSSETTIS [1]) Untersuchungen über die Temperatur im Kohlen-Lichtbogen ist die Temperatur in dem Bogen selbst ungefähr 4,800° und unabhängig von der Stromstärke und der Länge des Bogens. Die Temperatur in der Anode und Kathode ist bedeutend niedriger (ungefähr 1,000° niedriger) als im Bogen selbst und steigt, wenn die Stromstärke vergrössert wird, also wenn die an diesen Stellen per Zeiteinheit entwickelte Wärme zunimmt.

Die JOUL'sche Wärme, welche sich in dem Bogen selbst entwickelt, geht teils durch Strahlung und Convektion in das den Bogen umgebende Medium, teils auch durch Leitung in die Elektroden über. Es hat nun weiter den Anschein, als ob die Wärme, welche durch Leitung in die Elektroden übergeht, bedeutend grösser sei als diejenige, welche ausstrahlt und welche durch Convektion fortgeleitet wird. Dass es sich wenigstens bei den Metall-Lichtbogen so verhält, kann man aus meinen kalorimetrischen Messungen der Wärmeentwicklung in einem Kupferlichtbogen schliessen. Hier war während der ersten 30 Sekunden ungefähr nur ein Achtel der JOUL'schen Wärme durch Strahlung und Convektion weggegangen; der Rest war durch Leitung in die Elektroden übergeführt worden.

Vermindert man die Stromintensität, so wird die im Bogen selbst auftretende JOUL'sche Wärme geringer; die Temperatur in den Elektroden sinkt, und die durch Strahlung und Leitung fortgehende Wärme kann, wenn die Stromstärke klein genug ist, grösser werden als die entwickelte JOUL'sche Wärme. In diesem Fall kann der Bogen natürlich nicht existieren, sondern erlischt.

Soll überhaupt ein dauernder elektrischer Lichtbogen existieren können, so ist es also erforderlich, dass die Intensität

[1]) ROSSETTI Journal de Physique, T. VIII, p. 257; T. X, p. 456.

des Stromes, welcher den Lichtbogen unterhält, nicht unter eine bestimmte Grösse herabsinkt. Diese Grösse hängt von der Natur und den Dimensionen der Elektroden, von der Länge des Lichtbogens und von dem umgebenden Medium ab. Dies stimmt mit der Erfahrung vollkommen überein. So darf z. B. die Stromstärke nicht unter 1,2 bis 1,5 ampère herabsinken, wenn man einen Lichtbogen in der Luft erhalten will, bei dem die Elektroden aus Kohlenspitzen von 11 mm. Durchmesser bestehen und die Länge des Lichtbogens 1 bis 2 mm. beträgt.

Wenn ein elektrischer Strom, der einen Kohlen-Lichtbogen unterhält, aufhört, so bleibt bekanntlich das zwischen den Elektroden befindliche glühende Gas noch eine kurze Zeit. Die Zeit, während welcher diese Gasstrecke bleibt, ist unter im übrigen gleichen Verhältnissen von der Intensität der Hauptstroms abhängig. Je grösser diese gewesen ist, desto länger besteht auch die Gasstrecke fort.

Davon, dass sich die Sache wirklich so verhält, konnte ich mich bei einer Gelegenheit überzeugen. Bei einem Versuch, den ich unten ausführlicher beschreiben werde, hatte ich eine Anordnung getroffen, bei der der elektrische Strom, welcher einen Kohlen-Lichtbogen unterhielt, mittels eines rotierenden Rades, das über zwei Bürsten hinglitt, für eine bestimmte Zeit unterbrochen werden konnte. Wählte man diese Zeitdauer klein genug, so erlosch der Lichtbogen während der Unterbrechung nicht, sondern schien ruhig und stätig weiterzubrennen. Es zeigte sich nun: je grössere Intensität der Hauptstrom hatte, desto langsamer konnte unter im übrigen gleichen Verhältnissen die Rotationszeit gewählt werden, ohne dass der Bogen erlosch.

Da sich die Temperatur in dem Lichtbogen nach ROSSETTIS Untersuchungen nicht mit der Stromstärke ändert, dürfte wohl die Ursache dafür, dass der Lichtbogen noch einige Zeit nach dem Aufhören des Stromes bleibt, hauptsächlich darin liegen, dass der Lichtbogen nicht augenblicklich von den Elektroden abgekühlt wird. Je intensiver der Strom war, desto geringer ist die Temperaturdifferenz zwischen dem Lichtbogen und den

Elektroden und desto langsamer muss ja auch dieser abgekühlt werden.

Leitet man nun gleich nach dem Aufhören des Hauptstroms einen Strom in derselben oder in entgegengesetzter Richtung durch die Gasstrecke, so wird der Strom, solange er die Gasstrecke durchläuft, derselben Wärme zuführen, und für die Gasstrecke ist somit die Möglichkeit vorhanden, länger fortzudauern als sie sonst gethan haben würde. Dass man thatsächlich schon bei einer so geringen äusseren elektromotorischen Kraft der Stromquelle, wie die eines DANIELSCHEN Elementes ist, einen elektrischen Strom durch die Gasstrecke senden kann, werde ich unten zeigen.

Je grösser die Intensität des Stromes ist, welcher durch die Gasstrecke geht, nachdem der Hauptstrom aufgehört hat, desto länger muss also die Gasstrecke bestehen bleiben. Ist die Stromstärke gross genug, kann es sogar vorkommen, dass der Lichtbogen nicht erlischt, sondern von dem neuen Strom unterhalten weiterbrennt.

ARONS hat Beweise hierfür geliefert. Z. B. wurde bei einem seiner Versuche nach dem Aufhören des Hauptstroms ein elektrischer Strom in entgegengesetzter Richtung zu diesem von einer Accumulatorenbatterie, deren elektromotorische Kraft 30 Volt war, durch die Gasstrecke gesandt. Da der Widerstand in den Leitungsdrähten 0,4 ohm betrug, konnte der Lichtbogen in einem Falle vollständig und in einem anderen circa 15 Sekunden lang in umgekehrter Richtung brennen. Wurde nun der Widerstand in der Leitung um 1 ohm vermehrt, so konnte der Bogen nicht in umgekehrter Richtung brennen, sondern erlosch.

3. Im Vorhergehenden habe ich angenommen, dass man einen elektrischen Strom durch die Gasstrecke senden kann, nachdem der Hauptstrom aufgehört hat. ARONS hat nun durch seine Beobachtungen zu finden geglaubt, dass die geringste elektromotorische Kraft, welche eine Batterie haben muss, um einen Strom in entgegengesetzter Richtung zum Hauptstrom, nachdem dieser aufgehört hat, durch die Gasstrecke zu senden, 18 bis 22

Volt betragen solle. Weiter ist ARONS der Ansicht, dass die elektromotorische Gegenkraft ebenso wie der Bogen selbst noch einige Zeit nach dem Aufhören des Stromes weiter besteht. Die Gegenkraft in dem Bogen, welche ARONS auf 10 bis 14 Volt schätzt, addiert sich zu der elektromotorischen Kraft in der Batterie. Die gesamte äussere elektromotorische Kraft, welche also erforderlich wäre, um in dem obenerwähnten Fall einen Strom durch die Gasstrecke zu senden, würde sich demnach auf ungefähr 30 Volt belaufen. In diesem Falle ist indess die Stromstärke zu schwach, als dass der Bogen fortfahren könnte zu brennen. Soll dies geschehen können, so muss nach ARONS' Berechnungen die Summe der beiden elektromotorischen Kräfte auf 40 Volt steigen.

Was zunächst die elektromotorische Gegenkraft betrifft, so kann man gegen ARONS' Raisonnement den Einwand geltend machen, dass eine elektromotorische Kraft in der Gasstrecke nach dem Aufhören des Hauptstroms bei allen Versuchen, welche in der letzten Zeit angestellt wurden, nicht hat nachgewiesen werden können. Sowohl LUGGINS,[1]) LECHERS,[2]) STENGERS[3]) als meine Versuche in dieser Richtung haben zu negativen Resultaten geführt.

Die elektromotorische Gegenkraft, welche thatsächlich während der Dauer des Hauptstroms in dem Lichtbogen vorhanden ist, kann deshalb nicht in demselben Sinne auf einer Kontaktwirkung zwischen den Elektroden und der Gasstrecke beruhen, wie sie sich bei der Zersetzung von Elektrolyten findet. EDLUND selbst war der Ansicht, dass sie von einer Zerstäubungsarbeit in dem Lichtbogen herrühre, welche von dem Strom geleistet werde. Wenn es sich aber so verhält, muss sie ja natürlich auch in demselben Augenblick verschwinden, wo der Strom aufhört.

Was ferner die elektromotorische Kraft der Batterie betrifft, so scheint mir, wie oben erwähnt, die Unempfindlichkeit der

---

[1]) LUGGIN, Wien. Ber. 98, p. 1198. 1889.
[2]) LECHER, Wied. Ann. 33, p. 609. 1888.
[3]) STENGER, Wied. Ann. 45, p. 33. 1892.

ARONS'schen Versuchsanordnung die Ursache dafür gewesen zu sein, dass er nicht schon bei bedeutend geringerer Grösse der äusseren elektromotorischen Kraft einen Strom durch die Gasstrecke nachweisen konnte.

Bei diesen Versuchen hat ARONS nämlich mit einiger Modifikation von der von STENGER verwendeten Anordnung Gebrauch gemacht. Der elektrische Strom aus der Centrale durchläuft nach einander eine Tangentenbussole, den Lichtbogen und eine Accumulatorenbatterie. Diese letztere war so eingeschaltet, dass sie von dem Centralstrom geladen wurde, solange dieser den Bogen unterhielt. In der Tangentenbussole war eine Anordnung getroffen, dass die Nadel nur bei einem Strom, welcher eine dem Centralstrom entgegengesetzte Richtung hatte, einen Ausschlag geben konnte. Parallel mit der Leitung, welche die Bussole, die Lampe und die Batterie umfasste, war ein DUBOIS'scher Schlüssel eingeschaltet. Wenn dieser Schlüssel offen war, ging der Strom also durch die Bussole, die Lampe und die Batterie. War hingegen der Schlüssel geschlossen, trat Kurzschluss des Centralstroms ein und der Lichtbogen erlosch infolgedessen. Konnte nun aber die Batterie während der kurzen Zeit, in der die Gasstrecke nach dem Kurzschluss des Centralstroms fortbestand, einen Stromstoss durch den Lichtbogen senden, so durchlief dieser natürlich die Tangentenbussole in entgegengesetzter Richtung zu dem Centralstrom. Dieser Strom konnte also an der Tangentenbussole abgelesen werden.

Die folgende Tabelle, welche der besseren Übersicht wegen mitgeteilt werden soll, enthält ARONS' Beobachtungen.

Tab. I.

Stromstärke im Bogen.	Spannung d. Accum.	Ausschlag d. Bussole.	Bemerkungen.
9,1	0	7	
9,0	10	7	
11,0	10	6	
4,4	10	6	

Tab. I. (Forts.)

Stromstärke im Bogen.	Spannung d. Accum.	Ausschlag d. Bussole.	Bemerkungen.
8,6	10	8	
8,1	10	8	
8,0	10	7	
13,0	10	7	
10,3	14	6	
5,6	18	8	18—22 Volt sind für das Zustandekommen des Stromstosses erforderlich.
10,7	18	12	
4,9	22	21	
10,5	22	24	
11,0	24	75	
3,3	26	> 90	
8,0	26	> 90	
9,0	28	180	Brennt bisweilen einen Augenblick in umgekehrter Richtung.
10,5	30	180	Brennt einige Sekunden in umgekehrter Richtung.
9,2	30	180	
8,5	40	180	Brennt in umgekehrter Richtung.

Der zwischen 6 und 8 Grad schwankende Ausschlag, welcher selbst ohne Einschaltung der Accumulatorenbatterie erfolgte, rührt von dem Federn der Hemmung her.

Wie wir aus obenstehender Tabelle ersehen, hat erst bei einer elektromotorischen Kraft von 18 bis 22 Volt in der Accumulatorenbatterie ein Strom in der Tangentenbussole beobachtet werden können. Vergrössert man hierauf die elektromotorische Kraft der Batterie, so nimmt der Ausschlag in der Tangentenbussole rasch zu. Hieraus zieht Arons den Schluss, dass 18 bis 22 Volt die geringste elektromotorische Kraft ist, die eine Accumulatorenbatterie haben muss, um einen Strom durch die Gasstrecke senden zu können.

In Übereinstimmung mit dem, was ich oben anführte, scheinen mir nun Arons' Beobachtungen auf folgende Weise erklärt werden zu können. Bei beispielsweise 10 Volt in der Batterie ist die Stromintensität des Rückstroms und die Zeit, während

welcher dieser durch die Tangentenbussole ging, zu klein gewesen, um in einem so unempfindlichen Instrument, wie eine Tangentenbussole ist, einen Ausschlag zu beobachten. Es ist nämlich hierbei zu bedenken, dass der Ausschlag in der Tangentenbussole nicht nur eine Funktion der Intensität des Rückstroms, sondern auch eine Funktion der Zeit ist, welche dieser gedauert hat.

Wenn die elektromotorische Kraft der Batterie vergrössert wurde, so wurde auch die Intensität des Rückstroms und infolgedessen auch die Zeit, welche die Gasstrecke fortbestand, grösser. Diese beiden Grössen zusammen bewirken, dass der Ausschlag in der Tangentenbussole mit der elektromotorischen Kraft der Batterie rasch zunimmt.

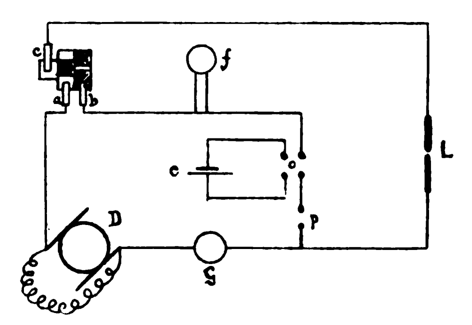
Untersuchen wir ARONS' Beobachtungen näher, so sehen wir, dass bei den Versuchen, wo die elektromotorische Kraft der Batterie 18 und 22 Volt betrug, der Ausschlag in der Tangentenbussole grösser wurde, wenn die Intensität des Centralstroms grösser war. Dies stimmt vollkommen mit der Deutung überein, welche ich den Beobachtungen ARONS' zu geben versucht habe.

Es würde von grossem Interesse gewesen sein, wenn ARONS seine Versuche mit einer Accumulatorenbatterie wiederholt hätte, die so eingeschaltet gewesen, dass sie von dem Centralstrom entladen worden wäre. Das Verhalten des Lichtbogens nach dem Aufhören des Centralstroms müsste dann m. E. ebenso werden, wie es oben erhalten wurde; nach ARONS' Ansicht sollte dann wohl, da ja die Gegenkraft in diesem Fall von der elektromotorischen Kraft der Batterie abgezogen wird, erst bei etwa 40 Volt in der Accumulatorenbatterie ein Strom in der Tangentenbussole entdeckt werden können.

4. Ich habe oben erwähnt, dass es mir gelungen ist, einen Strom aus einem DANIEL'schen Element durch die Gasstrecke zu senden, nachdem der Hauptstrom aufgehört hatte. Da sich der Versuch, den ich hierbei im Auge habe, nur auf schwedisch publiciert findet, will ich jetzt in aller Kürze darüber berichten. Der Versuch ging darauf aus zu untersuchen, inwieweit sich eine elektromotorische Gegenkraft in der Gasstrecke vorfand, nachdem

der Hauptstrom unterbrochen war. Hierbei habe ich mich folgender Anordnung bedient.

In der beifolgenden Figur ist *D* ein SIEMENS'sches Shuntdynamo, *G* ein Strommesser und *L* der Lichtbogen. *e* ist ein DANIEL'sches Element, *o* ein Stromwender, durch welchen die Stromrichtung des Elementes *e* umgeschaltet werden kann. *p* ist ein Quecksilberkontakt und *f* ein abgezweigter Galvanometer. *a*, *b* und *c* sind drei Metallbürsten, über welche das Rad *h* hingleitet. Dieses letztere besteht aus zwei gleich grossen und fest mit einander verbundenen Rädern, von denen das eine aus Metall und das andere aus Ebonit besteht. Beide können um dieselbe Achse rotieren. Der Umfang des Rades war 235,5 mm. Auf der Peripherie des Metallrads befand sich eine grössere



Vertiefung, die mit Ebonit ausgefüllt war und eine Länge von 34 mm. des Umfangs einnahm. Auf der Peripherie dieses Rades ruhte die Bürste *a*, während die Bürste *c* auf dessen Achse lag. Diese letztere Bürste war deshalb immer in Kontakt mit dem Metallrad.

Das Rad *h* wurde durch einen Elektromotor in Rotation gebracht. Der Strom des Dynamos ging dann von der Bürste *a* zu dem Metallrad und von da durch die Bürste *c* zu dem Lichtbogen *L* und zurück zum Dynamo. Einmal während jeder Umdrehung war indess der Strom eine kurze Zeit lang unterbrochen, nämlich wenn die Bürste *a* über das Ebonitstück des Metallrades glitt. Dadurch, dass man dem Rade eine hinreichend grosse Rotationsgeschwindigkeit gab, konnte man die Zeit, die

die Unterbrechung dauerte, so kurz machen, dass der Lichtbogen nicht zum Erlöschen kam, sondern ruhig und stetig weiter brannte.

An dem Ebonitrade war ebenfalls ein Stück der Peripherie in einer Länge von 21 mm. fortgenommen und die Vertiefung mit Messing, welches in leitender Verbindung mit dem Metallrad stand, ausgefüllt. Die Bürste *b* lag auf der Peripherie des Ebonitrades und war so befestigt, dass ihr Berührungspunkt mit dem Ebonitrade mittels einer Schraube ein Stück längs der Peripherie verschoben werden konnte. Der Tangierungspunkt der Bürste *b* wurde nun so gewählt, dass Bürste *b* auf dem Metallstück des Ebonitrades ruhte, während das Ebonitstück des Metallrades über Bürste *a* hinglitt. Wenn daher der Strom des Dynamos unterbrochen war, war die Leitung *cLpob* geschlossen.

Es war natürlich nötig, den Dynamostrom längere Zeit unterbrochen zu lassen als die Galvanometerleitung geschlossen war. Deshalb hatte das Ebonitstück in der Peripherie des Metallrades eine Länge von 34 mm., während das Messingstück 21 mm. vom Umfang des Ebonitrades einnahm. Der Dynamostrom war so eine mehr als 1,5 mal so lange Zeit unterbrochen, als die Galvanometerleitung geschlossen war. Dadurch, dass man die Bürste *b* verschob und dem Rade *h* eine andere Rotationsgeschwindigkeit gab, konnte man die Zeit, welche zwischen dem Öffnen des Dynamostroms und der Schliessung der Galvanometerleitung verfliessen sollte, nach Belieben bestimmen.

Der bei diesen Versuchen verwendete Galvanometer *f* war ein von mir konstruiertes Instrument, welches sich auf das Princip der unipolaren Induktion gründet.[1]) Da dieser Galvanometer keine Drahtspiralen enthält, kann er — praktisch genommen — als frei von Selbstinduktion angesehen werden. Der Ausschlag des Galvanometers wurde mittels Fernrohr und Skala in gewohnter Weise beobachtet.

---

[1]) GRANQVIST, Lunds Univ. Årsskrift 28; Beibl. b. 17, p. 146, 1893.

Der Hergang bei dem Versuche war folgender. Nachdem das Rad *h* in Bewegung gesetzt und die Elektroden einander bis zur Berührung genähert waren, wurde der Strom des Dynamos geöffnet. Nachdem sich hiernach ein Lichtbogen zwischen den Elektroden gebildet hatte, wurde der Strom des Elementes *e* mit dem Quecksilberkontakt *p* geschlossen. Ich erhielt so in dem Galvanometer einen Ausschlag U_1, hierauf wurde die Stromrichtung mittels des Stromwenders *o* umgeschaltet und der Ausschlag U_2 beobachtet. Findet sich in dem Lichtbogen eine elektromotorische Kraft *E*, so ist, wenn *e* die elektromotorische Kraft in dem Element bezeichnet,

$$E = \frac{U_1 + U_2}{U_1 - U_2} \cdot e \, .$$

Die Rotationsgeschwindigkeit des Rades *h* wird durch einen Tourenzähler gemessen, welcher an der Achse des Rades befestigt ist. Die Zeit, welche zwischen dem Öffnen der Dynamoleitung und der Einschaltung der Galvanometerleitung verfloss, bestimmte ich auf folgende Weise. Angenommen, das Rad macht *n* Umläufe in der Sekunde. Die Zeit, welche das Rad braucht, um sich einen Winkel zu drehen, dem auf der Peripherie ein Bogen von der Länge *eines* mm. entspricht, beträgt dann $\frac{1}{235{,}5\, n}$ Sekunden. Wir nehmen ferner an, dass man das Rad einen Winkel drehen muss, dem auf der Peripherie ein Kreisbogen von α mm. entspricht, von da an, wo das Ebonitstück beginnt, über Bürste *a* zu gleiten, bis das Messingstück über Bürste *b* gleitet. Die Zeit zwischen der Öffnung des Dynomostroms bis zur Schliessung der Galvanometerleitung beträgt dann $\frac{\alpha}{n \cdot 235{,}5}$ Sekunden. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass sich bei der Unterbrechung des Dynamostroms zwischen dem Metallrad und Bürste *a* ein kleiner Lichtbogen bildet. Man kann daher von dem Strom des Dynamos nicht annehmen, dass er aufhört, ehe dieser Lichtbogen erloschen ist. Die Länge dieses Metalllichtbogens, welche bei verschiedenen Stromstärken verschieden ist, kann ganz genau

gemessen werden. Nehmen wir an, sie betrage β mm., so ist die Zeit zwischen der Schliessung der Galvanometerleitung und dem vollständigen Aufhören des Dynamostroms $\frac{\alpha - \beta}{n \cdot 235,5}$ Sekunden.

In der folgenden Tabelle bezeichnet I die Stromstärke in dem Lichtbogen, U_1 und U_2 die Ausschläge des Galvanometers und E die im Bogen berechnete Gegenkraft. Die Zeit, welche zwischen dem vollständigen Aufhören der Hauptstroms und der Schliessung der Galvanometerleitung verflossen ist, hat 0,0009 Sekunden betragen.

Tab. II.

Stromstärke im Bogen Amp.	U_1.	U_2.	E.
6,2	+ 30,0	— 18,1	0,27
6,2	24,0	14,1	0,26
5,0	22,0	13,5	0,26
5,2	23,8	14,5	0,24
3,2	19,7	11,5	0,26
7,5	20,2	13,5	0,20
5,6	14,4	10,0	0,20
8,9	14,5	17,7	0,11
5,0	20,5	12,7	0,28
4,0	17,0	10,5	0,24

Med. 0,227 Volt.

Dieser Versuch führt somit zu demselben Resultat wie LECHERS, LUGGENS und STENGERS Untersuchungen, nämlich, dass die elektromotorische Kraft in dem Lichtbogen gleichzeitig mit der Unterbrechung des Stromes im Lichtbogen aufhört. Die kleine elektromotorische Kraft von 0,227 Volt, welche ich 0,0009 Sek. nach der Öffnung des Hauptstroms in dem Lichtbogen erhalten habe, ist mit aller Wahrscheinlichkeit thermoelektrischen Ursprungs. Aus den oben angeführten Versuchen geht ausserdem hervor, dass man, um einen elektrischen Strom durch die

Gasstrecke eines Lichtbogens zu senden, nachdem der Hauptstrom aufgehört hat, keine grössere äussere elektromotorische Kraft als die eines DANIELschen Elementes braucht.

Nachdem das Vorstehende geschrieben war, hat BLONDEL [1] im Journal de Physique über einen Versuch berichtet, den er in der Absicht vornahm, die elektromotorische Gegenkraft in dem Kohlen-Lichtbogen unmittelbar nach dem Aufhören des Hauptstroms zu bestimmen.

BLONDEL hat sich dabei genau derselben Methode bedient, welche ich früher angewandt und welche ich oben beschrieben habe.

Die Resultate seiner Beobachtungen stimmen vollständig mit den meinigen überein. Er hat also in der Gasstrecke eine kleine elektromotorische Kraft erhalten, die sich auf 0,16 Volt belief, während ich bei meinen Versuchen 0,227 Volt erhalten habe.

Aufgrund der angeführten Versuche ist nun aber BLONDEL der Ansicht, dass sich keine grössere elektromotorische Gegenkraft in dem Lichtbogen findet. Der grosse Potentialfall in dem Lichtbogen beruht nach seiner Ansicht auf dem Vorhandensein eines grösseren Widerstandes. Als Grund für diese Annahme führt er auch an, dass beim Wechselstromlichtbogen die Potentialdifferenz gleichzeitig mit dem Strom $= 0$ ist.

Diese Annahme eines grösseren Widerstandes ist nicht richtig, was am besten aus meinen Untersuchungen über den Widerstand in einem Kohlen-Lichtbogen erhellt. Bei diesen Versuchen bestimmte ich mittels Telephon und Induktionsströmen den Widerstand in einem Kohlen-Lichtbogen, der durch einen konstanten Strom unterhalten wurde. Die Grösse, welche ich hierbei für den Widerstand erhielt, stimmte mit derjenigen überein, die aus der Formel

$$V = e + ir$$

---

[1]) BLONDEL, Journal de Physique. Ser. 3. T. VI, p. 513. 1897.

berechnet wird, wo V die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden, und e, i und r die elektromotorische Gegenkraft, die Stromstärke und den Widerstand im Lichtbogen bezeichnen.

Die einzige Annahme über die elektromotorische Gegenkraft, welche mit den seither gemachten Experimenten übereinstimmt, scheint mir die zu sein, dass eine elektromotorische Gegenkraft während des Verlaufs des Stromes im Lichtbogen existiert, aber in demselben Augenblick wie der Strom aufhört.

Stockholm 1897. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 9.

Onsdagen den 10 November.

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot, f. d. Professorn vid universitetet i Lund CHRISTIAN WILHELM BLOMSTRAND, samt utländske ledamoten Professorn i Fysiologi vid universitetet i Breslau RUDOLF HEIDENHAIN med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remisser å fyra underdåniga ansökningar om understöd för utgifvande af vetenskapliga arbeten afgåfvos af särskilda utsedde komiterade infordrade utlåtanden, som af Akademien godkändes.

Äfvenledes afgåfvos och godkändes från utsedde komiterade infordrade utlåtanden med anledning af Kongl. Maj:ts remisser å underdåniga framställningar af den hydrografiska kommissionen, dels angående anslag m. m. för de svenska hydrografiska undersökningarnes fortsättande under år 1898, och dels angående åtgärder för beredande af samverkan mellan Sverige, Norge, Danmark och England vid hydrografiska undersökningar af Nordhafvet, Nordsjön och Östersjön.

Herr NATHORST redogjorde för planen för nästa års svenska expedition till Spetsbergen och de öster derom belägna länderna, Kung Carls land och Ny Island, samt meddelade, att genom frikostiga bidrag af H. M. Konungen, Lars Hiertas minne och flere enskilda personer en så betydande summa redan vore för ändamålet tecknad, att expeditionen kunde i detta hänseende anses betryggad.

Herr PETTERSSON meddelade en öfversigt af i sednare tid gjorda vigtigare upptäckter på den oorganiska och fysikaliska kemiens område.

Herr SMITT förevisade en vid Riksmuseum uppstoppad brefdufva, som blifvit utsänd från den Andrée'ska polarexpeditionen och sedermera någonstädes blifvit dödad samt hit öfversänd.

Herr MITTAG-LEFFLER öfverlemnade det 21:sta bandet af tidskriften »Acta mathematica».

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

i Akademiens Handlingar: »Untersuchungen über die Spectra der Metalle im elektrischen Flammenbogen. IV. Spectrum des Mangans», af Professor B. HASSELBERG;

i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Die Flechten der ersten Regnellschen Expedition. I. Die Gattung Pyxine», af Amanuensen G. O. MALME; 2:o) »Ueber einige aliphatische Abkömmlinge des Oxythioharnstoffs», af Doktorerna C. KJELLIN och K. G. KUYLENSTJERNA; 3:o) »Ueber Bisnitrosylbenzyle», af desamma; 4:o) »Zur Kenntniss der β-substituirten Hydroxylamine», af Doktor C. KJELLIN; och

i Öfversigten: 1:o) »Om en Ceramium-form från Gotland. Ett bidrag till hafsalgernas biologi», af Professor F. R. KJELLMAN; 2:o) »Niväsextant, konstruerad för Andrées polarballong», af Lektor E. JÄDERIN; 3:o) »Zur Morphologie und Biologie einzelliger Algen», af Kandidat K. BOHLIN; 4:o) »Ueber die Transspiration der Halophyten», af Kandidat O. ROSENBERG; 5:o) »Tri-

azolföreningar, framställda af aldehyder och dicyanhydrazin. III.», af studeranden E. L. RINMAN; 6:o) »Till teorien för kometernas upplösning i meteorsvärmar», af Kandidat Ö. BERGSTRAND.

Genom anställda val kallades, dels till inländsk ledamot Professorn i praktisk medicin vid universitetet i Upsala Doktor SALOMON EBERHARD HENSCHEN, samt dels till utländska ledamöter: Sekreteraren hos Royal Society i London Lord JOHN WILLIAM STRUTT RAYLEIGH, Professorn i kemi vid universitetet i London WILLIAM RAMSAY, och Professorn i zoologi vid universitetet i Freiburg, Baden, AUGUST WEISMANN.

Den *Wallmarkska belöningen* för året beslöt Akademien fördela i två lika stora belöningar, af hvilka den ena tillerkändes Professor B. HASSELBERG för hans flere, i Akademiens Handlingar offentliggjorda afhandlingar med den gemensamma titeln: »Untersuchungen über die Spectra der Metalle im elektrischen Flammenbogen», och den andra Amanuensen Doktor H. E. HAMBERG för hans i Bihanget till Kongl. Domänstyrelsens berättelser rörande skogsväsendet offentliggjorda undersökningar: »Om skogarnes inflytande på Sveriges klimat. I—V».

Utaf Regnells zoologiska gåfvomedel beslöt Akademien anvisa följande understöd:

åt Doktor Y. SJÖSTEDT 600 kronor för att under nästa år vid Riksmuseets Entomologiska afdelning bearbeta den samling af Pseudoneuroptera, som han sjelf hopbragt från Kamerun, och som tillhör Riksmuseum, samt

åt Herr A. D'AILLY 250 kronor för att fullfölja ordnandet och bestämmandet af Riksmuseets mollusksamling från Kamerun.

Följande skänker anmäldes:

Till K. Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Karolinska institutet.*
En afhandling. 1897. 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 4 häften. 4:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1897: N:o 8—9. 8:o.

Upsala. *The geological institution of the university.*
Bulletin. Vol. 3: P. 1. 1896. 8:o.
Östersund. *Jämtlands läns fornminnesförening.*
Tidskrift. Bd 2: H. 1. 1897. 8:o.
Amsterdam. *Société mathématique.*
Revue semestrielle des publications mathématiques. Table des matières 1893—97. 8:o.
Basel. *Naturforschende Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 11: H. 3. 1897. 8:o.
Batavia. *Meteorological and magnetical observatory.*
Wind and weather, currents, tides and tidal streams in the East India archipelago. 1897. Fol.
Belgrad. *Académie Royale de Serbie.*
Spomenik. 32: 3. 1897. 4:o.
Glas. 54. 1897. 8:o.
Berlin. *K. Botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. N:o 9—10. 1897. 8:o.
Boston. *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 28 (1897): N:o 1—5. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 34 (1897): N:o 8. 8:o.
Buenos Aires. *Museo nacional.*
Anales. T. 5. 1896—97. 8:o.
Memoria. Año 1894—96. 8:o.
— *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 44 (1897): Entr. 1—3. 8:o.
Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*
Journal. Vol. 65 (1896): P. 3: Special number; 66 (1897): P. 1: N:o 1; P. 2: 1. 8:o.
Proceedings. 1897: N:o 1—4. 8:o.
— *Geological survey of India.*
Records. Vol. 30 (1897): P. 3. 8:o.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 31: N:o 1. 1897. 8:o.
Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Bullettino delle sedute. Fasc. 48—49. 1897. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 5 (1897): N:o 10. 8:o.
Chicago. *Field Columbian museum.*
Publication. 16, 18—20. 1897. 8:o.
Annual exchange catalogue. 2 (1897/98). 8:o.
Coimbra. *Sociedade Broteriana.*
Boletim. 14 (1897): Fasc. 1. 8:o.
Córdoba. *Academia nacional de ciencias.*
Boletin. T. 15 (1897): Entr. 2—3. 8:o.

(Forts. å sid. 506.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 9.
Stockholm.

Om en Ceramium-form från Gotland.

Ett bidrag till hafsalgernas biologi.

Af F. R. Kjellman.

(Meddeladt den 10 November 1897.)

Under ett tillfälligt besök på Gotland i början af september månad 1896 anträffade jag vid Visby en form af Floridéslägtet *Ceramium*, som på grund af sin förekomst och allmänna byggnad synes mig vara förtjent af närmare uppmärksamhet. Under innevarande år sökte jag efter den i juni månad på fyndorten, men lyckades då ej återfinna den. Den växte i litoralregionens öfre del, fästad på stenar, hvilka under lågt, af en bestämd vindriktning förorsakadt vattenstånd stucko upp öfver vattenytan eller lågo alldeles torra. Jag iakttog den under flere dagar i följd fullt torrlagd. Habituelt är den så olik en typisk Ceramium, att man ingalunda, utan en mera ingående undersökning skulle kunna komma att hänföra den till detta slägte. Växtens anatomiska byggnad är dock alldeles tydligt en Ceramium's. Under det de typiska Ceramierna uppträda i yfviga, mer eller mindre glesa, penselformiga tofsar, med sammandragen bas fästade vid stenar, alger eller andra vattenväxter eller hafva en busk- eller trädlik utbildning, bildar den ifrågavarande formen, såsom fig. 1 utvisar, större och mindre, från ett par cm. till ett par dcm. vida, omkring 1 cm. tjocka, öfver stenar utbredda och vid

dessa temligen löst fästa, spongiösa mattor, af en tät, ehuru temligen lös textur, så att de i friskt tillstånd lätt ge efter för tryck. Äfven då dylika mattor längre tid legat blottade, voro de helt genomdränkta af vatten och behöfde mycket lång tid för att torka, om icke vattnet genom hårdt och ihållande tryck förut i möjligast största grad aflägsnades. Till färgen voro de mycket mörkt smutsigt röda, nästan svartröda med större och mindre grönaktiga fläckar. Färgen framträder dock oftast ej tydligt, emedan mattorna mestadels äro i högre grad slammiga, med slammet dels lagradt på ytan dels inträngdt i det inre. Ytan är gropig, men knappt luddig.

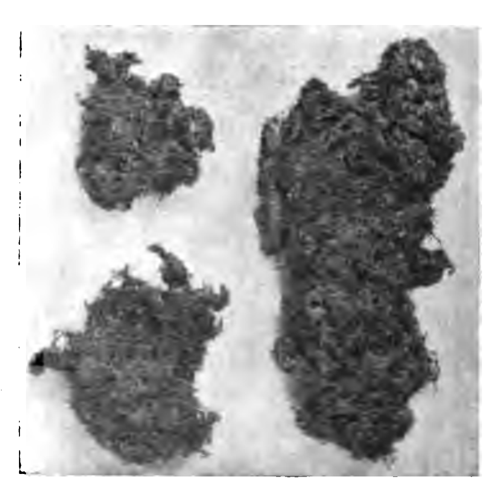


Fig. 1. *Ceramium circinnatum* KÜTZ. Spongiös form, växande på tidvis torrlagda delar af litoralregionen. Gotland. Nat. st.

En dylik matta består af en större mängd i viss grad sjelfständiga axelsystem, hvilka äro invecklade i och fästade oftast mycket hårdt vid hvarandra. Till en del kommer denna byggnad till stånd derigenom, att förgreningen är riklig och grenarne helt och hållet eller till större delen af sin längd horisontala, kilade om hvarandra, men företrädesvis derigenom, att de särskilda axlarne och grenarne äro sammanbundna sinsemellan genom häftorgan. Af grenar förekomma tre slag, nämligen de för dessa växter typiska gaffelgrenarne, som äro grofva, krokiga, ofta

korta och bilda med hvarandra en rät eller nästan rät vinkel; klaselikt, ofta mer eller mindre genomfördt ensidigt utgående grenar, som utbildas i akropetal följd, vanligen blifva korta med mer eller mindre starkt inrullad spets eller i sin helhet skärformiga, vanligen bildande en temligen spetsig vinkel mot moderaxeln; och slutligen en mängd adventivt uppkomna grenar, af hvilka åtminstone flertalet utveckla sig till vanliga gaffelgrensystem, som frigöras, då utgångsaxeln, såsom säkert ofta sker, upplöses; jfr fig. 2 och 3.

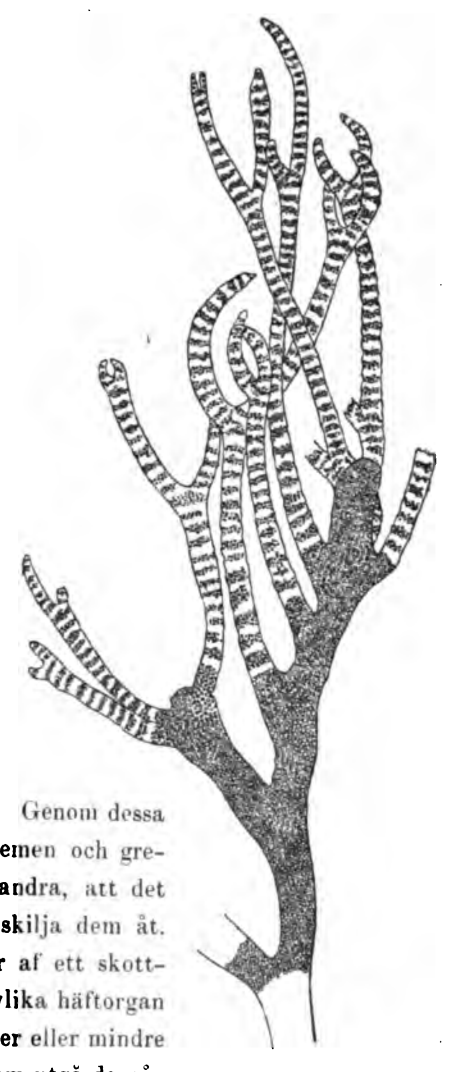


Fig. 2. *Ceramium circinnatum*, KÜTZ. Grensystem, åtminstone delvis adventivt uppkommet, af den spongiösa formen från Gotland. Jfr Fig. 1. $\frac{45}{1}$.

Häft- eller fästorganen utbildas stundom och ofta i mycket stor mängd från samma axel, ej sällan så tätt, att det ena gränsar omedelbart intill det andra. Genom dessa fogas de särskilda axelsystemen och grenarne så hårdt vid hvarandra, att det fordras mycken kraft att skilja dem åt. Dock äro alltid vissa delar af ett skott- eller ett axelsystem utan dylika häftorgan och blifva derför fria och mer eller mindre åtskilda från andra. Stundom utgå de, såsom fig. 3 utvisar, nästan ensidigt, äfven då de förekomma i stor mängd. Deras längd vexlar inom ganska vida gränser, i följd hvaraf de genom de med

hvarandra sammanbundna axlarne ställvis blifva mycket tätt slutna intill, ställvis åter något aflägsnade från hvarandra. Då dessa vexlingar framträda hos en större mängd af de axelsystem, som sammansätta en matta, kommer, såsom lätt inses, en spongiös eller svampig textur till stånd. Håligheter af olika form och storlek uppstå i det inre af mattan, hvilka stå i förbindelse med hvarandra och med det omgifvande mediet. Äfven fästorganens groflek är olika, ehuru i detta afseende ej någon synnerligen stor vexling synes råda. Vanliga tjockleken torde kunna anses vara 120—130 μ. En del af dessa organ, och företrädesvis de



Fig. 3. *Ceramium circinnatum*, KÜTZ. Spongiös form från Gotland; jfr fig. 1; *a* äldre rotbildande axelsystem; *b* ung axel med en rot. $\frac{45}{1}$.

af dem, som hafva mindre längd, äro enkla, i spetsen utvidgade till en nedtryckt kägelformig, om en s. k. callus radicalis mycket erinrande, i kanten mer eller mindre flikig eller vågig skifva. Denna är så hårdt vidfäst, att organet oftast förr brister, än vidfästningsskifvan släpper tag. Då de hafva större längd, kunna de antingen vara enkla eller också grena sig, och då antingen dikotomt eller trichotomt, med nästan lika långa och lika starkt utbildade grenar. Om i detta senare fall alltid alla eller stundom

blott den ena af grenarne, då de äro två, eller blott två af dem, då de äro tre, sluta i en fästskifva, måste jag lemna oafgjordt; jfr fig. 4 *a*. De hafva i sin öfre (inre) del en tydligt cellig byggnad, ehuru cellväggarne, såväl och kanske isynnerhet längsväggen som tvärväggarne, mest äro starkt förtjockade, stundom så starkt, att cellrummet i sin helhet eller ställvis är nästan fullständigt förträngdt. Sjelfva callus har deremot icke någon cellig struktur utan utgör blott en utvidgning af toppcellens ända; jfr fig. 4 *d*. Utvecklingen af dessa organ är, såsom ju var att antaga, bunden vid nodi eller rättare vid de kortikerade skottdelarne. Såsom fig. 3, *b* visar, kunna de utvecklas från

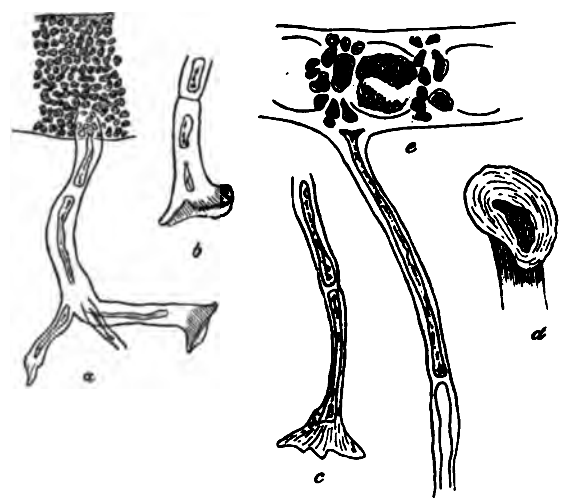


Fig. 4. *Ceramium circinnatum*, KÜTZ. Spongiös form från Gotland; jfr fig. 1; *a*—*c* rötter, $\frac{145}{1}$; *d* vidfästningsskifvan af en rot, sedd snedt underifrån, $\frac{175}{1}$; *e* inre delen af en rot, visande dess utveckling ur en kortikalcell, $\frac{250}{1}$.

mycket unga skottdelar, sålunda från nyss uppkomna kortikalceller. Initiet utgöres alltid af en kortikalcell; fig. 4 *e*. Då dessa utgångsceller ju alltid ega starkt utbildade kromatoforer, är det gifvet, att fästorganens celler också innehålla dylika. Men mången gång äro de svagt utvecklade, ofta nästan till omärklighet förkrympta. Alltid bildas hvarje häftorgan af en rad celler; kortikalceller utvecklas icke, hvarigenom de sålunda skilja sig från axlar af skottnatur. Vid utgåendet rikta

de sig vinkelrätt mot moderaxeln, men kunna sedermera böja sig åt olika håll. Om en förgrening inträder, blifva grenarne starkt utspärrade. Att dylika rotliknande organ icke blott framkomma från äldre axlar utan äfven från unga, i utveckling stadda slutgrenar är ofvan antydt; jfr fig. 3 *b*.

Individbildningsorgan har jag icke iakttagit hos växten, men ser icke något hinder för, att dylika, åtminstone gonidiogonier, skulle kunna komma till utveckling genom ombildning af kortikalceller, då en kortikalväfnad af den för Ceramierna typiska strukturen regelbundet förekommer. Föröfrigt torde det väl kunna anses i hög grad sannolikt, att axlar af det slag, som den gröfre starkt kortikerade axeln i det fig. 2, *a* afbildade axelsystemet kunna lefva öfver från en vegetationsperiod till en annan och gifva upphof till nya individ.

Då denna växt, såsom af det föregående framgår, har en från alla hittills beskrifna Ceramier i hög grad afvikande organisation, skulle det ligga nära till hands att utgifva den för en särskild art. Jag tror dock, att det icke vore berättigadt att tilldela den arträtt, utan att man måste anse den vara en biologisk form af någon annan art. Ett bestämdt skäl härför ser jag deri, att i närheten af dess förekomstort växte på djupare vatten en typiskt utbildad Ceramium, fäst dels på sten dels och företrädesvis på hafsväxter af olika slag, till hvilken den i sin anatomiska byggnad i hufvudsak ansluter sig, och med hvilken den, efter hvad jag trott mig finna, är genom mellanformer förbunden. Denna Ceramium synes mig tillhöra arten *C. circinnatum* KÜTZ., såsom den begränsats af J. G. AGARDH i hans nyligen utkomna monografiska bearbetning af det så svåra slägtet Ceramium; J. G. AG. Typ. Ceram. s. 30. Visserligen kan det icke förnekas, att åtskilligt i J. G. AGARDHS karakteristik af denna art icke fullt tydligt passar in på den Gotländska växten, men det är ju väl kändt, att den form, under hvilken andra alger uppträda i Östersjön, ofta i ganska betydlig grad afviker från den typiska, under mera normala eller gynsamma förhållanden lefvande formen; jfr fig. 5.

Det vore utan tvifvel möjligt att tänka sig denna i spongiösa massor uppträdande form af Ceramium circinnatum vara af helt tillfällig natur. Den skulle kunna hafva uppkommit så, att på djupare vatten vuxna och på normalt sätt till ett tätt och rikt penselformigt knippe utbildade exemplar slitits loss från sitt primära substrat och drifvits in på så grundt vatten, att de åtminstone under vissa, en längre tid rådande vindförhållanden helt och hållet eller i det närmaste torrlagts. Vid torrläggningen hafva knipporna kommit att ligga efter bottnen, sammanfallit och täckts med ett tunnare slamlager. Liflig rotbildning skulle sedermera hafva inträdt, möjligen befordrad



Fig. 5. *Ceramium circinnatum*, KÜTZ. Växande på så djupt vatten, att den icke vid lågvatten torrlägges. Gotland. Nat. st.

af den tryckretning, som utöfvats dels af bottnen dels af de särskilda axlarne inbördes, hvarigenom växten fästs vid bottnen ånyo och en sammanfiltning uppkommit; jfr BORGE, Rhizoidenbild. Om under tiden och derefter från de hopfiltade skotten nya skott utvecklats, bör slutligen en form hafva uppkommit, som väl i hufvudsak skulle hafva samma organisation som den ofvan beskrifna.

Efter ett sådant sätt att se, skulle växten i fråga såväl till sin byggnad, sin uppkomst och graden af tillfällighet visa en viss öfverensstämmelse med den Ceramium tenuissimum,

LYNGB., hvilken J. REINKE anträffat i närheten af Kiel och om hvilken han säger: »liegt auch häufig in losgerissenen Rasen im ganz flachen Wasser, dann aber immer steril und aus den Knoten Wurzelhaare treibend; REINKE: Algenfl. s. 25.

Mot ett sådant uppkomstsätt och en så hög grad af tillfällighet synes mig dock bestämdt tala, att växten förekom i väl skilda mattor af tydligt individuell natur och inom en noga bestämd bottenregion af betydlig utsträckning i horisontal riktning. Detta måste jag anse häntyda derpå, att den uppvuxit direkt från något slags fortplantningskropp på den plats, der den förekom. Dess egendomliga utbildning måste i så fall uppfattas såsom förorsakad af de ovanliga lefnadsförhållanden, under hvilka den kommit att växa: starkare insolation, ökad värme, minskadt tryck m. m. Att dylika förhållanden i hög grad inverka formbildande på hafsalger är genom flere direkta iakttagelser tydligt ådagalagdt. Såsom bevis på att de kunna verka i riktning åt bildningen af en sådan organisation som den, hvilken utmärker den ifrågavarande formen af Ceramium circinnatum, torde följande uppgifter kunna anföras.

Af *Porphyra laciniata* (LIGHT.) AG. anför WILLE en *β scopulorum* med »tuveformigt, og man kunde sige sammenkrøllet» utseende; WILLE, Alg. Phys. Anat. s. 38. En dylik form känner jag genom egen iakttagelse från Bohuslän och kan med bestämdhet påstå, att den växte ofvan den vanliga vattennivån. En liknande form af en Ulva har jag beskrifvit från Japans kust. Denna har jag väl icke samlat sjelf, men tror mig icke hafva tagit miste, då jag af dess utbildning, form och färg slutit, att det är en form, som växer högt upp i litoralregionen och åtminstone under längre tid torrlägges; jfr KJELLM. Jap. Chloroph. Andra exempel på att alger, som växa på så ringa djup, att de tidvis torrläggas, hafva en mer eller mindre starkt utbildad spongiös byggnad, äro icke sällsynta. Inom Polarhafvet, särskildt vid Novaja Semlja i det inre af den djupa Besimannaja-bay, fann jag på skyddad kust *Rhodochorton Rothii* uppträda i form af ytterst täta, vida, temligen tjocka mattor, i

vissa afseenden erinrande om dem, som den ifrågavarande formen af Ceramium circinnatum bildar. Om en också obetydlig sänkning af vattennivån här inträdde — och en sådan är ju i dessa trakter vanlig, beroende af vindriktning och isgång — så skulle dessa mattor blifvit torrlagda; jfr KJELLM. Algæ arct. Sea s. 186. Om denna art från Färöarne anför LYNGBYE, att den förekommer »ad rupes abruptas in summo refluxus limite, interdum ad latera rupium glomerulos durissimos formantes»; LYNGB. Hydr. dan. s. 129. Möjligen och antagligen är det en liknande form, som jag träffat vid Gjæsvær på Norges Finmarks-kust och beskrifvit såsom *Rh. Rothii* f. *globosa*. Den växte »in the upper part of the litoral zone» och var sålunda under ebb torrlagd. Med stor sannolikhet har man att sätta denna växts ytterst täta förgrening i samband dermed, att den lefde så högt upp, om också måhända till dess form i någon mån bidrog, att den förekom på platser, »exposed to a heavy surge»; KJELLM. Algæ arct. Sea s. 185—186. Ett godt stöd för mitt ofvan uttalade antagande lemnar också *Callithamnion arbuscula* (DILLW.) LYNGB., sålunda en med Ceramierna beslägtad växt. Om den anger EKMAN i sin afhandling: Bidrag till kännedomen af Skandinaviens hafsalger (s. 9), att den, som förekommer öfverallt på strandklipporna emellan tidvattensgränserna omkring Christianssund vid Norges vestkust, här uppträder under tvenne former, af hvilka den ena genom förgreningsarten och grenrikedomen »får utseendet af en liten skaftad kon eller halfklot och för känseln förefaller ungefär som en mjuk svamp. Denna form är den vanligaste och förekommer på sluttande strandklippor, der den vid vattnets undansjunkande lemnas på det torra». Många exemplar af denna art, på hvilka denna beskrifning träffar in och som antagligen vuxit på samma sätt, finnas bland de mycket rika algsamlingar, nuvarande Doktor E. KLEEN gjorde i norska Nordland.

H. H. GRAN, hvilken på ett synnerligen förtjenstfullt sätt bidragit till utredning af den Norska hafsalgflorans allmänna karakter, har senast i en detta år utkommen framställning af

Kristiania-fjordens algflora egnat en särskild uppmärksamhet åt den i den norska hafsalgvegetationen så ytterst vigtiga litoralfloran och äfven lemnat vigtiga bidrag till denna vegetationsafdelnings biologi. Han påpekar härvid (s. 10), huru som en del af florans mest allmänna arter: *Ceramium rubrum*, *Polysiphonia violacea*, *P. nigrescens* och *P. urceolata*, förekomma under olika former såsom beståndsdelar af åtskilliga litorala formationer, som också kunna uppträda nästan »i alle dybder», och att de litorala formerna af dessa i allmänhet hafva mycket täta grensystem, hvilken utbildning efter all sannolikhet är att sätta i direkt samband med de förhållanden, som råda inom litoralregionen; jfr GRAN, Kristianiafj. Algefl. anf. st. En äfvenledes hithörande iakttagelse anföres af P. BOYE i hans allt erkännande värda: *Bidrag til kundskaben om Algevegetationen ved Norges vestkust.* Bland flere andra af honom funna och väl karakteriserade algformationer omtalar han äfven en *Gelidium*- och en *Catenella*-formation, hvilka uppträda på stenar under Ascophyllum nodosum, sålunda strängt litoralt, den förra bildad af *Gelidium crinale* (TURN.) J. AG., »der med sine indfiltrede individer bedækker underlaget som ett tæppe», den senare likaledes bildad af »et tæt væv af sammenfiltrede individer», som ofta alldeles täckte stenarne»; s. 29—30. En dylik form af en Gelidium-art har jag också sjelf iakttagit. Vid Japans kust kläddes flerestädes stenarne vid eller strax ofvan högsta vattenståndet af en tät och hårdt sammanbunden, mycket låg matta af en *Gelidium corneum* GREV. nära liknande växt. Normalt utbildad fanns samma växt på djupare liggande delar af bottnen.

En form af lika värde som de nu anförda och dem liknande anser jag den ofvan beskrifna formen af *Ceramium circinnatum* vara, sålunda utgörande ett individuellt helt och framkommen såsom följd af ej typiska lefnadsförhållanden. Att det i första hand är den i följd af vattnets ringa djup eller växtens torrläggning inträdande starka belysningen, som är den verksamma faktorn, torde man kunna med allt skäl antaga, sedan BERTHOLD visat såväl genom studier i naturen som genom experimentella

undersökningar, att af åtskilliga alger likartade former uppkomma, då de utsättas för stark belysning.

Af hans framställning framgår, att i allmänhet en rikligare förgrening inträder vid ökad belysning, att alger genom tätare växt i första hand tillpassa sig till en större ljusmängd, att hos t. ex. en Antithamnion vid för stark inverkan af ljus axillära skott massvis bildas och att hos samma växt, om den utsättes för stark ensidig belysning, på den från ljuset vända sidan rötter bildas, hvilka draga ned växten till bottnen ur det intensiva ljuset; jfr BERTH. Morph. u. Physiol. d. Meeresalg., S. 664, 667, 668, 683 m. fl.

Om jag sålunda icke kan uppfatta den ifrågavarande växten såsom en fixerad form eller art, så utesluter dock icke detta, att former af samma byggnad och samma ursprungliga utveckling under tidernas lopp kunnat fixera sig och nu framträda såsom sjelfständiga arter. Någon sådan finnes, så vidt jag känner, icke inom den Skandinaviska algfloran, men från andra floromraden äro dylika bekanta. Ty såsom sådana måste man väl betrakta åtminstone de båda arterna af slägtet *Hypnea*, *H. pannosa* och *H. horrida*, hvilka man endast känner i form af »täta nedtryckta och utbredda tufvor» (mattor), uppkomna genom en utomordentlig stark och tät förgrening, hvarvid de nedre grenarne ofta sammanväxa till ett slags nätverk och endast de yttre, ofta bågformigt böjda, förblifva fria, sålunda en konstruktion, som i väsentliga afseenden liknar den hos den Gotländska formen af *Ceramium circinnatum;* jfr J. G. AG., Florid. Morph. s. 9. Den citerade författaren anför utom dessa algformer, hvilka »synas utgöra egna arter» äfven en del andra af samma byggnadstyp, men som enligt hans uppfattning böra anses »vara vanliga arter, som antagit en egen form», sålunda växtformer af ungefär samma värde och betydelse, som jag ansett böra tilldelas den Gotländska formen af *Ceramium circinnatum.*

Utgår man från det, som mig synes, berättigade antagandet, att sådana växter som de anförda *Hypnea*-arterna uppkommit genom fixering af tillfälliga former med lika byggnadstyp, så

måste man väl också gerna tänka sig något ändamål med en sådan fixering, sålunda något i en dylik konstruktionsform innehållet, för växten vigtigt biologiskt moment. J. G. AGARDH synes också hysa en sådan uppfattning om denna egendomliga byggnadstyp. Han säger nämligen om de af honom uppgifna algarterna och algformerna, som bilda dylika, täta, nedtryckta och utbredda (spongiösa) tufvor, att »de genom sin form tyckas böra bäst kunna trotsa ett våldsamt haf» och sålunda vara lämpade att växa på för hafssvall mera exponerade lokaler. En likartad betydelse tilldelar också WILLE i sitt förut anförda arbete: *Bidrag til Algernes Physiologiske Anatomi* denna byggnadsform. I den öfversigt han lemnar af »visse Forholde, som gjöre mere fremtrædende mekaniske Hjælpemidler overflödige», upptar han såsom den tredje gruppen sådana alger, hvilka utmärkas deraf, att »Individerne voxe sammen i Tuver eller Puder», och anför inom denna grupp de af J. G. AGARDH omtalade algarter och algformer, som i det föregående omnämnts. I dessa algers täta tufbildning skulle alltså, enligt hans sätt att se, ligga en så stark mekanisk konstruktion, att en utbildning af särskilda mekaniska väfnader eller utvecklingen af en särskildt motståndskraftig byggnadsform blefve öfverflödig och denna tufform i och för sig sålunda vore tillräcklig för att sätta växten i stånd att växa på »særligt for Havets virkninger udsatte Steder». Denna byggnadsforms egentliga betydelse synes författaren vilja se deri, att »Algen ved tuvet Væxt ikke er saa udsat for Vandets Paavirkning, d. v. s. frembyder langt mindre Angrebsflade for Bölgerne» än den mera utbredda växtformen; WILLE, Alg. Phys. Anat. s. 36—38.

Mig förefaller en sådan uppfattning som denna föga sannolik. Jag kan icke inse, att en växt, som bildar en tät, öfver substratet upphöjd tufva eller matta, sådan som den jag beskrifvit hos litoralformen af *Ceramium circinnatum* eller den, i hvilken enligt J. G. AGARDH *Hypnea pannosa*, *H. horrida* m. fl. arter uppträda, och icke ens den, som WILLE (anf. st.) anger såsom utmärkande för *Porphyra laciniata β scopulorum* vara särskildt

egnad att motstå vågornas såväl sönder- som lösslitande kraft. Så vidt jag kan finna, erbjuda dylika växter en fullt tillräcklig angreppsyta och då de delar, af hvilka tufvan består, icke kunna följa vågen och liksom fixeras i denna, utan den täta tufvan i sin helhet bildar motstånd, måste den både lättare splittras och lösryckas af häftigt vågsvall än en af fria, fina, böjliga, eftergifvande och vågen medföljande delar bestående algkropp. Det vill sålunda synas mig, som skulle en typisk, i gles tofs växande *Ceramium circinnatum* eller *Hypnea*-art vara bättre lämpad att motstå vågornas angrepp än den tufvade formen af den förstnämnda arten eller de förut anförda tufviga *Hypnea*-arterna. Jag kan följaktligen icke i dessa tufalger se växtformer, lämpade att »trotsa ett våldsamt haf», utan måste antaga, att, om öfverhufvud taget de ega någon biologisk inneb örd, denna måste vara en annan, eller med andra ord, om ur en tillfällig form sådan som litoralformen af *Ceramium circinnatum* från Gotland skulle under tidernas lopp framgå en fixerad art af samma karakter som *Hypnea pannosa* eller *H. horrida* och ett visst biologiskt ändamål med en sådan afsåges, detta icke vore förmågan att växa på för häftigt vågsvall utsatta ställen utan någonting annat.

Jag har ofvan anfört, att den här i fråga varande litorala formen af *Ceramium circinnatum* bildar i hög grad spongiösa tufvor, att i dess talrika större och mindre håligheter en större mängd vatten samlar sig och håller sig länge qvar, så att det endast genom stark och långvarig pressning kan aflägsnas och att derför den ur vattnet upptagna växten länge förblir vattendränkt, om den lemnas åt sig sjelf. Att detsamma är fallet med de öfriga med den jemförda litorala formerna af andra arter synes mig icke kunna bestridas. Det vill också förefalla mig som om de tufviga arterna *Hypnea pannosa* och *H. horrida* genom sin byggnad skulle förmå upplagra i sin spongiösa kropp större vattenmängder och bibehålla dessa under längre tid, om de torrläggas. Jag antar derför att dessa arter lefva på bottenområden, som under vissa tider blifva blottade. Om man så-

lunda vill antaga, att den byggnad, dessa växter ega, verkligen är fixerad och söker efter den biologiska betydelsen härtill, skulle väl denna vara att finna deri, att en sådan konstruktionsform är väl egnad att göra växten till en sträng litoralform i trakter, der betydliga förändringar i vattennivån regelbundet inträda och detta, emedan den sätter växten i stånd att qvarhålla under torrläggningstiden så stor mängd vatten, att den icke torkar eller t. o. m. att den utan starkare hämning kan fortsätta sitt lifsarbete.

Äfven inom vårt florområde torde det finnas en del fixerade arter af en liknande, för litoralt lif lämpad byggnadsform. Såsom en sådan torde man kunna betrakta *Ceramium acanthonotum* CARM. Denna är enligt föreliggande uppgifter vid Norges kust en sträng litoralform, hvilken ofta förekommer tillsammans med *Callithamnion Arbuscula* (DILLW.) LYNGB.; jfr KLEEN, Nordl. Alg. s. 21; HANST., Algereg. s. 348; BOYE, Algeveg. s. 22. När denna växt är väl utvecklad, bildar den mycket täta bollformiga massor, hvilka förmå bibehålla en större mängd vatten i sitt inre, då de under ebbtid blottas. I likhet med litoralformen af *Ceramium circinnatum* utvecklas från axlarnes nedre del rotlika häftorgan, hvilka väl bidraga att gifva åt nedre delen af bollarne en spongiös byggnad.

Bland sådana arter anser jag att man också kan räkna arter af slägtet *Acrosiphonia*. Särskildt skulle jag i detta hänseende vilja rikta uppmärksamheten på *Acrosiphonia hamulosa* KJELLM. Denna växer enligt mina iakttagelser epifytisk på *Gigartina mamillosa* (GOOD. & WOODW.) J. G. AG. inom öfre delen af litoralregionen vid Norges nordkust och ligger sålunda blottad under hela ebbtiden. Den bildar tufvor, hvilka såsom fullt utvuxna äro bollformiga, bestående af högt upp förbundna qvastlika knippor. Dessa äro hårdt sammanfiltade, hvilket åstadkommes genom utvecklingen af talrika krokgrenar och krokskott samt talrika rotlika axlar, som utgående från skottsystemets öfre del dels under sitt förlopp nedåt omslingra flere eller färre axlar dels med sina till grip- och häftorgan ombildade spetsar fästa sig vid andra axlar än dem, från hvilka de utgå och sålunda fastbinda den ena axeln vid

den andra; jfr KJELLM., Acrosiphonia s. 50, tafl. 1, fig. 4—5. Det är tydligt, att en växt af denna byggnad skall ega stor förmåga att bibehålla inom sig under längre tid en större mängd vatten och visst är det också, att den, då den torrlägges, är ytterst vattenrik. Jag kan icke inse, att de hos denna art så ytterst talrika krokskotten och krokgrenarne och den mycket stora mängden sammanbindande rotlika axlar låta tolka sig på annat sätt, än att de syfta till frambringande af en spongiös konstruktion, genom hvilken växten blir i stånd att lefva på bottenområden, som regelbundet längre tid torrläggas. Väl är det sannt, att genom denna byggnad växten erbjuder ett stort motstånd mot vågornas sönderslitande kraft, men å andra sidan lemna dessa, i spetsarne på Gigartina fästade bollar en så stor angreppsyta mot vågorna, att växten, om den förekomme på starkt exponerade ställen, lätt skulle råka i fara att slitas lös och derigenom gå sin undergång till mötes. Hos arter af detta slägte, som växa på djupare vatten, är byggnaden vida lösare, hvarför växten, då den upptages ur vattnet, sammanfaller mycket starkt. Så är t. ex. fallet med den ståtliga *A. setacea* KJELLM., som helt och hållet saknar krokgrenar, liksom också med *A. centralis* (LYNGB.) KJELLM., som väl eger dylika organ, men endast i mycket ringa mängd. Häraf skulle man ju kunna ledas till det antagandet, att arter sådana som *A. hamulosa* utvecklats ur arter med enklare byggnad sådana som *A. setacea* och *A. centralis* och att bildningen af krokskott och krokgrenar ursprungligen förorsakats af tillfälliga omständigheter, men i vissa fall bibehållits och drifvits till större omfattning för ernåendet af ett bestämdt biologiskt ändamål, i detta fall, förmågan att växa inom den tidtals blottade litoralregionen.

Mot ofvan angifna uppfattning af den biologiska betydelsen af en spongiös struktur hos alger kan den invändningen göras, att, om denna vore riktig, man borde kunna vänta sig, att en så ändamålsenlig byggnadsform fått vidsträcktare användning särskildt inom områden med starkare ebb och flod än i sjelfva verket förhållandet är. Ty det kan icke förnekas, att t. o. m.

vid Norges vestra kust, der en så stor mängd algarter uppträda inom litoralregionen, att man kan anse denna såsom florområdets artrikaste bottenbälte, en dylik form fullt fixerad och starkare utbildad ingalunda är någon allmän företeelse, och att vid Sveriges vestra och östra kust, der oaktadt frånvaron af tidvattensströmningar dock ganska betydliga olikheter i vattennivån af och till inträda, knappast någon enda art uppträder i en sådan byggnadsform skarpare utpräglad. En dylik invändning låter sig dock gendrifvas dermed, att denna strukturform ingalunda är den enda, som leder till det målet att skydda alger mot intorkning under torrläggning. Man kan ju säga, att de på dylika ställen lefvande algerna äro i viss grad xerofyter och liksom det bland landtxerofyterna gifves en mångfald konstruktionsformer, i mycket sins emellan olika, men dock ledande till samma mål, utveckling hos dessa så att säga hafsxerofyter kunnat gå och gått i väsentligt olika riktning.

Allmänt kändt är det ju, att en mycket vanlig och mycket kraftig organisation hos landtxerofyter utgöres af vattenuppsamlande och vattenbehållande väfnader af olika slag. Att en likartad organisation äfven före- kommer hos alger och särskildt hos hafsalger är väl också att beteckna såsom allmänt bekant, om också någon närmare utredning af dessa väfnaders betydelse i algernas lif icke ännu, så vidt jag har mig kändt, föreligger. I det af WILLE utgifna vidlyftiga och innehållsrika arbetet öfver algernas fysiologiska anatomi, som nära ansluter sig till HABERLANDTS utredning af företrädesvis fanerogamerna från denna synpunkt, behandlas algernas upplagsväfnader mycket knapphändigt. Den del af växternas »Speichersystem» HABERL., som af HABERLANDT framställes såsom organisation för »Speicherung des Wassers» affärdar WILLE helt kort med: »Et Magasinsystem for Vand er jo for de fleste Alger, som altid leve i Vandet ubehöveligt og de Arter, som leve i Fjæren og saaledes regelbundet blive liggende törre paa bestemte Tider, maa nöie sig med det Vand, som findes i deres stærkt opsvulmede Membraner»; WILLE, Alg. Phys. Anat. s. 63. WARMING, som i sina »Plantesamfund»

haft anledning att komma in på detta ämne, uttrycker sig mycket tveksamt om svällväfnadernas betydelse i algernas lif. Han säger: »Stærk Slimdannelse findes hos mange (Nereider) især i Fjæren voxende og tjener maaske til at værne mot Fordampning under Ebben»; anf. st. s. 121. Längre fram (s. 109) i samma arbete synes han vara mera benägen att i denna »Slimdannelse» se uteslutande eller företrädesvis en mekaniskt verksam organisation. Här har hans uppfattning fått följande uttryck: . . . »den Slim, der ofte findes om Alger i stærkt bevæget Vand f. Ex. Nemalion multifidum, maa beskytte dem mod Vandbevægelsernes Voldsomhed (og Udtörring?).»

För min del måste jag omfatta den åsigten, att de mäktiga svällväfnader, af hvilka litorala algers kropp är bildad, utgör ett kraftigt medel för dessa växter att hålla sig fullt lifskraftiga eller åtminstone vid lif under tider, då de torrläggas. Den skandinaviska algfloran lemnar många exempel på litoralalger med dylik byggnad. Bland dessa må några här anföras. De arter af slägtet *Enteromorpha*, som växa på djupare vatten och sålunda icke torrläggas såsom t. ex. *E. compressa* J. G. AG. hafva alla cellväggar tunna och knappt svällande, under det sådana arter, som *E. micrococca* KÜTZ. och *E. instestinalis* (L.) LINK hafva förtjockade och svällande cellväggar. Starkast utbildad i denna riktning är den förstnämnda (E. micrococca). Af AHLNER's uppgift att döma skulle väl den knappast vara att räkna bland de litorala algerna i Bohuslän; AHLN. Enterom. s. 46—47. Jag har dock der funnit den växa i eller något öfver vattenytan. HANSTEEN omnämner den från ett par ställen vid Norges vestra kust och alltid såsom litoral, tillhörande öfre delen af en litoral Enteromorpha-formation eller växande inom litoralregionen i öfversta vattenmärket eller ofvan detta; HANST. Algereg. s. 358, 360.

Anmärkningsvärd är den utan tvifvel riktiga uppgift, som AHLNER lemnat om *E. instestinalis*, att nämligen det förtjockade väggskikt, svällskiktet, som är karakteristiskt för denna art, är tjockast hos sådana former, som växa på mycket grundt vatten,

men tunnare i samma mån växten förekommer på större djup; AHLN. Enterom. s. 17. *Porphyra laciniata* (LIGHTF.) AG. i vidsträckt omfattning är, såsom väl bekant, också utmärkt genom en ytterst kraftig svällväfnad. Den är strängt litoral och uppträder stundom inom öfversta delen af litorala regionen i vida, täta bestånd, som vid inträdande lågvatten torrläggas, utan att derför växten dödas; jfr KJELLM., Algenreg. s. 11; GRAN, Kristianiafj. algefl. s. 9; HANST., Algereg. s. 346; GRAN, Algev. Tönsbergsfj. s. 18; BOYE, Algeveg. s. 20. *Bangia fuscopurpurea* (DILLW.) LYNGB. synes mig också lemna ett hithörande exempel. Äfven den har starkt svällande cellväggar och kan i dem uppsamla och länge fasthålla en stor mängd vatten. Härtill kommer, att den växer i mycket täta mattor, hvilka vid torrläggning ytterligare förtätas derigenom att skotten ull-likt hoprulla sig, hvarigenom mattan sammanfiltas. Växten är en typisk litoralalg. Flere gånger har jag sommartiden anträffat den i Bohuslän ofvan vattenytan och äfven på ställen med så skyddadt läge, att den icke träffades af vågsvall. WILLE har om den eller en närstående form uttalat, att »få Alger kunne vokse så höjt over den almindelige Vandstand»; jfr HANST., Algereg. s. 355 och GRAN, Kristianiafj. Algefl. s. 9—10. Likartade exempel lemna *Nemaleon multifidun* (WEB. & MOHR) J. G. AG., *Gigartina mamillosa* (GOOD. & WOODW.) J. G. AG., *Rivularia*-arter m. fl. Den ojemförligt vigtigaste beståndsdelen i den nordiska litoralfloran utgöres emellertid af Fucaceer och man kan väl utan tvekan instämma i den af GRAN uttalade åsigten, att »de fleste af vore Fucaceer synes at være særlig tilpassede til de ugunstige livsvilkaar», som råda inom litoral-regionen öfverhufvud, men isynnerhet »paa Steder, som ved sin beliggenhed er beskyttede mod bölgeslag», och detta väl i första hand derigenom, att deras »inre dele er meget vandholdige», d. v. s. bestå af svällväfnader; jfr GRAN, Kristianiafj. Algefl. s. 7—8. Detta är ju fallet med arterna af slägtena Pelvetia, Ascophyllum och Fucus, växter som utgöra hufvudmassan af strandvegetationen såväl vid Sveriges som i synnerhet Norges kuster, under det

dylika svällväfnader saknas eller äro mycket svagt utvecklade inom det rent vegetativa systemet hos den inom sublitoralregionen växande *Halidrys siliquosa* (L.) LYNGB.

Då det dock är ett kändt förhållande, att det inom den nordiska hafsalgfloran gifves arter med starkt utbildade slem- eller svällväfnader, sådana som t. ex. åtskilliga Chordariaceer, men icke växa på områden, hvilka blottas vid lågvatten, är det väl att antaga, att utbildningen af dylika väfnader icke får uppfattas såsom en direkt och ursprunglig tillpassning till de lifsförhållanden, som råda inom litoralregionen, utan att denna, om ej alltid, så dock i vissa fall haft ett annat ändamål — hos Fucaceerna och kanske äfven andra sannolikt att betrygga befruktningsakten eller i allmänhet de lifsföreteelser, som stå i samband med fortplantningen. Men äfven om så är fallet, hafva dock dessa växter genom en sådan organisation blifvit bättre än andra lämpade att lefva under förhållanden, som göra upplagring af vatten af behofvet påkallad äfven för de rent vegetativa funktionernas ostörda fortgång och derför kunnat utbreda sig öfver den litorala regionen i trakter, der starkare förändringar i vattennivån inträda, här utveckla stora individmassor och sammansluta sig till täta bestånd eller väl karakteriserade formationer. Om man utgår från det, som det vill synas, ej alldeles ogrundade antagandet, att de Fucaceer, hvilkas skott är uppdeladt i en sträng vegetativ och en fertil (receptakel-)region såsom t. ex. våra Fucusarter, leda sitt ursprung från former analoga med t. ex. *Splachnidium*-typen, som karakteriseras af öfver hela det starkt gelatinösa skottet strödda skafidier, så skulle man ju kunna antaga, att den för befruktningsändamålet ursprungligen uppkomna svällväfnaden bibehållits äfven inom den rent vegetativt blifna skottregionen hos sådana former, som fortfore att lefva inom litoralregionen eller af en eller annan orsak förflyttade sig hitupp, emedan denna väfnad var af fördel för lifvet inom denna bottenregion. Under sådana förhållanden skulle ju dessa svällväfnader hos litorala alger kunna med full rätt betecknas såsom innebärande en tillpassning till de för-

hällanden, som utmärka litoralregionen, äfven om deras primära tillkomst haft en annan orsak.

Inom litoralregionen och särskildt på områden, der starkare tidvattensströmningar förekomma finnes det emellertid ett ej ringa antal arter, hvilka hvarken genom spongiös byggnad eller genom starkare utbildade slemväfnader äro rustade mot torrläggning. Beträffande en stor mängd af dessa gäller utan tvifvel, hvad GRAN riktigt angifvit och med fullt skäl framhållit, att de genom sin epifytiska förekomst på Fucaceer äro skyddade mot intorkning; jfr GRAN, Kristianiafj. algfl. s. 8. Jag erinrar i detta hänseende om den ofantliga mängd *Polysiphonia fastigiata* (ROTH) GREV., som växer fäst på *Ascophyllum nodosum* STACKH., af hvilken den säkerligen skyddas under ebbtid. Andra arter äro väl icke epifyter, men växa fästa på klippan mellan Fucaceerna, som täcka dem under hela den tid, ebben varar. Så är vid Norges nordkust fallet med *Rhodymenia palmata* (L.) GREV., en här i utomordentligt stor individmängd inom Fucus-Ascophyllumbältet uppträdande alg; jfr KJELLM. Algæ arct. Sea s. 149. Att flere vid Norges vestkust förekommande alger i detta hänseende likna denna, framgår med full tydlighet af de förtjenstfulla skildringar af algvegetationen i dessa trakter, som GRAN, HANSTEEN och BOYE lemnat. Föröfrigt står ju alltid det antagandet öppet, att en del litorala alger i sjelfva sin micellära byggnad kunna hafva ett kraftigt medel att undgå en skadlig inverkan af torrläggning under längre tid.

Det synes mig framgå af hvad jag nu anfört, att former sådana som den af mig beskrifna litoralformen af Ceramium circinnatum från Gotland, låt vara att de äro af tillfällig natur, förtjena all uppmärksamhet, dels emedan de synnerligen påtagligt visa yttre krafters stora formbildande inflytande på hafsalger, dels emedan de äro egnade att gifva vigtiga upplysningar om graden, arten och förloppet af s. k. tillpassning och slutligen emedan de kunna utgöra begynnelseformer till nya, för ett bestämdt lefnadssätt lämpade arter.

Litteratur-förteckning.

AGARDH, J. G. Florideernes Morphologi. — Kgl. Svenska Vet.-Akademiens Handlingar, B. 15, N:o 6. (J. G. AG., Florid. Morph.)

» » De Typis Ceramiorum. Analecta Algologica Cont. 2. — Lunds Universitets Årsskrift, T. XXX. (J. G. AG., Typ. Ceram.)

AHLNER, K. Bidrag till kännedomen om de svenska formerna af algslägtet *Enteromorpha*. Akad. Disp. 1877. (AHLN. Enterom.)

BERTHOLD, G. Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Meeresalgen. — PRINGSHEIM's Jahrbücher für Wissenschaftliche Botanik, B. 13. (BERTH. Morph. u. Physiol. d. Meeresalg.)

BORGE, O. F. Über die Rhizoidenbildung bei einigen fadenförmigen Chlorophyceen. Akad. Disp. 1894. (BORGE, Rhizoidenbild.)

BOYE, P. Bidrag til kundskaben om Algevegetationen ved Norges vestkyst. — Bergens Museums Aarbog 1894—95, N:o XVI. (BOYE, Algeveg.)

EKMAN, P. L. Bidrag till kännedomen af Skandinaviens Hafsalger. Akad. Disp. 1857.

GRAN, H. H. Algevegetationen i Tønsbergfjorden — Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger for 1893, N:o 7. (GRAN, Algev. Tønsbergfj.)

» » Kristianiafjordens algeflora. 1. Rhodophyceæ og Phæophyceæ. — Videnskabs-Selskabets Skrifter, I. Matem.-naturvid. Klasse, 1896, N:o 2. (GRAN, Kristianiafj. Algefl.)

HANSTEEN, B. Algeregioner og Algeformationer ved den norske vestkyst. — Nyt Magazin for Naturvidenskaberne 32, 4. (HANST., Algereg.)

KJELLMAN, F. R. The Algæ of the arctic Sea. — Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handl., B. 20, N:o 5. (KJELLM. Algæ arct. Sea.)

» » Ueber Algenregionen und Algenformationen im östlichen Skager Rack nebst einigen Bemerkungen über das Verhältniss der Bohuslänischen Meeresalgenvegetation zu der norwegischen. — Bihang till Kgl. Sv. Vetenskaps-Akademiens Handlingar, B. 5, N:o 6. (KJELLM. Algenreg.)

» » Studier öfver Chlorophycéslägtet Acrosiphonia J. G. AG. och dess Skandinaviska arter. — Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. B. 18, Afd. 3, N:o 5. (KJELLM., Acrosiphonia.)

» » Marina Chlorophyceer från Japan. — Ib. B. 23. N:o 11. (KJELLM. Jap. Chloroph.)

KLEEN, E. Om Nordlandens högre hafsalger. — Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandl. 1874, N:o 9. (KLEEN, Nordl. Alg.)

LYNGBYE, H. C. Tentamen Hydrophytologiæ danicæ. 1819. (LYNGB. Hydr. dan.)

REINKE, J. Algenflora der westlichen Ostsee, deutschen Antheils. — Bericht der Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel, 6. (REINKE, Algenfl.)

WARMING, E. Plantesamfund, 1895.

WILLE, N. Bidrag til Algernes physiologiske Anatomi. — Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, B. 21, N:o 12. (WILLE, Alg. phys. Anat.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 9.
Stockholm.

Nivåsextant, konstruerad för ANDRÉES polarballong.

Af EDV. JÄDERIN.

[Meddeladt den 10 November 1897 genom A. E. NORDENSKIÖLD.]

Inom navigationen gör sig ofta gällande ett behof att blifva oberoende af sjöhorisonten, t. ex. vid tillfällen då visserligen himmelen är klar och solen synlig, men då dimma ligger utmed horisonten, eller då horisonten begränsas af land, eller vid observationer nattetid o. s. v. Samma behof skulle äfven komma att göra sig känbart under öfveringeniören ANDRÉES ballongfärd mot nordpolen. För den skull ha flere förslag till artificiell horisont blifvit pröfvade och samtlige förkastade till dess, efter hvad man synes ha skäl att hoppas, uppgiften blifvit löst genom förändring af en vanlig sextant till hvad jag kallat en nivåsextant.

Som emellertid den till förberedelser för ANDRÉES färd tillmätta tiden var strängt anlitad, måste försöken med sextanten begränsas till blott de aldra nödvändigaste, hvarför det instrument (konstruktion n:r 1), som ANDRÉE medförde, icke visar den slutliga lösningen af uppgiften. Efteråt blef det mig klart, att utförandet helst borde ske något annorlunda, och ett annat instrument (konstruktion n:r 2) utfördes för korvetten »Frejas» färd sommaren 1897. Jag framställer här båda dessa konstruktionssätt. Det skulle visserligen kunna anses öfverflödigt att redogöra för äfven den förra, ofullkomligare, konstruktionen, men då den är lättare och billigare att utföra än den senare, må en framställning af densamma likväl här finna plats.

Såsom af benämningen torde framgå utgöres instrumentet af en vanlig sextant med en till densamma applicerad nivå *N* (fig. 1). Dennas uppgift är att, då blåsan spelar in, vid observationen åt instrumentet gifva ett bestämdt läge, motsvarande det som detsamma intager, då tuben är riktad emot horisonten. Kunde instrumentet stadigt intaga detta läge och tuben vore försedd med hårkors, skulle naturligtvis, medan solbilden, dubbelt reflekterad, inställdes med sin rand eller med sin medelpunkt vid den horisontela tråden, omedelbarligen solhöjden kunna afläsas på cirkeldelningen, eventuelt efter indexkorrektion. För detta ändamål skulle nivån angifva det horisontela läget icke blott i riktningen emot solen, utan äfven i den deremot vinkelräta riktningen, d. v. s. att ett rörvattenpass icke vore tillfylles, utan att man måste använda ett dosvattenpass.

Enär likväl ombord å fartyg eller eljes under resor det åsyftade stadiga läget icke kan åstadkommas, utan man alltid har att räkna med en viss osäkerhet, medan instrumentet hålles fritt i handen, kommer blåsan att röra sig hit och dit. Derför göres blåsan synlig i synfältet genom att till instrumentet anbringa ett rätvinkligt prisma med den speglande ytan *P*. Detta prisma är så placeradt, att det förhindrar det direkta seendet genom tuben mot horisonten, med andra ord, att det skymmer den ofolierade delen af spegelglaset *s*. För att hastigt kunna iordningställa instrumentet till observation på vanligt sätt bör derför prismat lätt kunna borttagas och för den skull vara fäst, utom med styrstift, medels två lätt åtkomliga kordongskrufvar *r* och *r'*. Äfven nivåns botten är af glas och lämplig belysning af blåsan erhålles nedifrån genom en på insidan hvit fällbar skärm *T*.

Om nivån förseddes med ett märke (en i glaset inritsad cirkel) för att markera blåsans normala ställning, skulle det vara förgäfves man försökte att inställa den senare centralt med märket, samtidigt med att solbilden fördes till tråden i tuben. Den oundvikliga osäkerheten uti instrumentets läge bör derför neutraliseras, hvilket sker på det sättet,

att blåsans genom instrumentets ostadighet förorsakade i synfältet iakttagna rörelse i vertikal led går åt samma håll som den samtidigt och af samma orsak alstrade rörelsen i synfältet af den dubbelt reflekterade solbilden och

att nivåns krökningsradie så afpassas, att dessa båda rörelser blifva i synfältet lika stora.

Vinsten af en sådan anordning är, att — om solbilden i synfältet inställes centralt med eller i kontakt med nivåns cirkelformiga bläsa — det *inbördes* läget mellan båda blir orubbadt, ehuru instrumentet i handen ej kan hållas fullt stadigt. Solbilden och blåsan följas sålunda åt, oaktadt instrumentets ostadighet. Anordningen i fråga eger, som synes, sin motsvarighet uti den vid vanliga sextanter förekommande, då de båda solbilderna eller solbilden och sjöhorisonten bringas öfverens i synfältet. Nivåsextanten skulle ock till fullo kunna uppfylla de fordringar man i afseende på noggranhet ställer på den vanliga sextanten, om icke vid hastiga rörelser af instrumentet blåsan, på grund af sin tröghet, först småningom inställde sig i sitt rätta läge. I hvilken grad detta utgör en olägenhet kunna endast direkta försök utvisa. I afseende på lätthandterlighet vid observationers anställande öfverträffar nivåsextanten den vanliga.

Konstruktion 1. — Andrées instrument.



Fig. 1.

Detta instrument är afsedt uteslutande för observation *utan tub*. I stället för denna måste diopterröret fastskrufvas vid instrumentet. Det cirkelrunda hål *o*, som utgör sjelfva diopter-

okularet, får icke hafva större diameter än omkring 1.5 millimeter. Det är af väsentlig vigt, att icke blott nivån och prismat, utan äfven diopterröret, äro synnerligen stadigt fastskrufvade. Om röret har någon glappning uti hylsan *h*, blir läget af centrum till hålet *o* föränderligt och instrumentets indexfel variabelt.

Genom dioptern *o* böra såväl den dubbelt reflekterade solbilden som den relatift närbelägna nivåns blåsa blifva samtidigt synliga klart och tydligt. Detta blir naturligtvis en möjlighet på grund af litenheten hos hålet *o*.

Till denna konstruktion måste nivåns krökningsradie göras lika med summan af afstånden *nP* och *Po*. (Till nivåglas lämpa sig särdeles väl vanliga, ännu ej kantslipade, cirkelformiga, glasögonlinser.)

Indexkorrektionen

är sammansatt af två termer, den ena, *i*, sextantens vanliga indexkorrektion, det är cirkelafläsningen, med ombytt tecken, då de båda speglarne äro ställda parallelt med hvarandra, den andra, *I*, beroende af felaktig placering af nivån och prismat. Den senare delen skulle visserligen kunna låta sig justeras, lika väl som den förra, genom lämpligt anbragta korrektionsskrufvar. men jag har ansett det fördelaktigare att för styrkans och oföränderlighetens skull ej förse instrumentet med dylika. I sådant fall bör man kunna anse termen *I* vara för alla tider konstant, äfven om prismat tid efter annan bortskrufvas och åter fastsättes. Den totala indexkorrektionen, $i + I$, kan på åtskilliga vägar bestämmas. När vidare, på vanligt sätt, med prismat frånskrufvadt, *i* bestämmes, erhålles värdet å det konstanta *I*. Vid bestämning af indexkorrektionen bör man helst, för att vinna större noggranhet, gifva instrumentet lämpligt stöd, hvilket, allt efter omständigheterna, anordnas olika vid olika tillfällen.

Med ANDRÉES instrument bestämdes indexkorrektionen $i+I$ på följande sätt:

1. 1897 Mars 23.1. En liten plan spegel fastgjordes på ungefär 2 meters höjd vid en husvägg i ungefär 60° lutning mot

horisonten. Ett skarpt begränsadt föremål i den aflägsna skogshorisonten utvaldes, hvilken punkts spegelbild iakttogs i instrumentet, då detsamma stöddes emot ett bord, som var placeradt på marken nära intill väggen. Spegelbildens höjd uppmättes med instrumentet både då observatorn var vänd *emot* spegeln, och då han var vänd *ifrån* densamma. Summan af de på dessa sätt aflästa höjderna, vederbörligen korrigerade för indexfelet, skulle naturligtvis utgöra 180°. I bägge fallen instäldes punkten i beröring med blåsans både öfver- och underkant och medeltalet af båda togs. Resultaten blefvo (beteckningen ○ betyder nivåns blåsa; beteckningarne ○ och ○ torde då förstås af sig sjelfva):

Första läget.	○	74° 55′ 0″	73° 54′ 20″
	○	72 53 40	
	○	74 54 30	73 54 30
	○	72 54 30	
	○	74 51 0	73 52 25
	○	72 53 50	
		Medeltal:	73° 53′ 45″ ± 49″
Andra läget.	○	104° 56′ 50″	105° 52′ 30″
	○	106 48 10	
	○	104 53 40	105 53 20
	○	106 53 0	
	○	104 55 30	105 56 15
	○	106 57 0	
		Medeltal:	105° 54′ 2″ ± 46″

Summa: 179° 47′ 47″ ± 55″. Indexkorrektionen $i + I = + 6' \, 7'' \pm 27''$.

2. 1897 Mars 25.0. Ett förut väl justeradt nivelleringsinstrument uppstäldes med inspelande nivå på sitt statif och tuben instäldes för tydligt seende på oändlig distans. Okularet borttogs och hårkorset belystes snedt ofvanifrån, hvarigenom den horisontela tråden genom objektivet visade sig lysande på mörk grund. Hvarhelst ögat placerades framom nivelleringsinstrumentets objektiv, måste en punkt på ifrågavarande tråd synas i

horisontel riktning, äfven om ögat höjdes eller sänktes. Nivelleringsinstrumentet var sålunda ämnadt att begagnas såsom en horisontelt riktad kollimator till nivåsextanten. Midten af dennas stora spegel S placerades, då sextanten var lämpligen understödd, ungefär midt för nivelleringsinstrumentets objektiv, helt nära intill detsamma. Den belysta horisontela tråden instäldes på öfver- och underkant af nivåsextantens blåsa. Medeltalen togos sedan. Resultat:

℧	359°	7′	30″	359° 53′ 10″
Ω	0	38	50	
℧	359	8	20	359 52 20
Ω	0	36	20	
℧	359	9	20	359 52 35
Ω	0	35	50	
℧	359	9	40	359 54 45
Ω	0	39	50	
℧	359	11	40	359 54 20
Ω	0	37	0	
℧	359	13	20	359 56 5
Ω	0	38	50	

Medeltal: 359° 53′ 52″ ± 23″

Indexkorrektion $i + I = + 6' \ 8'' \pm 23''$.

3. 1897 Mars 25.4. I två dörröppningar uti en ungefär 10 meter lång sal anbragtes på omkring 1.5 meters höjd öfver golfvet två vertikalt placerade pappskärmar, en i hvardera dörröppningen. I hvar och en af dessa pappskärmar gjordes ett cirkelrundt hål, ungefär 7 millimeter i diameter. Dessa hål nämnas här A och B. Bakom A uppstäldes en lampa, hvarvid lågan, om ögat placerades på andra sidan B, genom hålet A syntes som en liten skarp ljuspunkt. Bakom B anbragtes sextanten med midten af stora spegeln S i jemnhöjd med hålet B och höjden af ljuspunkten mättes. Derefter gjordes ombyte, så att lampan placerades bakom B, instrumentet bakom A och höjden för ljuspunkten B uppmättes. Summan af dessa båda

höjder borde utgöra 360°. I båda fallen togos, som vanligt, inställningar på blåsans öfver- och underkant.

Resultat:

Instrumentet bakom *B*.	○ 0° 43′ 0″	0° 0′ 45″	
	○ 359 18 30		
	○ 0 45 10	0 3 30	
	○ 359 21 50		
	○ 0 42 10	0 1 25	
	○ 359 20 40		
	Medeltal:	0° 1′ 53″	± 33″
Instrumentet bakom *A*.	○ 359° 1′ 30″	359° 43′ 5″	
	○ 0 24 40		
	○ 359 3 20	359 43 20	
	○ 0 23 20		
	○ 359 4 30	359 43 10	
	○ 0 21 50		
	Medeltal:	359° 43′ 12″	± 3″.
	Summa:	359° 45′ 5″	± 34″.
	Indexkorrektion $i + I =$	+ 7′ 27″	± 17″.

4. Vid skilda tillfällen bestämdes dessutom $i + I$ genom observationer å himmelskroppar, hvilkas höjder voro kända, naturligtvis helst medels meridianhöjder, tagna på en plats med bekant latitud.

Resultaten af samtliga indexbestämningar blefvo följande:

1897.		Metod.	$I + i$.	*Sannolikt fel* för hvarje obs.	hela serien.
Febr.	18.95.	Med *solen*	+ 6′ 48″	± 1′ 6″	± 0′ 27″
	19.0.	» » nära merid.	+ 6 35	± 0 48	± 0 21
	22.3.	» *Jupiter*	+ 7 9	± 2 12	± 1 15
	22.4.	» *Venus*	+ 6 26	± 1 1	± 0 35
	22.4.	» *α Can. min.* . .	+ 7 7	± 0 45	± 0 26
Mars	23.1.	» spegel	+ 6 7	± 0 47	± 0 27
	25.0.	» nivelleringsinstr.	+ 6 8	± 1 0	± 0 23
	25.4.	» 2 pappskärmar	+ 7 27	± 0 29	± 0 17.

För perioden Febr. 19—22 får man $i + I = + 6' 48''$
och under samma tid var . . . . $i = + 1\ 30$
hvaraf . . . . $I = + 5' 18''$.

För perioden Mars 23—25 var . . $i + I = + 6' 48''$
och . . . . $i = + 1\ 9$
hvaraf . . . . $I = + 5' 39''$.

Medeltal: $I = + 5' 28''$.

Observationer å himmelskroppar.

Vid observationer å stjernor kunna förekomma dels inställningar af stjernans bild vid blåsans öfver- och underkant och dels i blåsans medelpunkt, vid observationer å solen dels solbildens och blåsans båda utvändiga kontakter, dels invändiga kontakter och dels central inställning. När instrumentet hastigt ändrar sin temperatur (när det t. ex. nyss uttagits i den kalla fria luften från ett varmt boningsrum) eller när väderleken är ostadig och himmelskroppen stundtals skymd af moln, så att man ej kan vara säker att erhålla så många inställningar man önskat, eller slutligen då stor brådska råder, äro naturligtvis de centrala inställningarne att tillråda. Hastiga temperaturändringar medföra nämligen hastig ändring af blåsans storlek, och två sammanhörande inställningar på blåsans öfre och undre kant gifva då ett falskt medeltal. Vid ostadig väderlek förflyter dessutom ofta en lång tid emellan två sammanhörande inställningar och det kan då medföra märkbart fel att låta medeltalet af de observerade höjderna svara emot tiderna. Försöken gifva dessutom vid handen att solens och blåsans invändiga kontakter böra undvikas såsom mindre skarpa än öfriga inställningar.

Följande astronomiska iakttagelser äro utförda vid villan Stora Fridhem nära Ålkistan ($\varphi = 59° 22' 31''$, $\lambda = 1^h 12^m 12^s.1$ östl. från Greenwich) Vid observationerna användes fickkronometern Kullberg 5566, tillhörig ANDRÉE-expeditionen. Urstånden erhöllos genom telefonsignaler från Stockholms observatorium. Observationerna utfördes dels på land och dels i båt, som roddes.

dels med instrumentet hållet fritt i handen utan stöd och dels med stöd för händerna emot ett bord. Alla observationer, utom de särskildt anmärkta, äro gjorda af förf.

De använda tecknen hafva följande betydelser:

⊙͜ . . . solbildens invändiga kontakt vid blåsans nedre rand.
⊙͝ . . . » » » » » öfre »
⊙̄ . . . » utvändiga » » » nedre »
⊙̱ . . . » » » » » öfre »
⊖ . . . » centrala inställning.

Observationer på land.

1897 Febr. 18.95.

Urståndet till Grw. m.-tid: $\gamma = -1^h\,1^m\,3^s.0$. *Solen.*

	Kron.	Cirkelafläsn.	Härur beräknadt värde å $i+l$.	
⊙͜	$22^h\,48^m\,53^s.5$	18° 26′ 20″	+ 8′ 17″	Med stöd för händerna.
⊙͝	51 7	17 23 30		
⊙̱	52 47.5	16 58 30	+ 4 22	
⊙̄	55 13	19 18 20		
⊖	57 39.5	18 13 0	+ 8 37	
⊖	59 22	18 15 40		
⊙̄	23 1 0.5	19 27 30	+ 7 27	
⊙̱	3 10	17 18 40		
⊙͝	4 58	17 59 40	+ 6 52	
⊙͜	7 7.5	19 3 30		
⊙̄	10 53.5	19 44 20	+ 5 16	På fri hand.
⊙̱	13 2	17 33 50		
		Medeltal:	+ 6′ 48″ ± 0′ 27″.	

1897 Febr. 19.0. γ som förut. *Solen* nära merid.

			$i+l$.	
⊙̱	$23^h\,53^m\,16^s$	18° 19′ 40″	+ 6′ 39″	På fri hand.
⊙̄	55 5	20 34 0		
⊙̱	56 54	18 18 40	+ 6 8	
⊙̄	59 10	20 37 50		
⊙̱	0 0 48.5	18 20 20	+ 4 51	
⊙̄	2 58	20 39 20		

⊖	$0^h\ 4^m\ 45^s$	19° 24′ 30″	+ 7′ 58″
⊖	6 44.5	19 28 50	
⊙	8 27	18 19 20	+ 7 19
⊙	10 21	20 34 10	
		Medeltal:	+ 6′ 35″ ± 21″.

Att ytterligare specificera observationerna skulle blott onödigtvis upptaga utrymmet. Jag begränsar mig derför till att här anföra deras resultat:

1897 Febr. 22.3. *Jupiter*. 2 par randkontakter och 1 par centralinställningar. På fri hand. $i + I = + 7' 9'' \pm 1' 15''$.

1897 Febr. 22.4. *Venus*. 3 par randkont. och 1 par centralinst. Stjernan oftast i moln. $i + I = + 6' 26'' \pm 35''$.

1897 Febr. 22.4. *α Can. min.* nära merid. 3 par randkont. Stjernan i tunna moln, oftast mycket svår att observera. $i + I = + 7' 7'' \pm 26''$.

De följande observationerna äro beräknade af amanuensen NILS STRINDBERG.

1897 Mars 26.3. *Venus*. Tidsbestämning.

Observator.		
JÄDERIN.	4 par randkont. γ till ställets m.-tid	$-0^m\ 20^s$
		−0 21
		−0 36
		−0 45
STRINDBERG.	2 par »	−0 36
		−0 20
	Medeltal:	$-0^m\ 30^s \pm 3^s$

Samma dag. *α Can. maj.* Latitudsbestämning.

JÄDERIN. 3 par randkontakter. $\varphi = 59° 25'.3$
22 .4
20 .2

Medeltal: $\varphi = 59° 22'.6 \pm 1'.0$.

Samma dag. *α Can. min.* Latitudsbestämning.

STRINDBERG. 2 par randkontakter. $\varphi = 59° 17'.6$
18 .5

Medeltal: $\varphi = 59° 18'.1$.

Till följd af sen islossning kunde försöken ombord å fartyg ej blifva mycket omfattande. De som utförts äro likväl talande nog, ty vid de samma användes roddbåt, hvilkens rörelser voro ganska ojemna och säkerligen för noggranheten ofördelaktigare än både de som förekomma ombord å större fartyg och de som kunde väntas hos polarballongen.

Härmed följa dessa observationer, alla å solen.

1897 April 10.3. Tidsbestämning i båt.

	Kron.	Cirkelafläsn.	
$\underline{\odot}$	$6^h\,21^m\,56^s.5$	2° 5′ 10″	$\gamma = +\ 9^m\,40^s$
$\overline{\odot}$	23 27	4 24 40	
$\overline{\odot}$	24 50.5	4 11 10	+ 10 8
$\underline{\odot}$	26 23.5	1 30 20	
		Medeltal:	$\gamma = +\ 9^m\,54^s$.

1897 April 15.95. Latitudsbestämning i båt.

$\ominus$	$23^h\,40^m\,38^s$	40° 51′ 40″	φ = 59° 18′ 52″
$\ominus$	42 34	40 50 20	20 51
$\ominus$	44 10	40 50 10	21 26
	(Solen ofta i moln.)		
$\ominus$	45 35	40 55 50	16 2
$\ominus$	46 40	40 50 20	21 42
		Medeltal:	φ = 59° 19′ 47″.

1897 April 16.3. Tidsbestämning. Hastigare rodd än förut.

$\ominus$	$6^h\,14^m\,45^s.5$	5° 51′ 50″	$\gamma = +\ 9^m\,25^s$
$\ominus$	16 40.5	5 29 40	10 31
$\ominus$	17 54	5 23 10	10 11
$\ominus$	19 5	5 10 10	10 47
$\ominus$	20 30	5 1 50	10 31
$\ominus$	21 34.5	4 55 50	10 15
$\ominus$	23 7.5	4 45 30	10 6
		Medeltal:	$\gamma = +\ 10^m\,15^s$.

Amanuensen STRINDBERG försökte en dag att bestämma latituden med detta instrument, under det han åkte i droska på Stockholms gator. Resultatet lär ha blifvit 10 minuter felaktigt.

Konstruktion 2. — »Frejas» instrument.

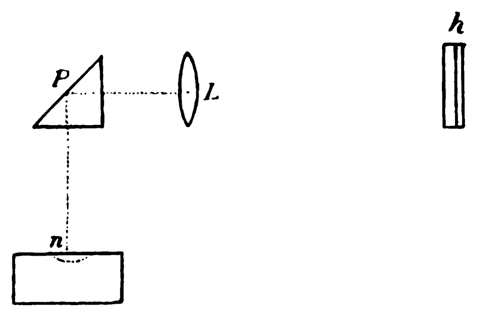


Fig. 2.

Detta instrument är afsedt att användas både utan och med tub, i förra fallet *utan* diopterröret, d. v. s. genom att betrakta stjernans bild blott och bart genom hylsan *h* i st. f. genom det fina hålet *o* (fig. 1).

Konstruktionen skiljer sig derigenom från den förra, att emellan prismat *P* och tubhylsan *h* placeras en positiv lins *L* (fig. 2), hvilkens brännvidd är lika med afståndet från linsen till nivåns blåsa längs den brutna linien *LPn*.

För denna konstruktion skall nivåns krökningsradie göras lika med linsens brännvidd. Linsen måste, för att ej skymma den folierade delen af spegelglaset *s* (fig. 1) afskäras längs en diameter, sålunda göras halfcirkelformig. I stället för lins och vanligt prisma kan man naturligtvis använda ett prisma med den ena katetytan sferiskt eller båda ytorna sferiska (ett Wollastonskt prisma).

Derigenom att nivåns blåsa befinner sig i linsens brännpunkt, förhåller sig den förra med afseende på sin synlighet såsom ett oändligt aflägset föremål och kan synas tydligt på samma gång som den dubbelt reflekterade solbilden, vare sig utan eller med tub.

Det är klart, att — vid observation utan tub och utan diopter — ögats höjning eller sänkning framom hylsan *h icke* (såsom vid konstruktion 1, om en sådan rörelse der icke vore förhindrad genom diopterns anbringande) kan verka till föränd-

ring af termen *I* uti indexkorrektionen. Observation utan tub och *utan diopter* är att rekommendera nattetid, ty stjernornas ljus blir betydligt starkare än vid konstruktion 1. Utan svårighet torde äfven stjernor af mindre storleksgrad än den första här kunna användas.

De flesta sextanter pläga vara försedda med en galileisk och en astronomisk tub. Den förra torde i de flesta fall böra användas till observationerna, den senare deremot till indexbestämningar, då instrumentet naturligtvis gifves fast stöd. Vid observationer på land, då fast stöd kan erhållas för instrumentet, kunna med astronomiska tubens hjelp äfven astronomiska iakttagelser göras, som i noggranhet icke stå efter sådana med artificiel horisont, hvarför man äfven kan, åtminstone till en viss grad, göra sig oberoende af denna en fördel, särskildt i blåsväder.

Med detta instrument har jag utfört indexbestämning efter metoden n:r 2 (sid. 497) med den (ungefär 10 gånger förstorande) astronomiska tuben, hvarvid sannolika felet icke blef större än vid den vanliga bestämningen af indexkorrektionen *i*. Resultatet häraf är mig nu icke tillgängligt. Icke heller är mig något bekant om de under »Frejas» färd gjorda observationerna. Dess värre medgaf mig icke tiden att sjelf anställa sådana, men a priori kan dock naturligtvis påstås, att sannolika felen här skola blifva mindre än för konstruktionen 1.

Efter dessa konstruktioners utförande lärde jag känna en engelsk konstruktion af ett liknande instrument, som dock skilde sig från denna nivåsextant deruti, att dels användes ett rörvattenpass, som icke gaf någon garanti för äfven ganska stora sidolutningar, och dels deruti att vattenpassets krökningsradie icke var på något särskildt sätt afpassad. Observation sker med detta instrument på det sättet, att vattenpassets blåsa hålles inspelande vid ett på röret anbragt märke, samtidigt med det att solbilden inställes på tråden i tuben. Här i Stockholm anstälda försök med det engelska instrumentet ha icke utfallit tillfredsställande.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 470.)

Davenport. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Vol. 6 (1889—97). 8:o.
Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 23: H. 4. 1897. 4:o.
Bericht. 1897. 8:o.
Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 8 (1897): N:o 3. 8:o.
's-Gravenhage. *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
KOPS, J., & VAN EEDEN, F. W., Flora Batava. Afl. 317—318. 1897. 4:o.
Greenwich. *Royal observatory.*
Introduction to astronomical observations 1894. 4:o.
Astronomical results 1894. 4:o.
Magnetical and meteorological observations 1894. 4:o.
Spectroscopic and photographic results 1894. 4:o.
Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 70 (1897): H. 1—2. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
HUYGENS, CHR., Oeuvres complètes. T. 7. 1897. 4:o.
Kiel. *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd 2: H: 1: Abt. 2. 1897. 4:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Rozprawy. Wydzial matem.-przyrodniczy. (2) T. 10. 1896. 8:o.
» » filologiczny. (2) T. 10. 1897. 8:o.
» » hist.-filozoficzny. (2) T. 8—9. 1896—97. 8:o.
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej. T. 31. 1896. 8:o.
Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce. T. 9. 1897. 8:o.
Biblioteka pisarzów Polskich. 33. 1897. 8:o.
BURATTINI, T. L., Misura universale. 1897. 8:o.
Bulletin international. 1897: N:o 7. 8:o.
Kristiania. *Universitetet.*
Festskrift till H. M. Konung Oscar II. Bd 1—2. 1897. 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 33 (1897): N:o 125. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1897): P. 4. 8:o.
— *R. astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 57 (1897): N:o 9. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): 10. 8:o.
— *R. microscopical society.*
Journal. 1897: P. 5. 8:o.

(Forts. å sid. 530.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 168.

Zur Morphologie und Biologie einzelliger Algen.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von KNUT BOHLIN.

[Mitgeteilt den 10 November 1897 durch A. G. NATHORST.]

Unterstützt von der Botanischen Gesellschaft zu Stockholm, untersuchte ich im Lauf des verflossenen Sommers die Süsswasseralgenflora der äussersten Scheeren Stockholms. Meine Aufmerksamkeit war dabei speciell der mannigfaltigen und verhältnissmässig noch wenig gekannten Gruppe der Protococcoideen zugewendet. Zweck dieser Zeilen ist die vorläufige Beschreibung einiger der Wissenschaft neuen, teilweise besonders interessanten Formen nebst einer physiognomischen Schilderung der in den äusseren Scheeren vorkommenden Süsswasseralgen. Hierbei möchte ich indess stark betonen, dass das von mir untersuchte Gebiet ein ziemlich beschränktes war, und daher meine im ganzen als Einzeluntersuchung zu betrachtende Schilderung keinen Anspruch auf allgemeine Giltigkeit erhebt. Wahrscheinlich wird es sich aus später zu erörternden Gründen jedoch erweisen, dass Floren von teilweise demselben Charakter sich auch in anderen, geographisch weit auseinander liegenden, Gegenden wiederfinden.

Unter den Süsswasseralgen des genannten Gebiets besonders reich vertreten sind die Flagellaten. Die entwicklungsgeschichtliche Untersuchung einiger von mir gefundenen und der Wissenschaft wahrscheinlich neuen Formen ist mir bis jetzt entweder gar nicht oder nur unvollständig gelungen. Ich sehe daher von einer Beschreibung derselben bis auf weiteres ab, indem ich hoffe,

nach genaueren Studien auf einige unter ihnen zurückkommen zu können.

Ziemlich vollständig ist mir die Beobachtung im Folgenden beschriebener Formen geglückt.

I. **Brachiomonas** n. g.

Diese neue Gattung gehört zu der Familie der Chlamydomonaden und unterscheidet sich von den übrigen Gattungen hauptsächlich durch die eigentümliche Gestaltung ihrer Zellen.



Fig. 1. *Brachiomonas gracilis* n. sp. Vegetative Stadien. $\frac{600}{1}$.

Der Zellkörper zeigt nämlich fünf Fortsätze, einen in der Längsrichtung der Zelle nach hinten, vier, symmetrisch in Kreuzform gestellte, von den Seiten ausgehend. Die am vorderen Ende der Zelle befindlichen Seitenarme sind leicht nach rückwärts gekrümmt. Jede Zelle enthält, ungefähr in gleicher Höhe und fast an der Oberfläche, einen sich nur durch Farbenreactionen bemerklich machenden Zellkern und ein Pyrenoid. (Fig. 2 *e*.) Zwei Cilien, von der Länge der Zelle oder länger, gehen von einer deutlich farblosen Papille aus. Zwischen zwei Zellarmen liegt ein roter Augenfleck langgestreckter Form. Die vegetative Fortpflanzung geschieht durch 4—8-Teilung des Zellinhalts. (Fig. 1 *e* und 2 *d*.) Die erste Teilung ist eine Längsteilung. (Fig. 2 *c*.)

Die Tochterzellen haben schon im Mutterleibe die Form der Mutterzelle. Durch 16—32-Teilung entstehen Gameten, die mehr oder weniger ausgeprägt die Gestalt der Mutterzelle, 2 Cilien und einen deutlichen Augenfleck zeigen. Sie copulieren, gewöhnlich eine grössere mit einer kleineren, zu einer Zygote,

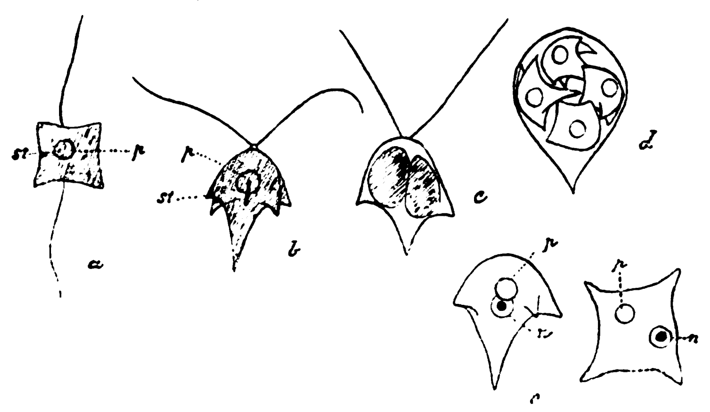


Fig. 2. *Brachiomonas submarina* n. sp. Vegetative Stadien. Kerngefärbte Individuen (*e*). $\frac{600}{1}$.

die erst nach längerem Umherschwimmen ihre 4 Cilien nebst den beiden Augenflecken verliert, und sich mit Membran umgiebt. Die reife Zygote ist kugelförmig, zeigt eine glatte Membran und enthält eine reichliche Menge Haematochrom.

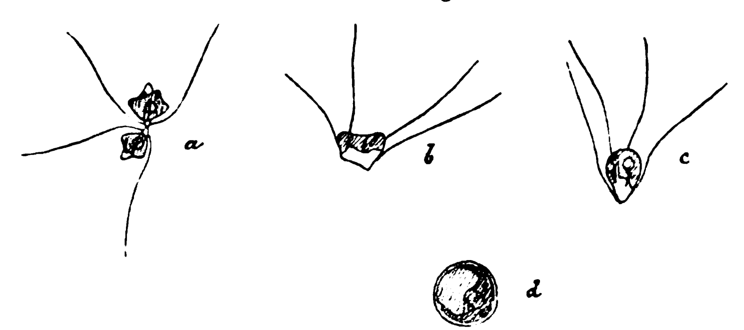


Fig. 3. *Brachiomonas submarina.* Copulationszustände und Zygote (*d*). $\frac{600}{1}$.

Ich habe zwei, in Länge und Richtung der Zellarme von einander abweichende, Formen dieser Gattung gefunden. Sie dürften, da die Tochterindividuen schon von Anfang an die

Gestalt der Mutterzelle besitzen, als zwei verschiedene Arten zu betrachten sein.

1. **Brachiomonas submarina** n. sp. Fig. 2—3.

Die kurzen, Habichtsschnabel-ähnlichen Seitenarme sind nach hinten gebogen, so dass der vordere Umriss der Zelle einen Halbkreis oder eine Halbellipse bildet. A vertice gesehen ist die Zelle beinahe quadratisch.

Fundorte: Stockholmer Scheeren: »Lilla Smultrongrundet» und »Brandskären» bei Runmarö; — Saltsjöbaden; Norwegen: Tromsö.

2. **Brachiomonas gracilis** n. sp. Fig. 1.

Die Seitenarme sind lang, spitzig und typisch beinahe geradeaus gerichtet. A vertice betrachtet gleicht die Zelle einem 4-armigen Kreuz.

Fundort: »Lilla Smultrongrundet» bei Runmarö in den Stockholmer Scheeren.

Beide Arten finden sich auf kahlen Scheeren in seichten Felslachen, die dem Ufer so nahe liegen, dass das Meereswasser in dieselben hineingespült wird. Das Wasser, in dem sie leben, ist sonach brackisch. Eine Probe solchen Wassers (*Brachiomonas gracilis*) wurde mit $AgNO_3$ auf seinen Salzgehalt titriert und ergab den Gehalt von 1,32 gr Cl pro liter, während das umgebende Meereswasser (Ostsee) einen Salzgehalt von 3,26 gr Cl pro Liter zeigte. Leider habe ich keine grössere Anzahl solcher Wasserproben gesammelt. Wahrscheinlich wird eine künftige Untersuchung ziemlich grosse Verschiedenheit in diesem Punkt ergeben.

Die mit *B. submarina* bezeichnete Art ist laut mündlicher Mitteilung schon früher von Herrn Professor LAGERHEIM an ganz ähnlichen Stellen bei Tromsö (Norwegen) und Saltsjöbaden (Stockholm) beobachtet und nach in Osmiumsäure fixierten Exemplaren identifiziert worden. Der von ihm ohne Beschreibung gegebene Name (LAGERH. I, S. 7, Note) ist daher hier aufgenommen worden.

II. Chlorogonium Ehr.

1. Chlorogonium tetragamum n. sp. Fig. 3.

Wie bei den schon bekannten Arten sind die Zellen spindelförmig. Das Verhältniss von Länge und Breite wechselt zwischen 2,1 und 3,7. Das Chlorophyll ist, wenigstens in jungen Zellen, an ein wandständiges, scheibenförmiges Chromatophor gebunden. Ungefähr in der Mitte der Zelle liegt ein Pyrenoid, hinter diesem, häufig $^{1}/_{3}$ Zellenlänge vom hinteren Ende der Zelle entfernt, der auch ohne Anwendung von Farbenreagenzien deutlich erkennbare Zellkern. (Fig. 4 *a*.) Dicht vor dem Pyrenoid sieht man einen sehr deutlichen, linienförmigen Augenfleck; im Vorderteil der Zelle, doch nicht immer dicht unter den Cilien, 2 pulsierende Vacuolen. Die Alge besitzt zwei Cilien, deren Länge ungefähr $^{2}/_{3}$ der Länge der Zelle beträgt.

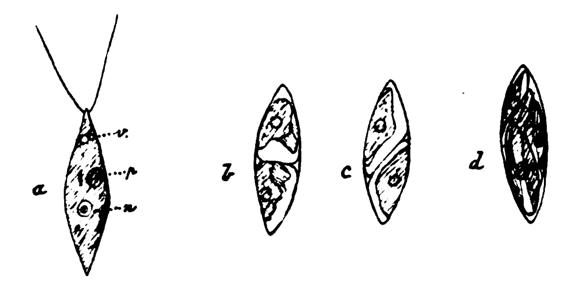


Fig. 4. *Chlorogonium tetragamum* n. sp. Zellstruktur und Teilungsvorgang. $\frac{600}{1}$.

Die Zellteilung ist eine Querteilung mit Verschiebung der Tochterzellen. (Fig. 4 *b—d*.)

Das Merkwürdige in der Entwicklungsgeschichte dieser kleinen Alge ist, dass die Gameten durch blosse *4-Teilung* des Inhalts einer Mutterzelle entstehen. Wie die Mutterzelle besitzen sie 2 Cilien, 1 Pyrenoid, 1 Augenfleck und im Vorderteil pulsierende Vacuolen.

Bei der Copulation (Fig. 5 *a*— *c*) entsteht eine kugelige oder eirunde, ebenfalls membranumhüllte Zygote, die eine Zeit lang die beiden Augenflecke beibehält. Die äusserst dünne Membran,

mit der die Zygote zunächst umgeben ist, wird später von einer sekundären, ziemlich dicken, mit stumpfen Stacheln versehenen gesprengt. (Fig. 5 *d—e.*) Die erste Memban ist insofern von Interesse, als sie als homolog mit der bei der Copulation abgeworfenen Membran der Gameten mehrerer *Chlamydomonas*-arten zu betrachten sein dürfte. (GOROSCHANKIN, I., Taf. XIV und II, Taf. III. z. B. Fig. 15.) Übrigens hat FRANCÉ (I, Taf. VI, Fig. 17) bei *Chlorogonium* mit Membran versehene Gameten wahrgenommen. Bei der von mir beschriebenen Art hätte sich die Anlegung der die Gameten umgebenden Membran verspätet.

Nicht ganz sicher, aber immerhin anzunehmen ist, dass die durch 4-Teilung einer Zelle entstandenen Zellen auch die vege-

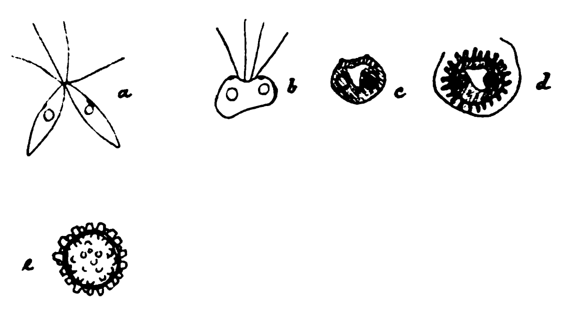


Fig. 5. *Chlorogonium tetragamum.*
Copulationszustände (*a—b*) und Zygote (*c—d*). 650/1.

tative Vermehrung darstellen. In meiner Kollektion und den von mir angelegten Deckglaskulturen copulierten die durch 4-Teilung entstandenen Gameten in kolossalen Massen. Inwiefern ein Teil der Tochterzellen sich dessungeachtet rein vegetativ verhielt, ist natürlich schwer zu entscheiden. Die einfachste Annahme wäre die, dass die durch 4-Teilung entstandenen Zellen unter gewissen Umständen rein vegetativen, unter anderen geschlechtlichen Charakter besitzen und sich im letzteren Fall wie Gameten verhalten.

Denkbar wäre noch, dass die vegetativen Zellen durch 2-Teilung eines Mutterindividuums entstünden; doch habe ich einen solchen Fall nicht beobachtet, und bliebe derselbe daher noch festzustellen.

Die beiden seither bekannten *Chlorogonium*-Arten, *Chl. euchlorum* EHR. und *Chl. elongatum* (DANG.) FRANCÉ, sind von mehreren Forschern zum Gegenstand von Untersuchungen gemacht worden, die indess nicht zu übereinstimmenden Resultaten geführt haben. Es scheint dies darauf hinzudeuten, dass den verschiedenen Autoren verschiedene Formen zur Untersuchung vorgelegen sind. So giebt z. B. FRANCÉ (I, pag. 300, Taf. VI, 17) in der Beschreibung und Abbildung die Gameten als mit Membran versehen an, während KLEBS (I, Taf. III, 17), STEIN (Taf. XVIII, 26) und DANGEARD (Taf. IX, 11, 12) dieselben membranlos zeichnen.

Chl. euchlorum wird durch den Besitz mehrerer Pyrenoide charakterisiert. *Chl. elongatum* soll sich durch 2 Pyrenoide auszeichnen, scheint jedoch hie und da nur ein einziges zu besitzen (FRANCÉ I, p. 297, Taf. IV, 1—3). Hier findet sich demnach kein von *Chl. tetragamum* scharf unterscheidender Charakter.

Nach KLEBS (I, p. 109) hat *Chl. euchlorum* im Vorderteil der Zelle eine, *nicht* pulsierende Vacuole. Laut der Beobachtung eines früheren Forschers (KRASSILSTSCHIK, p. 628) dagegen besitzt *Chl. euchlorum* ein unregelmässig über die ganze Körperfläche verbreitetes System pulsierender Vacuolen. FRANCÉ (I, p. 299) bestätigt diese Resultate und dehnt sie zugleich auf *Chl. elongatum* aus. Darin unterscheidet sich sonach die neue Art, *Chl. tetragamum* scharf von den seitherigen. In entwicklungsgeschichtlicher wie morphologischer Hinsicht indessen für die Art vor allem charakteristisch ist die Bildung der Gameten durch 4-Teilung der Mutterzelle und der stachelige Charakter der Zygosporen.[1])

III. **Chloramoeba** n. g.

In einem früheren Aufsatz (BOHLIN, p. 48) habe ich des eigentümlichen Baus einer Flagellate Erwähnung getan, die man

[1]) FRANCÉ (II, p. 369) hat eine Flagellatenform diagnosticirt, die er *Kleiniella* nennt, und die vielleicht mit *Chl. tetragamum* identisch ist. Da er aber keine Figur mitgeteilt hat, ist nichts Bestimmtes darüber zu sagen.

als Stammform der Algengruppe der *Confervales* betrachten könnte. Von Herrn Professor LAGERHEIM vollständig rein in einer alten Algenkultur, deren Ursprung nicht mehr festzustellen war, gefunden, wurde diese kleine Flagellate von mir einer genaueren Untersuchung unterzogen. Sie bietet sowohl in morphologischer wie besonders auch in ernährungsphysiologischer Hinsicht ein bedeutendes Interesse und soll mit Rücksicht darauf hier vorläufig erwähnt werden.

Chloramoeba heteromorpha n. sp. Fig. 7.

Dem gewöhnlich runden bis breit ellipsoidischen Zellkörper fehlt die Membran. Die Hautschicht des Plasma gestattet vollkommen amoeboide Bewegung. Sehr häufig nimmt man auch während der Fortbewegung der Flagellate bedeutende Formver-

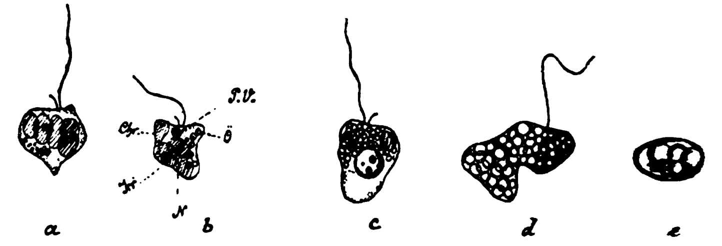


Fig. 6. *Chloramoeba heteromorpha* n. sp. Vegetative Stadien (*a*—*b*); Individuen aus Dunkelkulturen, *c* in Dextrose, *d* in Glykogen; Ruhezelle (*e*).

änderungen wahr; selten sind die entstehenden Plasma-Arme jedoch schmal und spitzig (Fig. 6 *b* und *d*). Die Zelle enthält einen zentral gelegenen Zellkern. Am vorderen Körperende sitzen 2 Cilien, wovon die eine sehr lang ($1^1/_2$—2 mal so lang als die Zelle), die andere sehr kurz und bogenförmig ist. Das Vorhandensein dieser letzteren ist nicht immer festzustellen gewesen, erscheint jedoch wahrscheinlich, da sie, sofern die Zelle nicht vollständig horizontal mit ihrer Längenachse liegt, infolge ihrer Kleinheit besonders im lebenden Zustand natürlich schwer wahrzunehmen sein muss. Im vorderen Ende, wenn auch nicht immer dicht unter den Haftpunkten der Cilien, bemerkt man eine contractile Vacuole (Fig. 6 *b*). Daneben treten zuweilen, besonders bei lebhafter Assimilation, hier und dort nicht contractile Va-

cuolen von wechselnder Grösse auf. Die Chromatophoren (2—6) sind rund, scheibenförmig und von gelbgrüner Farbe, die bei Behandlung mit starker Salzsäure in dieselbe blaue Nuance übergeht, wie sie bei entsprechendem Verfahren die *Conferva*-Chromatophoren annehmen (BOHLIN, p. 25).

Das Assimilationsprodukt ist ein dem Aussehen nach dem der *Conferva*-Zelle durchaus gleichendes Öl, das sich in Osmiumsäure schwarz färbt, sich in Alkohol unlöslich verhält und in normal assimilierenden Zellen in Form zahlreicher kleiner Tröpfchen auftritt. (Fig. 6 *b*, Ö.) Bei besonders lebhafter Assimilation entstehen grössere, oft mit vacuolenartigen Höhlungen versehene Klumpen. Zuweilen finden sich einzelne Krystalle oder in Vacuolen eingeschlossene Krystallansammlungen im Protoplasma. (Fig. 6 *a*—*b*.)

Die Teilung zu beobachten ist mir nicht gelungen.

Die grosse Öltropfen enthaltende, schwach gelbgrüne, ellipsoide Dauerzelle entsteht einfach dadurch, dass bewegliche Zellen sich mit einer ziemlich dicken Membran umgeben. (Fig. 6 *e*.)

Besonders merkwürdig erscheint die Flagellate vom physiologischen Standpunkt aus. In Dunkelkultur, in Lösungen verschiedener organischer Stoffe gedeiht sie und pflanzt sich kräftig fort, verliert jedoch dabei vollständig ihre grüne Farbe. Die Fortpflanzung ist in vielen Fällen enorm, und die Zellen füllen sich mit demselben weissen Öl, das das Assimilationsprodukt ausmacht. Die verschiedenen Stoffe verhalten sich ungleich nährend. Die im Dunkeln das Leben und die Fortpflanzung mehr oder weniger erhaltenden und unterstützenden gehören verschiedenen Stoffgruppen an: den Mono-, Di- und Polysacchariden, mehrwertigen Alkoholen, Glycosiden, Amiden u. s. w.

Monosacchariden bewirken eine äusserst lebhafte Fortpflanzung und reichliche Ölansammlung. Impft man beispielsweise eine 2—4 % Lösung von Dextrose oder Levulose mit einer minimalen Quantität von *Chloramoeba* und stellt die Kultur ins Dunkle, so erscheint schon nach 3 bis 4 Tagen die ganze Flüssigkeit getrübt von lebhaft umherschwimmenden Algenindividuen.

Nach einigen weiteren Tagen schwindet die grüne Farbe vollständig, und das Öl häuft sich, zunächst in einer Menge kleiner Tröpfchen, später in grössere Vacuolen umschliessenden Klumpen an (Fig. 6 *c*). Oft entstehen mächtige Vacuolen an mehreren Stellen des Zellkörpers.

Auf diese Weise kann die Flagellate mehrere Monate am Leben erhalten werden, und der Tod scheint eine Folge davon zu sein, dass sie sich »überisst». Schliesslich nämlich von einem einzigen, grossen Ölklumpen erfüllt, wird sie träge in ihren Bewegungen, verliert die Cilien und stirbt allem Anschein nach an allzu üppigem Wolleben.

In derselben Weise wirken Galactose, Trehalose, etc.

Disacchariden haben, abgesehen davon. dass der Prozess etwas langsamer vor sich geht, den gleichen Effekt. Am besten eignet sich von ihnen Saccharose, weniger geeignet erscheint Lactose.

Von den *Polysacchariden* ist der Ernährung und Fortpflanzung besonders kräftig förderlich das *Inulin*. In *Graminin*, *Phlaein* und *Glykogen* findet die Vermehrung nicht so stark und die Anhäufung von Öl gewöhnlich nur tropfenweise statt. (Fig. 6 *d*.) Unter den *Alkoholen* wirkt *Glycerin* (1—5 %) beinahe so stark wie Dextrose oder Saccharose. *Erythrit* schafft zwar farblose, ölreiche Individuen, fördert aber die Fortpflanzung nur schwach, während *Mannit* für reichlicheren Zuwachs sorgt.

In *Salicin*, *Asparagin* u. m. a. Stoffen fristet das Individuum eine Zeit lang sein Leben, indem es sich mit Öltropfen füllt und verblasst, wenn auch nicht bis zur Farblosigkeit, erliegt aber verhältnissmässig rasch den ungewohnten Lebensverhältnissen.

In einer, auch sehr schwachen, Lösung von *Harnstoff* stirbt die Pflanze nach Verlauf weniger Tage.

Überführt man sie ins Wasser und stellt sie ins Licht, so nehmen in der Dunkelkultur farblos gewordene Individuen, wenigstens in vielen Fällen, die frühere Farbe wieder an.

Die Untersuchung ist noch nicht völlig abgeschlossen. Indessen sind die gewonnenen Resultate von Gewicht, insofern sie

eine Stütze der Ansicht von der Entstehung grüner und farbloser Parallelformen als eine Folge ungleicher Lebensverhältnisse, speciell Nahrungsbedingungen, bilden. (KLEBS I., p. 111.)

Was ihre systematische Stellung betrifft, scheint mir *Chloramoeba* zu der kleinen Flagellatengruppe der *Chloromonaden* KLEBS (III, p. 391) zu zählen zu sein, die bis dato nur durch 2 Gattungen, *Vacuolaria* und *Rhaphidomonas*, vertreten ist. Die erstere Gattung, erstmalig aufgestellt von CIENKOWSKI (p. 426, Taf. XXIII, 19—22), später von KLEBS (II, p. 408; III, p. 391) genauer beschrieben und von BÜTSCHLI (p. 819, Taf. XLVIII, 3) (nach KLEBS' Synonymik) kurz diagnostiziert, zeichnet sich durch ihre beträchtliche Grösse (50—130 μ) und die innerhalb schützender Gallerthüllen stattfindende vegetative Teilung aus. In diesen Beziehungen weicht *Chloramoeba* von ihr ab, insofern sie nur 7—13 μ lang ist, und ihre Teilung, wenn auch noch nicht in ihren Einzelheiten bekannt, jedenfalls nicht unter Bildung gallertumhüllter Palmellastadien vor sich geht. Ein fernerer Unterschied besteht darin, dass bei *Chloramoeba* die zweite Cilie sehr kurz ist, während *Vacuolaria* 2 lange, obwohl ungleichgeartete Cilien besitzt (KLEBS III, p. 392). Dagegen bilden das Vorhandensein mehrerer scheibenförmiger Chromatophoren und das Stoffwechselprodukt (Öl) übereinstimmende Merkmale von grossem systematischem Wert.

Da die Gattung *Raphidomonas* nur wenig von *Vacuolaria* abweicht (BÜTSCHLI, p. 819), hauptsächlich durch das Vorhandensein von Trichocysten in der Hautschicht des Plasma (l. c. p. 738), erscheint die Aufstellung von *Chloramoeba* als neue Gattung der Gruppe der Chloromonaden berechtigt.

Oocystis Echidna n. sp. Fig. 7.

Diese zierliche kleine Alge fand ich auf mehreren Stockholmer Scheeren. In einer Collection war dieselbe beinahe rein. Ihr charakteristisches Kennzeichen ist die Bekleidung der Membran mit langen, dünnen Stacheln, die über die ganze Körperfläche verteilt sind, am dichtesten aber an den Polen sitzen. Sehr

nahe verwandt ist diese Form der *O. ciliata* LAGERH. (I, p. 76, Taf. III, 33—37) und deren Varietät *β amphitricha* LAGERH. (III, p. 61, Taf. I, 25, 26). Bei der ersteren sitzen die Stacheln an den Enden der Zelle, bei der letzteren längs deren längster Aequatoriallinie. Eine ähnliche Form beschreibt ferner WEST (p. 161, Taf. III, 15) als *O. ciliata f. radians*. Aus seiner Schilderung (»setis in toto ambitu distributis») geht nicht hervor, ob hier die Stacheln einer Linie folgen oder über die ganze Körperfläche verteilt sind.

Von allen diesen Formen unterscheidet sich, den citierten Abbildungen nach zu urteilen, *O. Echidna* dadurch, dass die Stacheln schon innerhalb der Membran der Mutterzelle ausgebildet sind. Ferner ist zur Beschreibung der Art zu erwähnen das Vorhandensein von 1—4 wandständigen, keine Pyrenoide

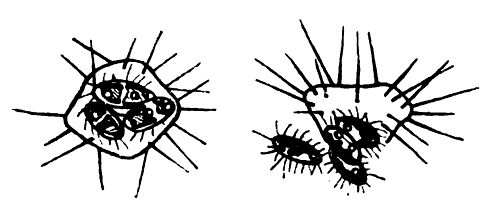


Fig. 7. *Oocystis Echidna* n. sp. $\frac{600}{1}$.

enthaltenden Chromatophoren. An Stelle der fehlenden Stärke enthält die Zelle häufig grosse Öltropfen.

Erwiesenermassen enthalten einige zur Gattung *Oocystis* zählende Formen sowohl Stärke als Pyrenoide, während dieselben bei anderen fehlen. Wahrscheinlich haben wir diese Gattung in zwei zu zerlegen, die, ohne in intimerem genetischem Zusammenhang zu stehen, analoge Zellteilung aufweisen. Ohne auf diese Frage näher einzugehen, möchte ich hier darauf hinweisen, dass der Charakter, durch welchen DE TONI (I, p. 665) seine Untergattung *Lagerheimia* von *Oocystis* unterscheidet, nicht einer solchen Teilung zu Grunde gelegt werden kann. Nach der Untersuchung von Exemplaren in WITTR. & NORDST., Alg. Exsicc. N:o 724, entbehrt *Lagerheimia ciliata* der Pyrenoide. Zwei andere, auf Grund ihrer Stachligkeit der Gattung *Lagerheimia*

zugesellte Arten, nämlich *L. genevensis* (CHODAT, I) und *L. wratislawiensis* (SCHRÖDER, p. 373) besitzen in den Chromatophoren ein deutliches Pyrenoid, und dürften daher eine von *Oocystis ciliata* und *O. Echidna* getrennte Gattung bilden. Auch darf wol das Vorhandensein der Stacheln als nachträgliche Anpassung (zum Zweck des Schwebens im Wasser, oder zum Schutz) betrachtet werden, die daher in gleichen Lebensverhältnissen bei Arten verschiedener innerer Zellstruktur auftreten kann.

Scenedesmus costatus SCHMIDL. β **coelastroides** n. v. Fig. 8.

Eigentümlich ist die Gestaltung der Zellkolonien. Die Zellen liegen nämlich, wo es deren 4 sind, in einem Tetraëder, wo 8, in einer etwas unregelmässigen, isodiametrischen, Coelastrum-

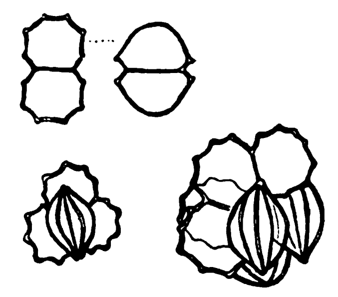


Fig. 8. *Scenedesmus costatus* SCHMIDL. β *coelastroides*. $\frac{600}{1}$.

ähnlichen Kolonie. Auch nur 2-zellige Coenobien wurden beobachtet. Oft enthalten die Zellen ein gelbbraunes Öl.

Runmarö, V. Svärdsholmen in Sphagnum-Sümpfen.

Phaeodactylum n. g.

In einer Felsenlache einer der von mir untersuchten äussersten Scheeren enthielt das Wasser die früher besprochene *Brachiomonas submarina* in grosser Menge. Daneben, obwohl seltener, fand sich im Wasser ein sehr eigentümlicher Organismus, der in der Kultur nach einiger Zeit, während *Brachiomonas* in den Ruhezustand überging oder wegstarb, sich lebhaft fortzupflanzen begann. Sein Aussehen gestaltet sich folgendermassen.

Der Organismus ist einzellig. Jede Zelle besitzt die Form eines Sterns, dessen 3 schmale, in einer Ebene liegenden Arme gleiche Winkel mit einander bilden. In der Mitte der Zelle und sich zu variierender Länge bis in die Arme ausdehnend, liegt ein wandständiges Chromatophor von *gelbbrauner* Farbe. Mit Haematoxylin lässt sich in der Mitte der Zelle ein Zellkern nachweisen. Ein weisses, tropfenförmig auftretendes Öl bildet das Stoffwechselprodukt. Die Fortpflanzung geschieht durch Teilung, die in einer durch alle Arme gelegten Ebene stattfindet (Fig. 9 *b*). Die Entstehung der Querwand in ihren Einzelheiten ist infolge der Kleinheit des Gewächses schwer zu verfolgen.

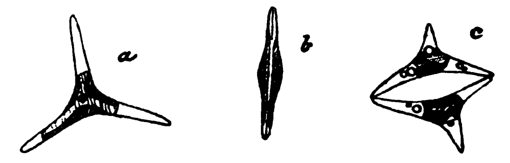


Fig. 9. *Phæodactylum tricornutum* n. sp. *a* Veg. Stad., *b*—*c* Teilungsstadien.

Phaeodactylum tricornutum n. sp. Fig. 9.

Die Länge der Zellarme beträgt 10—12 μ, die Breite 2—2,5 μ, die Dicke 2 μ.

Fundort: Stockholmer Scheeren, Brandskär bei Runmarö.

Schwer hält es, den systematischen Platz zu bestimmen, der diesem Organismus einzuräumen ist. Der Farbstoff des Chromatophors gleicht in allen seinen Reactionen dem Diatomin. Konz. H_2SO_4 färbt ihn sonach blaugrün, zuletzt violett; starke HCl blaugrün; $HONO_2$ wirkt blaugrün färbend bis entfärbend; KJ + J färbt das Chromatophor gelbbraun, KOH grün. Spiritus löst den Farbstoff. Auch das Assimilationsprodukt ist dem Öl der Diatomaceen sehr ähnlich. In Osmiumsäure färbt sich das Öl wie jenes der beigemischten Diatomeen schwach dunkel; bei Behandlung mit Spiritus nimmt, sowohl bei *Phaeodactylum* wie bei den Diatomeen, das Öl die Chlorophylllösung mit blaugrüner Farbe auf.

Ebenso erinnert die Teilungsebene an die der Diatomeen.

Soweit mit den mir zu Gebote stehenden Hilfsmitteln (SEIBERTS Apochr. Imm. 2 mm. und ZEISS' Compensationsocular) zu beobachten war, besteht die Membran aus einem Stück. Auch habe ich nirgends ein Zerfallen der Zelle in zwei Hälften — etwa beim Kochen lebender Zellen unter dem Deckglas, mit oder ohne Anwendung von Reagentien — konstatieren können. Betreffend ihr chemisches Verhalten ist zu bemerken, dass Chlorzinkjod die Membran nicht färbt, dass sie dagegen von DELAFIELD's (GRENACHER's) Haematoxylin eine stark blauviolette Farbe erhält (= einer beigemischten Diatomee). Die Membran wurde ferner auf Kieselsäure untersucht, indem sie nach vorausgehender Behandlung mit starker Salzsäure vorsichtig mit konz. Schwefelsäure zum Glühen gebracht wurde. Dabei liess die Membran ein dünnes Skelett zurück. Die beigemengten Diatomeen zeigten deutlich ihre verkieselten Membranreste, während andere eingemischte Algen dagegen (z. B. *Scenedesmus*) keinerlei Überreste hinterliessen. Die Membran erscheint sonach *schwach verkieselt.*

Unter diesen Umständen ist es wenig verlockend, *Phaeodactylum* der kleinen Zahl der bekannten einzelligen Phaeophyceen zu gesellen. Diese stehen alle mehr oder weniger den gelbbraunen Flagellaten nahe (LAGERH., IV, p. 288) oder haben wenigstens ein Schwärmsporenstadium (die Familie der *Phaeocapsaceae*, DE TONI, II, p. 591). Schon die Zellform macht ein fragliches Vorkommen von Zoosporen bei *Phaeodactylum* unwahrscheinlich. Aus der Litteratur ist mir nur eine einzellige braune Alge bekannt, der die Zoosporen fehlen. Es ist dies *Stichogloea* CHODAT (II, p. 302—304), die, obwohl nur als sich vegetativ fortpflanzend bekannt, von ihrem Autor den Flagellaten nahe gestellt wird. Ihre ellipsoidischen Zellen sind in einer Schleimhülle, zu 4 nahe bei einander liegend, zu kleinen Kolonien vereinigt. Die gelbbraunen, wandständigen Chromatophoren sind ohne Pyrenoide; als Assimilationsprodukt tritt ein Öl auf. Diese Alge und *Phaeodactylum* liessen sich möglicherweise zu einer den

Pleurococaceen unter den grünen Algen parallelen Familie vereinigen, die sich durch vegetative Teilung und das Fehlen der Schwärmsporen auszeichnen würde. Andere einzellige Braunalgen (*Phaeococcus*, *Entodesmis* u. a.) würden eine zweite Familie, parallel mit den *Tetrasporaceae* unter den Chlorophyceen, bilden.

Auf Grund des chemischen Verhaltens der Zelle und der charakteristischen Teilungsebene erscheint es mir jedoch am geeignetsten, *Phaeodactylum* als einen den Diatomeen nahe stehenden Organismus zu betrachten. Ich möchte hierbei daran erinnern, dass typische Planktondiatomeen häufig einen sehr geringen Gehalt an Kieselsäure aufweisen (SCHÜTT, p. 37). Von KLEBS (II, p. 284) wurde darauf hingewiesen, dass die Dauersporen von *Dinobryon*, *Mallomonas* und *Hydrurus* verkieselte Membranen besitzen, wonach also die Membranverkieselung bei den Diatomeen keine einzelstehende Erscheinung unter den gelbbraunen Organismen bildet. Wahrscheinlich giebt es noch mehrere solcher zu irgend einer Zwischengruppe gehörenden gelbbraunen Formen, die sich bislang der Beobachtung entzogen haben. Eine dieser Formen ist vielleicht *Streptotheca* CLEVE (SCHÜTT, p. 150), deren Membran nicht verkieselt ist. Endlich mag noch erwähnt werden, dass *Phaeodactylum* möglicherweise identisch ist mit *Cerasterias raphidoides f. tridens* (REINSCH., p. 68). Da von diesem Organismus jedoch kaum mehr als die Zellform bekannt ist, dürfte eine diesbezügliche Diskussion wertlos erscheinen.

Das kleine Gebiet, dem im vergangenen Sommer meine Untersuchung galt, ist die Ostküste der *Runmarö* nebst den davorliegenden Scheeren, die ich von Sandhamn im Norden bis Bullerö im Süden rechne. Obwohl klein, bietet dies Gebiet ein reiches Studienfeld. Runmarö selbst ist eine ziemlich grosse (ca. 4 km. lange und 3 km. breite) Insel, deren Ostrand von dem weiter ostwärts nur durch eine Reihe kleiner Scheeren vom offenen Meer getrennten Gråskärsfjärd umsäumt wird. Südwärts erstreckt sich ein Archipel von sehr zahlreichen Inselchen und

Scheeren aller Grössen. Während die der Runmarö zunächst liegenden kleinen Scheeren bewaldet sind, erscheinen die äusseren Scheeren und die kleinen Klippen kahl oder von niedrigem Gestrüpp, meist Wachholder (*Juniperus communis*), bedeckt. Natürlich finden sich jedoch auch auf den äussersten Scheeren öfters vereinzelte Bäume, gewöhnlich die Eberesche (*Sorbus Aucuparia*). Die meisten dieser Scheeren sind sehr niedrig (nur einige wenige Meter über dem Meeresspiegel); einzelne grössere können die Höhe von ca. 10—16 Meter erreichen. Die Strandklippen sind gewöhnlich niedrig und vom einstigen Binneneis, wenigstens auf ihrer Nord- und Westseite, glattgeschliffen. In diesen Klippen finden

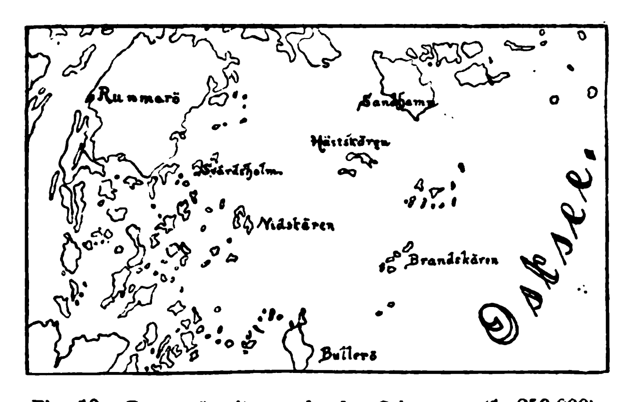


Fig. 10. Runmarö mit umgebenden Scheeren. (1 : 250,000).

sich tausende kleiner Höhlungen wechselnder Grösse, die mit süssem, oder in der Nähe des Ufers leicht salzhaltigem Wasser erfüllt sind. Viel seltener finden sich diese kleinen Wasseransammlungen auf den höheren Scheeren, da die Felsen der Nord- und Westseite schroff und uneben, und die gebildeten Höhlungen nicht gross genug sind, das Regenwasser längere Zeit zurückzuhalten.

Diese tausende von kleinen Lachen bilden für die Entwicklung von Süsswasseralgen ganz besonders geeignete Lokalitäten. Es ist eine dem Algologen wohlbekannte Tatsache, dass in der Natur häufig eine »Reinkultur» von Algen stattfindet, und zwar desto leichter, je kleiner die Wasseransammlung ist. In

den erwähnten Felshöhlungen findet man daher auch besonders häufig eine fast vollständig reine Algenvegetation.

Besonders reich an Wasseransammlungen und darin vegetierenden Organismen sind die sog. »Vogelscheeren». Diese weit draussen im offenen Meer gelegenen, sehr niedrigen und flachen Scheeren bilden vor andern eine Zuflucht der Seevögel. Hier gedeiht eine grosse Mannigfaltigkeit von Algen, deren Entwicklung die massenhaft in die Wasserbecken fallenden Excremente der Vögel allem Anschein nach günstig zu sein scheinen. Auf Scheeren, die vor dem übeln Geruch dieser Excremente kaum zu betreten waren, findet man widerwärtig riechende Wasserbecken von Algen förmlich ergrünen.

Vom physiognomischen Standpunkt aus glaube ich in der Algenvegetation der Scheeren 3 Formationen unterscheiden zu können: 1) *Die Torfmooralgenformation;* 2) *Die submarine Formation* und 3) *Die Regenwasseralgenformation.*

Die Torfmooralgenformation.

Auf einigen grösseren Scheeren sind die grösseren Wasserbecken ganz von Moosen erfüllt, vorzugsweise mit *Sphagnum-* und *Hypnum*-Arten. Wir finden in diesen kleinen Sümpfen die in solchen Lokalitäten gewöhnliche Algenvegetation wieder, die ich mit *Torfmooralgenformation* bezeichne.[1]) Charakteristisch ist derselben die bunte Mischung ungleicher Arten, unter denen *Desmidieen* und *Protococcoideen* die vorherrschende Anzahl stellen. Hier habe ich einige für Skandinavien neue Arten entdeckt wie z. B. *Scenedesmus costatus* und *Coelastrum proboscideum.*

Die submarine Formation.

Wie früher erwähnt wurde, liegt der Wasserlinie zunächst eine Reihe kleiner Wasserbecken, deren Wasser der Wellenschlag mehr oder weniger Meereswasser beimengt. Natürlich herrscht hier, was den Salzgehalt der einzelnen Becken, oder auch des

---

[1]) HANSGIRG (p. 9) nennt die Algenvegetation entsprechender Lokalitäten in Böhmen die sphagnophile.

Wassers in ein und demselben Behälter betrifft, eine ganz bedeutende Variation. Es wurden leider nur einige Wasserproben aus diesen Tümpeln aufbewahrt, deren Salzgehalt bestimmt wurde. Sie ergaben einen Gehalt von 1—1,5 gr. Cl pro Liter, während das Meereswasser etwas über 3 gr. p. L. enthält. Jedenfalls gedeihen indessen in diesem Wasser mehrere eigentümliche Arten, die in den vom Meeresrand entfernteren, mit reinem Regenwasser erfüllten Felshöhlungen nicht vorkommen. Eine künftige Untersuchung hätte zum Zweck, diese submarine Algenflora näher zu bestimmen; hier sollen nur einige, zweifellos hierhergehörende Formen erwähnt werden. Abgesehen von einigen bis jetzt nur unvollständig beobachteten Flagellaten sind als submarine Arten zu nennen: *Oocystis submarina*, *Brachiomonas submarina* und *gracilis*, sowie *Phaeodactylum tricornutum*. Über die beiden letzteren Gattungen ist zu bemerken, dass sie, laut einer Mitteilung des Herrn Professor LAGERHEIM, in ganz denselben Verhältnissen wie in den Stockholmer Scheeren auch bei Tromsö leben.

Die Regenwasseralgenformation.

Mit diesem Namen bezeichne ich die Algenvegetation aller nur mit Regenwasser erfüllten Felshöhlungen. Auf den Scheeren am reichsten vertreten, zeichnet sie sich dadurch aus, dass jede Wasseransammlung eine, oder wenige, verhältnissmässig »reinkultivierte» Arten enthält, die sonst im gewöhnlichen Süsswasser in bunter Mischung mit einander vorkommen.

Untersucht man gleichzeitig die vielleicht gegen hundert betragenden Süsswasseransammlungen einer Scheere, so findet eine lebhafte Vegetation zunächst nur in wenigen statt. In den meisten zeigt sich auf dem Grunde eine graugrüne Masse halbvermoderter Vegetationsüberreste, die zuweilen nur einer, oft mehreren Arten angehören. Da wo augenblicklich ein lebhaftes Wachstum stattfindet, erscheint die ganze Wassermasse grün. Dieses Entwicklungsstadium ist von verschiedener Dauer, beansprucht nur wenige Tage, wo die Vegetation aus Flagellaten,

manchmal mehrere Wochen, wo sie aus anderen Arten, z. B. *Dictyosphaerium Ehrenbergianum* besteht. Hat ein solches Wachstum sein Maximum erreicht, und ist darauf in der Abnahme begriffen, so sinken die entstandenen Ruhezellen — wo sich solche bilden (z. B. *Haematococcus*, *Stephanosphaera*-Zygoten) — oder die Überreste, zu Boden und bilden hier ein schmutziggrünes Lager. Mehrere Generationen verschiedenartiger Algen können sich so einander ablösen, was daraus hervorgeht, dass die Bodenschicht manchmal Reste mehrerer Arten enthält, während das darüber stehende Wasser von einer einzigen, lebhaft vegetierenden Art grün erscheint.

Es erübrigt noch ein Wort zu sagen über die in den genannten Regenwasserbecken am häufigsten vorkommenden Gewächse. Als die dort allergewöhnlichste Alge zögere ich nicht, *Dictyosphaerium Ehrenbergianum* [1]) zu nennen. Besonders allgemein sind *Scenedesmus caudatus* und *obtusus*, *Pediastrum Boryanum*, *Sphaerella pluvialis* sens. lat., *Oocystis solitaria* u. a. Sehr oft findet man eine ungleichförmige oder auch eine homogene Mischung mehreren dieser Arten. Seltener sind *Stephanosphaera pluvialis*, *Pandoria Morum*, *Chlamydomonas pulvisculus*, *Chlorogonium euchlorum*, *Staurogenia rectangularis*, *Oocystis Echidna*, *Coelastrum microporum*, *Anabaena sp.*, *Glaucocystis Nostochinearum* u. a.

Auch Fadenalgen finden sich im einen oder andern der grösseren Wasserbecken; sie sind in den meisten Fällen jedoch steril und unbestimmbar. Sehr gewöhnlich ist *Spirogyra;* recht häufig zeigen sich *Cladophora sp.* und *Oedogonium sp.*, seltener *Microspora sp.*

Die Verbreitung dieser Algen von einer Scheere zur andern dürfte wohl in den meisten Fällen auf Rechnung der Seevögel zu schreiben sein, ebenso wie manche Phanerogamen (z. B. *Lemna minor*, häufig auf den Scheeren) sich auf diese Weise verbreiten dürften. Einen wenn auch nicht zwingenden Beweis für diese

---

[1]) Konserv. Foslie hat in Wittr. & Nordst. Alg. exsicc. N:o 728. *Dictyosph. pulchellum* aus ganz ähnlicher Lokalität in Norwegen vertheilt.

Art der Verbreitung liefert auch der Algenreichtum der »Vogelscheeren». WILLE (S. 17) nimmt an, dass bei der Verbreitung der Süsswasseralgen gerade die Seevögel eine wichtige Rolle spielen und führt an, dass Gebiete übereinstimmender Algenvegetation durch Linien zusammengebunden gedacht werden können, die mit den Wegen der Zugvögel teilweise zusammenfallen. Ein Zoologe, JULES DE GUERNE, hat vom zoologischen Gesichtspunkt aus diese Frage experimentell studirt. Er fand dabei an dem Gefieder seiner Versuchstiere (Enten) Algenreste, Sporen, Cysten u. s. w. und an den Füssen Diatomeen und Desmidieen. Darauf dass noch andere Tiere, nämlich die Wasserkäfer, die Verbreitung der Süsswasseralgen vermitteln können, haben die direkten Beobachtungen und Experimente MIGULA's (p. 514—517) hingewiesen.

Citierte Litteratur.

BOHLIN = Studier öfver några slägten af alggruppen Confervales. (Bih. K. Sv. Vet. Akad. Förh. Bd 23, III, N:o 3. 1897).

BORZI = Intorno allo sviluppo sessuale di alcune Feoficee inferiori. (Atti del Congresso Botanico Internazionale 1892).

CIENKOWSKI = Ueber Palmellaceen und einige Flagellaten. (Arch. f. mikr. Anatomie. Bd. VI. 1870).

CHODAT I = Sur le genre Lagerheimia. (La Nuova Notarisia 1895).

CHODAT II = Étud. de Biologie lacustre. A. Recherches sur l. alg. pelag. d. quelq. lacs suiss. et franç. (Bull. d. l'Herb. Boissier T. V. N:o 5, 1897).

DANGEARD = Recherch. sur l. Algues inf. (Ann. Sc. nat. 7me Sér. Bot. I, 7).

FRANCÉ I = Über die Organisation von Chlorogonium. (Termesz. Füzetek. V. XX, 1897).

FRANCÉ II = Die Polytomeen. (Jahrbüch. f. wissenschaftl. Bot. herausgegeb. von Dr. N. Pringsheim. Bd. 26, H. 2. 1894).

GOROSCHANKIN I = Beitr. z. Kenntn. d. Morph. u. System. der Chlamydomonad. (Bull. Soc. Imp. Nat. Moscou N:o 3, 1890).

GOROSCHANKIN II = Beitr. z. Kenntn. d. Morph. u. Syst. der Chlamydomonad. (Bull. Soc. Imp. Nat. Moscou N:o 1, 1891).

DE GUERNE = Sur les disséminations des organismes d'eau douce par les Palmipèdes. (Compt. rend. hebd. d. séanc. Soc. Biolog. T. V, 8me Sér. Paris 1888). Ref. von ZACHARIAS (Biolog. Centralbl. N:o 12, 1888).

HANSGIRG = Neue Beitr. z. Kenntn. d. halophil., d. thermophil. u. d. Berg-Algenflora etc. (Oesterr. bot. Zeitschr. Jahrg. 1888, N:o 2, 3, 4 u. 5).

KLEBS I = Über d. Organis. einig. Flagellat. (Untersuch. Bot. Inst. z. Tübingen I, 2, 1883).

KLEBS II = Über d. Organis. d. Gallert. bei einig. Alg. u. Flagell. (Untersuch. Bot. Inst. z. Tübingen II, 1886).

KLEBS III=Flagellatenstudien I u. II. (Zeitschr. f. wissenschaftl. Zoologie. Lpz. 1892).

KRASSILTSCHIK = Zur Naturgeschichte und über die system. Stellung von *Chlorogonium euchlorum* EHR. (Zool. Anzeig. Jahrg. V. Lpz. 1882).

LAGERHEIM I=Studien über arktische Cryptogamen. (Tromsø Museums Aarshefte 17. 1894).

LAGERHEIM II=Bidrag t. känned. om Stockh. Pediastr. etc. (Öfvers. K. Vet. Akad. Förhandl. 1882, N:o 2).

LAGERHEIM III=Bidrag till Sverges Algflora. (Öfvers. K. Vet. Akad. Förhandl. 1883, N:o 3).

LAGERHEIM IV=Ueber Phæocystis Poucheti (HAR.) LAGERH. (Öfvers. K. Vet. Akad. Förhandl. 1896, N:o 4).

MIGULA=Die Verbreitungsweise der Algen. (Biolog. Centralblatt Bd. VIII, N:o 17, 1888).

REINSCH=Die Algenflora des mittl. Theiles von Franken. Nürnberg 1867.

SCHRÖDER=Planktonorganismen im Teiche des bot. Gartens zu Breslau. (Ber. Deutsch. Bot. Gesellsch. Jahrg. 15, Heft. 7).

SCHÜTT=*Bacillariales* in ENGL. & PRANTL., Die nat. Pflanzenfamilien H. 143—145.

STEIN=Der Organismus der Infusionsthiere. III, 1. Lpz. 1878.

DE TONI I=Sylloge Algarum. Vol. I. Patavii 1889.

DE TONI II=Sylloge Algarum. Vol. III. Patavii 1895.

WEST=On some new and interesting Freshwater Algæ. (Journ. R. Micr. Soc. 1896, pp. 149—165).

WILLE=Om Færöernes Færskvandsalger og om Færskvandsalgernes Spredningsmaader. (Botaniska Notiser 1897. H. 1 u. 2).

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 506.)

London. *Royal society.*
Proceedings. Vol. 62 (1897): N:o 379—380. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 14: P. 4. 1897. 4:o.
Proceedings. 1897: P. 3. 8:o.
— *Meteorological office.*
Monthly current charts for the Atlantic ocean. 1897. Fol.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1897: N:o 124—130. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian entomologist. Vol. 29 (1897): N:o 9—10. 8:o.
Lübeck. *Geographische Gesellschaft und naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. (2) H. 10—11. 1896. 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 41 (1896—97): P. 4. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorologico central.*
Boletín de agricultura, minera é industrias. Año. 6 (1896/97): N:o 7—8. 8:o.
— *Instituto geológico.*
Boletín. N:o 7—9. 1897. 4:o.
Moscou. *Société imp. des naturalistes.*
Bulletin. 1897: N:o 1. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte der math.-phys. Cl. 1897: H. 2. 8:o.
» » philos.-philol. u. hist. Cl. 1897: H. 3. 8:o.
Napoli. *Società reale di Napoli.*
Rendiconto. N. S. Anno 11: 4—5. 1897. 8:o.
New York. *Academy of sciences.*
Annals. Vol. 9: N:o 6—12. 1897. 8:o.
— *Public library.*
Bulletin. Vol. 1: N:o 9—10. 1897. 8:o.
Paris. *Bureau international des Poids et Mesures.*
Procès-verbaux des séances de 1895. 8:o.
Comptes rendus des séances de la deuxième conférence générale des poids et mesures réunie à Paris en 1895. 1896. 4:o.
— *Ministère des travaux publics, Division des mines.*
Annales des mines. (9) T. 11 (1897): Livr. 6; 12 (1897): 7. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 27 (1896/97): N:o 324; 28 (1897/98): 325. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 24 (1896): N:o 11; 25 (1897): 6. 8:o.
Philadelphia. *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 35 (1896): N:o 153; 36 (1897): 155. 8:o.

(Forts. å sid. 550.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola, N:o 168.

Ueber die Transpiration der Halophyten.

Von O. ROSENBERG.

[Mitgeteilt den 10 November 1897 durch A. G. NATHORST.]

In einer Abhandlung »Einige Versuche über Transpiration und Assimilation», Bot. Ztg. 1894, hat STAHL eine neue praktische Methode, die Transpiration der Pflanzen zu studieren, die sog. Kobalt-Methode, veröffentlicht. Mittelst dieser Methode ist es ihm gelungen, eine Menge interessanter, die Transpiration betreffender Beobachtungen, speciell das diesbezügliche Verhalten der Spaltöffnungen, zu beleuchten. Unter anderem geht der Verfasser näher auf die Frage der Transpiration der Halophyten ein. Es ist ja erstaunlich, dass auf mehr oder minder feuchten Standorten lebende Gewächse doch in ihrem Bau teilweise xerophytischen Charakter zeigen, wie z. B. Succulenz, kleine Intercellularräume, Isolateralität, u. dgl. m. Man hat diese Thatsache auf verschiedene Weise zu erklären versucht. So hat z. B. SCHIMPER (I) die Ansicht ausgesprochen, dieser eigentümliche, die Transpiration hemmende Bau beruhe darauf, dass die auf salzhaltigem Substrat wachsenden Halophyten sich vor dem schädlichen Chlorgehalt durch Einschränkung der Transpiration schützen, wodurch sich also im Pflanzenkörper weniger Chlor ansammeln könnte.

Von diesem Gesichtspunkt aus hat STAHL verschiedene Versuche mit im Laboratorium kultivierten Halophyten angestellt und ist dabei zu dem überraschenden Resultat gekommen, dass, aus dem raschen Rotwerden des aufgelegten Kobaltpapieres zu schliessen, die Halophyten keineswegs unbedeutend sondern im Gegenteil recht lebhaft transpirieren. Bei mehrmaliger Erneuerung des Papiers änderte dasselbe sogar fortwährend und beinahe

so schnell wie anfänglich die Farbe. Ich citiere Folgendes[1]: »Mein Erstaunen wuchs aber, als sich bald herausstellte, dass alle mir zur Verfügung stehenden Halophyten das wiederholt erneuerte Kobaltpapier ohne Unterlass zu verfärben fortfuhren, und zwar, wie bei den gewöhnlichen Sumpfpflanzen, die ihre Stomata nicht zu schliessen vermögen, bis zum völligen Eintrocknen, welches entsprechend der saftreichen Beschaffenheit dieser Pflanzen, sowie ihres Salzgehaltes halber, allerdings langsamer als bei jenen sich einstellte.»

Auf Grund dieser Versuche schreibt STAHL den Halophyten ein eigentümliches Verhalten zu, wonach sie der Fähigkeit, die Spaltöffnungen zu schliessen, völlig entbehren und sich, hierdurch natürlich eines der wichtigsten Schutzmittel gegen zu starke Transpiration beraubt, nach anderer Richtung hin xerophytisch ausbilden würden, um auf diese Weise den fehlenden Schutz zu gewinnen. Dies ist in Kürze das von STAHL erzielte Resultat betreffend die Transpiration der Halophyten. Ich gehe jetzt zu meinen eigenen Versuchen über.

Bei Gelegenheit einer im Sommer 1896 auf Gotland vorgenommenen Untersuchung der Strandvegetation von Fårön und Gotska Sandön wendete ich STAHLS Kobalt-Probe an. Das aus feinstem schwedischem Filtrierpapier hergestellte Kobalt-Papier war in eine 3 % Kobaltchlorur-Lösung getaucht. Die Untersuchung fand jederzeit im Freien und zwar so statt, dass ein Blatt unmittelbar nach der Trennung vom Mutterindividuum in zusammengefaltetes Kobaltpapier gelegt und von zwei Glasscheiben, oder besser noch grossen, von Klammern zusammengehaltenen Glimmerplatten eingeschlossen wurde. Ich experimentierte mit zahlreichen typischen Halophyten, so z. B. mit *Alsine peploides*, *Aster Tripolium*, *Atriplex hastata*, *Cakile maritima*, *Crambe maritima*, *Plantago maritima*.

Es zeigte sich nun, dass das Kobaltpapier sich in allen Fällen nach einigen Minuten bedeutend langsamer rötete und in der Folge, oft nach Verlauf von 15—30 Minuten, auch bei längerem

[1]) STAHL, l. c., pag. 137.

Aufliegen, fortwährend blau verblieb. Einige Beispiele werden weiter unten genannt.

Vielleicht dürfte es, ehe ich weiter gehe, am Platze sein, ein Wort über die Zuverlässigkeit der Methode einzuflechten, um so mehr, als dieselbe kürzlich von einem Forscher in Frage gestellt wurde (SCHELLENBERG, Bot. Ztg. 1896). Der Autor führt gegen die Methode die ausserordentliche Empfindlichkeit des Kobaltpapiers für die unbedeutendsten Feuchtigkeitsquantitäten an, so dass man, wo nach meiner Art der Bezeichnung[1]) die Farbveränderung z. B. als 3—4 anzusehen wäre, daraus keineswegs auf weitgeöffnete Spaltöffnungen schliessen könne. Im Gegenteil ist SCHELLENBERG der Ansicht, dass nur die mikroskopische Untersuchung in zweifelhaften Fällen zu entscheiden vermöge.

Wo es sich speciell um die Entscheidung der vorliegenden Frage handelt, ob die Spaltöffnungen sich zu schliessen imstande sind, oder nicht, und wenn es gilt zu zeigen, dass das Kobaltpapier von einem gewissen Zeitpunkt an sich nicht mehr verändert, muss jedoch STAHLS Kobaltprobe als durchaus genügend betrachtet werden. Denn geht bei einem so empfindlichen Papier die blaue Farbe nicht länger in Rot über, so tritt offenbar aus dem Blatt keine Feuchtigkeit mehr aus; die Spaltöffnungen sind geschlossen. Mit Recht hat übrigens STAHL (II) darauf hingewiesen, dass die Methode vollständig genügend und zuverlässig sei, in viel höherem Masse wenigstens als die mikroskopische Untersuchung, auf Grund deren LEITGEB (I) und SCHELLENBERG (I) zum entgegengesetzten Resultat gekommen sind. Man kann ja, sagt STAHL, nicht ganz sicher sein, ob man nicht, indem man einen der Blattfläche parallel gehenden Schnitt macht, schädlich auf die Turgescenzverhältnisse der Spaltöffnungen und der sie umgebenden Zellen einwirkt. Mit einem Wort, wo es zu entscheiden gilt, ob die Spaltöffnungen sich zu schliessen vermögen oder nicht, ist STAHLS Kobaltprobe durchaus genügend.

Das Princip, auf welches die Methode gegründet ist, ist bekanntlich, dass mit Kobaltchlorur getränktes Papier, im trockenen

[1]) Vergl. pag. 535.

Zustand intensiv blau, bei eintretender Feuchtigkeit sofort in eine, je nach dem Grad der Feuchtigkeit mehr oder weniger klare rote Farbe übergeht.

Bei Versuchen mit Kobalt-Papier am Meeresufer ist es recht schwer, ersteres blau zu erhalten. Die Luft ist, besonders bei starkem Meereswind, so von Feuchtigkeit gesättigt, dass das Papier die letztere beinahe sogleich aufnimmt und rot wird, noch ehe man dasselbe zwischen Glas- oder Glimmerscheiben dem Blatte auflegen konnte. Schwierig ist es ferner, bei windigem Wetter das Papier zu erwärmen. Ich verfuhr folgendermassen. In der Botanisierbüchse hatte ich ein grösseres, ziemlich weites und nicht zu hohes Glasgefäss, auf dessen Boden eine kleine Stearinkerze befestigt war. In diesem gläsernen Behälter brannte dieselbe auch bei ziemlich heftigem Wind weiter. Die Innenwände des Gefässes kleidete ich mit mehreren Lagen Kobalt-Papier aus, die sehr bald völlig trocken und blau wurden, auf welche Weise mir stets versuchsfertiges Kobaltpapier zur Verfügung stand. Allerdings ist beim Einlegen des Blattes in das Papier und dem Zusammenklemmen der Glimmerplatten sehr rasch zu verfahren, was bei einiger Uebung jedoch leicht zu bewerkstelligen ist.

Beim Versuch selbst wurde dann folgendermassen zu Werke gegangen. Das abgeschnittene Blatt wurde in blaues Kobaltpapier gelegt und von den Glimmerplatten dicht umschlossen. Als das Blatt einige Minuten transpiriert hatte, so dass das Kobaltpapier einen deutlichen, lebhaft roten Abdruck desselben gab, wurde das Papier entfernt, wieder getrocknet und aufs neue dem Blatt aufgelegt. Gleichzeitig wurde die Zahl der Minuten notiert, die das Kobaltpapier dem Blatt aufgelegen, sowie die Zeit zwischen den einzelnen Versuchen, während welcher das Blatt der freien Luft ausgesetzt war.

Das Versuchsprincip ist, durch das Abschneiden eines Blattes dasselbe allmählich zum Welken zu bringen, um dabei zu beobachten, ob die Spaltöffnungen sich nicht schliessen, ehe das Blatt mehr oder weniger vertrocknet oder erschlafft. Um daher diese fragliche Schliessung der Spaltöffnungen etwas zu beschleunigen,

liess ich das Blatt kürzere oder längere Zeit in der freien Luft liegen, ehe ich das Kobaltpapier wieder auflegte. Denn natürlich empfindet das von einer schützenden Hülle — dem Kobalt-Papier und den Glimmerscheiben — umgebene Blatt die Wirkung des Wasserverlustes bedeutend später und hält daher die Spaltöffnungen längere Zeit offen.

Wie früher schon bemerkt, fand ich, als ich solche Versuche an der Küste von Gotland und Sandhamn anstellte, dass die Spaltöffnungen aller nach der Kobalt-Methode untersuchten Halophyten die Fähigkeit sich zu schliessen zeigten.

In den folgenden Berichten über diese Versuche ist der Grad der Farbe, den das Kobaltpapier nach jedesmaliger Benützung zeigte, mit Ziffern angegeben worden. Die Bezeichnung, obwohl einfach genug und nur annähernd, dürfte jedoch für die in Frage stehenden Versuche genügen.

Die Zahlen 3—4 bedeuten, dass das der transpirierenden Fläche aufliegende Kobaltapier lebhaft rot gefärbt ist, dass demnach mit anderen Worten die Spaltöffnungen offen sind, und eine lebhafte Transpiration stattfindet; 2 bezeichnet einen etwas schwächeren roten Ton; 1, eine äusserst schwache, oft nur hier und dort auf der Blattfläche hervortretende rote Farbe. Die Spaltöffnungen wären hier also beinahe geschlossen; 0 bezeichnet natürlich, dass das Papier fortwährend blau erscheint, die Transpiration aufgehört hat, die Spaltöffnungen geschlossen sind.

Ein bei Sandhamn vorgenommener Versuch mit *Aster Tripolium* sei hier angeführt:

O (= Oberseite).	U (= Unterseite).	Z (= Zeit in Min.).
3	1	5
		1
3	1	5
		9
0	0	10

Der Versuch fand im Oktober, Mittags, bei starkem Meereswind statt; Temperatur 11 Uhr a.m. + 9° C. Das Experiment zeigt

also, dass zunächst eine recht lebhafte Transpiration auf der Oberseite des Blattes, eine beträchtlich geringere auf der Unterseite vor sich ging. Dasselbe Verhalten herrschte beim Auflegen des zweiten Kobaltpapiers. Nachdem daraufhin das Blatt 9 Minuten der Luft ausgesetzt war, und das Papier wiederum 10 Minuten aufgelegen hatte, zeigten sich die Spaltöffnungen geschlossen.

Ein anderer mit derselben Pflanze und ebenfalls bei Sandhamn, aber an einem sonnenhellen Tag im Juli vorgenommener Versuch ergab Folgendes:

O.	U.	Z.
3	3	2
1—0	0	8

Auch hier waren also die Spaltöffnungen geschlossen oder beinahe geschlossen. Hier haben wir demnach ein Resultat, das im direkten Gegensatz zu dem von STAHL erzielten steht. Ich kam auf die Vermutung, es möchte dies vielleicht auf dem so ausserordentlich geringen Salzgehalt der Ostsee beruhen, der um Sandhamn und Gotland herum nur 6—7 ‰ beträgt. STAHL giebt allerdings keine Prozentzahl der von ihm angewendeten Salzlösung an, doch vermute ich, dass dieselbe immerhin einen grösseren Prozentsatz wies als der mittlere Teil der Ostsee. So war jedenfalls die Möglichkeit vorhanden, dass meine Resultate auf dem geringeren Salzgehalt beruhen könnten, wenn es auch eigentümlich erscheinen mochte, dass typische Halophyten auf chlorarmem Boden das Vermögen, die Spaltöffnungen zu schliessen, wieder erhalten sollten. Um festzustellen, wie es sich hiermit verhielt, unternahm ich eine Reise nach Öresund und im folgenden Jahre an die schwedische Westküste. Der Salzgehalt ist hier bekanntlich bedeutend höher als in der Ostsee, 20—30 ‰, und es war daher zu erwarten, hier in typischeren Verhältnissen lebende Halophyten zu finden.

Ich werde im Folgenden über einige derselben zu berichten haben.

Bei den zahlreichen, ungefähr 250 betragenden Versuchen dieser Art, die ich im Laufe dieser beiden Sommer anstellte, erhielt ich in allen Fällen ungefähr übereinstimmende Resultate. Die Versuche an der schwedischen Westküste und bei Öresund wurden alle Ende Juni oder Anfang Juli, also während der Vegetationsperiode, bei meist schönem, sonnigem, zuweilen auch drückend heissem Wetter vorgenommen.

Wie schon bemerkt, fanden meine Versuche im Freien statt; doch wurden nach beendigter Tagesexkursion stets zahlreiche Exemplare in der Botanisiertrommel gesammelt und bei der Heimkehr sofort untersucht. Um das Welken der Blätter zu verhindern, wurden diese Exemplare so gross wie möglich gewählt. In der Tat zeigten dieselben sich im allgemeinen durchaus turgescent. Im folgenden Auszug aus meinen Versuchsprotokollen sind die mit diesen Exemplaren angestellten Versuche in der Columne »im Laboratorium» zu finden.

	In der Natur.			Im Laboratorium.			
	O.	U.	Z.	O.	U.	Z.	
Alsine peploides	3	3	5	0	0	20	a) Sandhamn.
	3—2	3—2	5				b) Fjällbacka.
	2—1	2—1	7				
	1	1	11				
	0	0	10				
Aster Tripolium	3	1	5	0	0	10	a) Sandhamn.
	3	1	5	0	0	10	b) Fjällbacka.
	—	—	10				
	0	0	10				
Atriplex hastata	3	2	3	0	0	20	a) Fjällbacka.
	—	—	20				b) »
	1—0	0—1	10				
Cochlearia danica . . .	0	3	6				a) Sandhamn.
	0	0	9				
Crambe maritima . . .	3	3	3	0	1—0	15	a) Fjällbacka.
							b) »
Elymus arenarius . . .				2	0	10	a) Fjällbacka.
				0	0	12	

	In der Natur.			Im Laboratorium.			
	O.	U.	Z.	O.	U.	Z.	
Erythraea vulgaris . . .				0	0	9	a) Sandhamn.
Glaucium flavum	3	2	3	0	0	15	a) Fjällbacka.
	0	0	10				b) »
Glaux maritima	3	3	2	0	0	20	a) Fjällbacka.
	—	—	5				b) »
	0	0—1	5				
Isatis tinctoria				3	3	4	a) Sandhamn.
				—	—	12	
				1—2	0	9	
				0	0	11	
Lathyrus maritimus . .	2—3	3	3	0	0	15	a) Fjällbacka.
	1—0	2	2				b) »
	0	1	5				
	0	0	10				
Mertensia maritima . . .	3—4	2	2	0—1	0	11	a) Fjällbacka.
	—	—	6				b) »
	2	1	2				
	—	—	10				
	2	1—0	5				
	—	—	10				
	0—1	0	5				
Plantago maritima . . .	0—1	2	5	3—2	0	30	a) Fjällbacka.
	0	0	10	—	—	15	b) »
				0—1	0	15	
Salsola Kali				1—2	0	7	b) Fjällbacka.
				0	0	15	
Scirpus maritimus . . .				0	0	30	b) Fjällbacka.
Silene maritima	3	2	5	0	0	18	a) Fjällbacka.
	—	—	60				b) »
	0	0	10				
Suaeda maritima				0	0	20	a) Fjällbacka.

Zur Erklärung obigen Auszugs aus meinen Versuchsprotokollen mag Folgendes hinzugefügt werden. Wie früher erwähnt, fanden die Versuche am Meeresstrand statt (in der Natur), während jeder Exkursion wurde aber eine grössere Anzahl Arten gesam-

melt, die nach erfolgter Heimkehr untersucht wurden. Diese letzteren Versuche haben ihren Platz in der Kolumne »Im Laboratorium» gefunden. O bedeutet Oberseite, U Unterseite der Blätter, Z die Zeit (in Minuten) des Aufliegens des Kobaltpapiers. Im Bericht über den Versuch mit *Aster Tripolium*, in der Natur, finden sich in der Zeitkolumne nach der zweiten Auflegung 10 Minuten verzeichnet, ohne dass eine den Verdunstungsgrad angebende Ziffer sich findet. Dies hat zu bedeuten, dass zwischen der zweiten und dritten Auflegung das Blatt 10 Minuten lang der Luft ausgesetzt blieb, um durch die stärkere Transpiration das Schliessen der Spaltöffnungen etwas rascher herbeizuführen. Ebenso verhält es sich mit *Atriplex*, *Mertensia* und andern. In der letzten Kolumne ist der Versuchsort angegeben; a) gilt dem Versuch in der Natur, b) dem im Laboratorium. Fjällbacka liegt am Kattegatt, Sandhamn an der Ostsee. Nach Schluss des Versuches zeigte sich das Blatt in allen angeführten Fällen bei weitem nicht welk, sondern im Gegenteil gewöhnlich beinahe durchaus turgescent.

Aus den hier gegebenen Exempeln für die Transpiration einiger typischer Halophyten dürften verschiedene Schlüsse zu ziehen sein. Wir bemerken, dass die Wasserdampfabgabe der Halophyten anfänglich recht erheblich ist, wie schon STAHL hervorgehoben hat. In allen genannten Fällen — und die Beispiele lassen sich vervielfältigen — hörte, wenn auch früher oder später, die Transpiration auf. Besonders schönen Nachweis für die Herabsetzung der Transpiration liefern *Alsine*, *Glaucium*, *Lathyrus*, u. a. m., lauter ausgeprägte Halophyten. Ich möchte darauf hinweisen, dass, wo aus der langsamen Entfärbung auf eine Verminderung der Transpiration zu schliessen war, ich das Papier dem Blatt länger als gewöhnlich anliegen liess.

Hat ein so empfindliches Papier wie das Kobaltpapier sich nach Verlauf von 10 Minuten nicht entfärbt, so darf man wohl mit vollem Recht annehmen, dass kein grösseres Mass von Feuchtigkeit dem Blatt entströmt ist, mit andern Worten, dass die Transpiration vollständig, oder beinahe vollständig, aufgehört hat.

Unterzieht man die Ziffern einer genaueren Betrachtung, so zeigt sich, dass zwischen den in der Natur angestellten und den im Laboratorium, — d. h. mit in der Botanisiertrommel gesammelten, gleich nach Heimkehr untersuchten Pflanzen, — gemachten Versuchen ein recht bedeutender Unterschied in der Transpirationsgrösse herrscht. Die Untersuchung der zur letztgenannten Kategorie gehörenden, also offenbar turgescenten und gesunden Pflanzen, die 1—2 Stunden nach der Einsammlung der Kobaltprobe unterworfen wurden, stellte fest, dass die Spaltöffnungen derselben sicher geschlossen waren. Besonders hervorgehoben seien die Versuche mit *Alsine*, *Glaux*, *Scirpus*, *Silene* und *Suaeda*, denen das Kobaltpapier bis zu einer halben Stunde auflag, ohne indessen die geringste Entfärbung zu zeigen. Die Erklärung dafür liegt vermutlich darin, dass, trotzdem die meisten Exemplare mit der Wurzel ausgegraben wurden, um die Turgescenz der Blätter so wenig wie möglich zu beeinträchtigen, die in der Botanisierbüchse liegenden Pflanzen immerhin, wenn auch in geringem Masse, vom Wassermangel gelitten und daher die Spaltöffnungen geschlossen hatten. Vielleicht auch — jedoch ist das weniger wahrscheinlich — beruht der Verschluss der Spaltöffnungen darauf, dass die Pflanzen in der Botanisierbüchse einige Zeit im Dunkeln zugebracht hatten.

Aus den angeführten Versuchen scheint somit — meiner Auffassung nach — die Verschliessbarkeit der Spaltöffnungen der Halophyten sich zu ergeben.

Zur ferneren Bestätigung dieser Ansicht diene folgender Versuch mit *Triglochin maritimum*. Das betreffende Exemplar wuchs am Ufer einer seichten Meeresbucht der schwedischen Westküste, deren Wasser nach der Analyse einen sehr hohen Chlorgehalt, ungef. 25 ‰, zeigte. Es war ein äusserst heisser, sehr sonniger Tag; die Blätter der Strandgewächse hingen hier und da etwas schlaff am Stengel. Das in Rede stehende Exemplar stand dicht am Wasser und war gross und üppig. Ein abgetrenntes und sofort dem Kobaltpapier aufgelegtes Blatt ergab folgende Transpiration:

O.	U.	Z.
0	0	17.

Dieser Versuch, dem mehrere ähnliche mit demselben Resultat folgten, stellt fest, dass *Triglochin* bei eintretender Gefahr zu starker Transpiration imstande ist, die Spaltöffnungen zu schliessen. Dieselbe Pflanze hat STAHL untersucht und dabei gefunden, dass die Spaltöffnungen offen blieben.

Ein ähnliches Verhalten zeigt folgender Versuch mit *Matricaria maritima.*

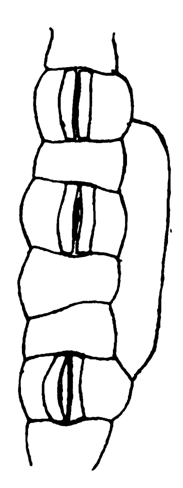
Das im Oktober 1897 bei Sandhamn ausgegrabene Exemplar wurde im Laboratorium einige Wochen als Topfgewächs kultiviert. Als die Pflanze einige Tage nicht begossen wurde, verminderte sich natürlich bald die Turgescenz der Blätter. Die Kobaltprobe ergab den völligen Verschluss der Spaltöffnungen. Noch nach 35 Minuten zeigte das Kobaltpapier seine blaue Farbe.

Ich erwähne noch ferner eines Versuchs mit *Aster Tripolium.* Bei Sandhamn, an der Ostsee, ausgegraben, wurde das betreffende Exemplar im Terrarium des Laboratoriums eingepflanzt, wo es zeitweise mit 7 % Salzwasser begossen wurde. Nach einem Monat wurde es aus dem Terrarium an ein nach Süden schauendes, direkt den Sonnenstrahlen ausgesetztes Fenster versetzt, wobei die Blätter bald Zeichen des Erschlaffens gaben. Ich trennte ein Blatt ab und untersuchte es sofort mittelst der Kobaltmethode, wobei das benützte Kobaltpapier sogar nach einer Stunde keinerlei Entfärbung zeigte. Querschnitte von Blättern zeigten einen sehr reichlichen Chlorgehalt.

Alle hier genannten Pflanzen wurden mit Thalliumsulfat auf Chlor geprüft und zeigten sowohl an der schwedischen Westküste wie am Ufer der Ostsee einen mehr oder minder erheblichen Niederschlag von Chlorthallium. Nur *Lathyrus maritimus* ergab einen sehr geringen Chlorgehalt.

Der Vollständigkeit wegen habe ich, um das Verhalten der Spaltöffnungen zu beobachten, neben STAHLS Methode auch noch die mikroskopische Untersuchung angewandt. Ich führe hier nur *Triglochin maritimum* an, indem ich auf die mit der Camera

gezeichnete beifolgende Figur hinweise. Diese stellt einen Tangentialschnitt der Blattepidermis dar. Die Versuchspflanze wuchs bei Fjällbacka, also in salzreichem Boden; das Kobaltpapier gab an, dass die Spaltöffnungen geschlossen waren. Auf der Figur erscheinen die beiden oberen Spaltöffnungen ebenfalls geschlossen; die unterste dagegen zeigt die eine ihrer Schliesszellen so gebogen, dass die Spalte mehr oder weniger offen steht. Dies beruht darauf, dass diese Spaltöffnung am Schnittrand lag, wo die Zellen mehr oder weniger verletzt waren, und die Turgescenz gelitten hatte.



Derartiger Exempel könnten noch mehrere angeführt werden. Das eben erwähnte ist besonders einleuchtend, indem es feststellt, dass die Spaltöffnungen der Halophyten sich keineswegs so unbeweglich verhalten, wie man nach STAHLS Beobachtungen zu vermuten veranlasst sein könnte.

Ich habe ferner noch das Verhalten der Spaltöffnungen zum elektrischen Strom untersucht. Bekanntlich schliessen sich die Schliesszellen, wenn ein elektrischer Strom durch ein Stück der Epidermis geleitet wird. Ein durch Blattepidermisstücke von *Aster Tripolium*, *Cochlearia danica*, u. a. Halophyten geleiteter stärkerer Inductionsstrom bewirkte nach kurzer Zeit den vollständigen Verschluss der vor dem Versuche mehr oder weniger offenen Spaltöffnungen.

Auf Grund des hier gegebenen Verhaltens der Halophyten bei der Transpiration scheint mir die Ansicht STAHLS, dass »die Halophyten das wiederholt erneuerte Kobaltpapier ohne Unterlass zu verfärben fortfuhren» und den allen Xerophyten möglichen Verschluss der Spaltöffnungen entbehren (I p. 138), für die freie Natur nicht ganz zutreffend zu sein.

Aus den mitgeteilten Ergebnissen ist indessen noch ein anderer, wie mir scheint, recht interessanter Schluss zu ziehen. Aus dem Versuch mit *Aster Tripolium* geht hervor, dass die Oberseite des Blattes reichlicher transpiriert als die Unterseite;

zahlreiche Versuche mit anderen Pflanzen ergaben dieselbe Transpirationsgrösse für Ober- und Unterseite, bei einigen sogar eine grössere Transpiration der Oberseite.

Einige weitere Exempel dürften geeignet sein, diese Ergebnisse näher zu beleuchten.

Folgende Uebersicht giebt die bei verschiedenen Meeresstrandgewächsen herrschenden Verhältnisse der Transpiration von Ober- und Unterseite des Blattes an:

Gruppe I. Nur die Unterseite transpiriert:

Angelica litoralis.
Cochlearia danica.
Haloscias scoticum.
Phragmites communis.
Valeriana officinalis.

Gruppe II. Die Unterseite transpiriert vorwiegend:

Hieracium umbellatum.
Lathyrus maritimus.
Odontites simplex.
Sonchus arvensis.
Stachys palustris.

Gruppe III. Ober- und Unterseite transpirieren gleich stark:

Alsine peploides.
Atriplex hastata.
Chenopodium.
Crambe maritima.
Glaux maritima.
Leontodon autumnalis.
Matricaria maritima.
Plantago * scopulorum.
Triglochin maritimum.

Gruppe IV. Die Oberseite transpiriert vorwiegend:

Aster Tripolium.
Cakile maritima.
Carex arenaria.
Elymus arenarius.
Glaucium flavum.
Isatis tinctoria.
Mertensia maritima.
Plantago maritima.
Polygonum aviculare.
Silene maritima.

Es ist zu erwarten, dass eine Art sich im einen oder andern Fall verschieden verhalten kann, so dass ein und dieselbe Art verschiedenen Gruppen angehören kann. Doch sind im all-

gemeinen mit jeder Art zahlreiche Versuche angestellt worden, wobei, was das Verhältniss der Transpirationsgrössen von Ober- und Unterseite zu einander betrifft, grosse Regelmässigkeit festzustellen war. Indessen geht hieraus hervor, dass von 29 beobachteten Strandpflanzen nur bei 10 die Transpiration der Unterseite vorwiegt, während bei 19 Arten die Oberseite ganz ebenso stark wie die Unterseite, bei 10 derselben sogar stärker als diese transpiriert. Berücksichtigt man nur die typischen, speciell sich durch ausgesprochene Succulenz auszeichnenden Halophyten, so bemerkt man, dass von 17 solcher (in der Liste fettgedruckter) Arten nur 2 den Gruppen I und II angehören, während 8 in der Gruppe III und nicht weniger als 7 in der Gruppe IV, — wo die Oberseite stärker transpiriert als die Unterseite, — ihren Platz finden. Dieser eigentümliche Umstand steht offenbar im Zusammenhang mit dem isolateralen Blattbau dieser Gewächse, wenn die Isolateralität allein auch nicht zu erklären vermag, woher es kommt, dass eine so grosse Zahl der Gruppe IV angehört. Eine genauere Prüfung der hierhergehörenden Versuche dürfte ergeben, dass diese Frage komplizierter Natur ist.

Einige Versuche mit der Gruppe IV angehörenden Arten seien hier genannt.

Cakile maritima.
Sandhamn, Okt. 1896.

O.	U.	Z.
3	2	5
3	0	8
2	0	9
2	0	9
1	0	10

Plantago maritima.
Fjällbacka, Juni 1897.

O.	U.	Z.
3	0	2
1—2	0	10
2	0	4
1—2	0	3
1	0	3

Aster Tripolium.
Fjällbacka, Juni 1897.

4	1—0	4
4—3	0	3
2	0	3
1—2	0	2

Aster Tripolium.
Sandhamn, Okt. 1897.

3—4	3—4	6
3	1—2	8
1—2	0	8.

Diesen vier Beispielen ist deutlich zu entnehmen, dass die Transpiration der Unterseite bedeutend geringer ist als die der Oberseite. Zwar findet auch aus ersterer anfänglich eine ziemlich lebhafte Wasserdampfabgabe statt, doch tritt schon nach der erstmaligen Erneuerung des Kobaltpapiers der Unterschied scharf hervor. Man hätte glauben können, es fehlen der Unterseite die Spaltöffnungen. Dies ist jedoch keineswegs der Fall, und dagegen spricht auch der Umstand, dass anfänglich beide Seiten transpirieren. Die mikroskopische Untersuchung lehrt, dass sich Spaltöffnungen auf beiden Seiten, und überraschender Weise in recht beträchtlicher Anzahl sogar auf der Unterseite finden. Mehrfach wiederholte Zählungen derselben auf der ganzen Oberfläche ergaben folgende Durchschnittszahlen: *Aster Tripolium* hat an der Oberseite 26, an der Unterseite 29 Spaltöffnungen im Gesichtsfeld (nach BRICK (I p. 42) 56 resp. 60 auf 1 qmm.). *Cakile maritima* zeigt als entsprechende Zahlen: 14 und 17; *Mertensia maritima* 44 und 55 und *Plantago maritima* 39 und 33.

Hieraus geht hervor, dass einige Arten an beiden Blattseiten ungefähr gleich viele Spalten besitzen, andere aber an der Oberseite mehr zeigen. Wie hat man sich nun die Verschiedenheit der Transpirationsgrösse auf Ober- und Unterseite zu erklären? Man könnte annehmen, die Spaltöffnungen der Oberseite seien grösser, weiter geöffnet, als die der Unterseite. Dagegen spricht indessen der Umstand, dass die Transpiration der Unterseite in der That sehr bald völlig aufhört. Die oben mitgeteilten Versuche mit *Cakile* und *Plantago* haben gezeigt, dass das Kobaltpapier schon bei der zweiten und dritten Anlegung noch nach 10 Minuten seine blaue Farbe behielt. Demnach ist es nicht denkbar, dass der Unterschied in der Transpirationsgrösse auf dem Vorhandensein kleinerer Spaltöffnungen auf der Unterseite beruhe. Der Vollständigkeit halber lasse ich die durch mehrfache Messungen gewonnenen Durchschnittsgrössen der Spaltöffnungen hier folgen.

	Grösse der Zellen.				Öffnungsweite.			
	Länge.		Breite.		Länge.		Breite.	
	Ob.s.	U.s.	Ob.s.	U.s.	Ob.s.	U.s.	Ob.s.	U.s.
Aster Tripolium	49	48	39	40	34	36	15	16
Cakile maritima	43	43	32	32				
Mertensia maritima . . .	32	31	22	22				
Plantago maritima	35	37	26	24	23	22	10	9

Aus obigen in μ ausgedrückten Massen erhellt, dass ein wesentlicher Unterschied weder in der Grösse der Schliesszellen noch in der Weite der Spaltöffnungen stattfindet.

Eine andere Erklärung wäre die, dass an der Oberseite die Intercellularen grösser wären als an der Unterseite; mit andern Worten, dass die transpirierende Fläche an der Oberseite offener liege als an der Unterseite. Ich habe mehrere Arten daraufhin untersucht, die Intercellularen der Oberseite jedoch nicht grösser gefunden. Im Gegenteil herrscht z. B. bei *Mertensia* u. a. keine vollständige Isolateralität, sondern sind die Intercellularen der Unterseite etwas grösser.

Es bleibt mir somit für die Verschiedenheit der Transpirationsgrösse keine andere Erklärung übrig als die, es liege die Ursache davon in der Beschaffenheit der Spaltöffnungen selbst, die sich darin äussert, dass die Spaltöffnungen der Oberseite sich langsamer schliessen als die der Unterseite. Sehr wahrscheinlich ist dies auf äussere Factoren zurückzuführen. Zur Erläuterung dieser Annahme diene folgender Versuch.

Ein ungefähr ein Jahr lang im Laboratorium kultiviertes Exemplar von *Aster Tripolium* aus Sandhamn wurde anfänglich mit Salzwasser, später hauptsächlich mit Leitungswasser begossen. Die Blätter wurden dünner, und die mikroskopische Untersuchung ergab deren deutlich dorsiventralen Bau und an ihrer Unterseite ein ziemlich typisches Schwammparenchym. Die Spaltöffnungen zeigten ein etwas anderes Verhältniss: 33 : 27, d. h. 33 an der Ober-, 27 an der Unterseite.

Wiederholte Versuche mit der Kobaltmethode führten zu der interessanten Beobachtung, dass, im direkten Gegensatz zu den am Meeresstrand gemachten, hier die Unterseite am stärksten transpirierte. Schon nach 2—3 Minuten war das der Unterseite anliegende Papier verfärbt, während die Oberseite nur eine blass rötliche Färbung bewirkte. Man könnte annehmen, dass die lebhafte Transpiration der Unterseite darauf beruhe, dass sie grössere Intercellularen besitzt. Dem widerspricht aber wiederum der Umstand, dass die Spaltöffnungen an der Oberseite zum mindesten ebenso zahlreich sind als an der Unterseite.

Das zuletzt angeführte Experiment spricht deutlich dafür, dass aus der Zahl der Spaltöffnungen keineswegs immer mit Sicherheit auf die Grösse der Transpiration zu schliessen ist.

Eine Vergleichung des letztangeführten mit den vorhergehenden Versuchen könnte zu der Annahme verleiten, es sei die überwiegende Transpiration der Oberseite mehr eine blosse Zufälligkeit. Das kann indessen nicht der Fall sein. Wie früher erwähnt, wurde stets eine grössere Anzahl Versuche mit jeder einzelnen Art vorgenommen, um hierdurch zu einer richtigen Vorstellung über die Transpirationsverhältnisse zu kommen. Von 15 Versuchen mit *Aster Tripolium* ergaben 13 eine grössere Transpiration der Oberseite, 2 ungefähr dieselbe Transpirationsgrösse beider Seiten; von 7 Versuchen mit *Cakile* war das letztere nur 1 Mal der Fall. Etwas eigentümlicher erscheint *Plantago*, wo von 14 Versuchen 12 eine grössere Transpiration der Oberseite, 2 dagegen eine solche der Unterseite zeigten, worauf ich besonders aufmerksam machen möchte. Beim einen dieser beiden Versuche steht in meinen Notizen vermerkt, dass die Unterseite des Blattes nach oben gekehrt war. Bekanntlich besitzt *Plantago maritima* mehr oder weniger vertikal gestellte Blätter, die sich mit dem oberen Ende etwas nach aussen biegen. Oft sieht man jedoch die Unterseite gewisser Blätter nach oben gewendet, was auf einer kleinen Drehung des unteren Blatteiles beruht. Der Kobaltprobe unterworfen zeigte ein solches Blatt

ein von dem gewöhnlichen abweichendes Transpirationsverhältniss, indem die grössere Transpiration aus der Unterseite stattfand. Ich führe diesen Versuch ohne weiteres an, ohne daraus zunächst irgend welche Schlussfolgerungen zu ziehen. Leider ward mir nämlich keine Gelegenheit, weitere Versuche mit derartigen Blättern anzustellen, wesshalb ich nicht in der Lage bin, zu entscheiden, ob die erwähnte Beobachtung als Zufälligkeit anzusehen ist, oder nicht.

Aus den mitgeteilten Resultaten dieser im Laufe zweier Jahre an verschiedenen Standorten angestellten Untersuchungen geht hervor, dass zahlreiche Halophyten keineswegs der Fähigkeit des Spaltenverschlusses entbehren; ferner, dass bei mehreren Halophyten die Blattoberseite deutlich stärker transpiriert als die Unterseite ohne dass die Art der Verteilung der Spaltöffnungen an beiden Seiten eine Erklärung für diese Thatsache gäbe; dass somit in gewissen Fällen aus der Zahl und Grösse der Spaltöffnungen nicht mit Bestimmtheit auf die Transpirationsgrösse geschlossen werden darf. Ich hoffe, diese Untersuchungen bald fortsetzen zu können und dann meine Aufmerksamkeit speciell den Fragen zuzuwenden, welche die erhaltenen Resultate veranlassen können.

Die vorliegende Untersuchung wurde im botanischen Institut der Universität zu Stockholm ausgeführt. Ich spreche hiermit meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor G. LAGERHEIM für seine freundschaftliche Unterstützung während der Arbeit meinen besten Dank aus.

Litteratur-Verzeichniss.

BRICK, (I) Beiträge z. Biologie .... der baltischen Strandpflanzen. Schriften d. naturforsch. Ges. Danzig, VII, 1888.

LEITGEB, (I) Beiträge zur Physiologie der Spaltöffnungen. Mittheil. d. botan. Instituts zu Graz. Bd I.

SCHELLENBERG, (I) Beiträge z. Kenntniss von Bau und Function der Spaltöffnungen. Botan. Zeitung, Leipzig 1896.

SCHIMPER, (I) Die indo-malayische Strandflora. Jena, 1891.

STAHL, (I) Einige Versuche über Transpiration und Assimilation. Botan. Zeitung, Leipzig 1894.

—, (II) Ueber den Pflanzenschlaf und verwandte Erscheinungen Botan. Zeitung, Leipzig 1897.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 530.)

Potsdam. *K. Geodätisches Institut.*
Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn. 1897. 4:o.

Saint John. *Natural history society of New Brunswick.*
Bulletin. N:o 15. 1897. 8:o.

Saint Louis. *Academy of science.*
Transactions. Vol. 7: N:o 4—16. 1895—97. 8:o.

San Francisco. *Astronomical society of the Pacific.*
Publications. Vol. 9: N:o 55. 1897. 8:o.

— *California academy of sciences.*
Proceedings. (2) Vol. 6. 1896. 8:o.
» (3) Botany 1: 1; Geology 1: 1; Zoology 1: 1—3. 1897. 8:o.

St. Pétersbourg. *Académie impériale des sciences.*
Bulletin. (5) T. 6: N:o 3. 1897. 8:o.

— *Comité géologique.*
Mémoires. Vol. 14: N:o 5. 1896. 4:o.
Bulletins. 15 (1896): N:o 6—9; 16 (1897): 1—2. 8:o.

— *Société astronomique russe.*
Izvjestija. Bd. 5 (1896): N:o 9; 6 (1897): 1—3. 8:o.

— *Societas entomologica Rossica.*
Horæ. T. 31 (1896/97): N:o 1—2. 8:o.

— *Musée zoologique.*
Annuaire. 1897: N:o 2. 8:o.

— *Section géologique du cabinet de Sa Majesté.*
Travaux. Vol. 2: Livr. 2. 1897. 8:o.

— *Laboratoire biologique.*
Bulletin. Vol. 2: Livr. 2. 1897. 8:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*
Izvjestija. T. 32 (1896): Livr. 5—6; 33 (1897): 1. 8:o.

— *Universitetet.*
Obozrjenie prepodavanija nauk 1897/98. 8:o.

Sydney. *Linnean society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 22 (1897): P. 1. 8:o.

— *Australian museum.*
Report of trustees for the year 1896. Fol.

— *Observatory.*
Results of rain, river, and evaporation observations made in New South Wales 1895. 8:o.

— *Department of mines and agriculture.*
Annual report. Year 1896. Fol.

Tokyo. *Geographical society.*
Journal. Vol. 18 (1896): N:o 3. 8:o.

(Forts. å sid. 568.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

247. Triazolföreningar, framstälda af aldehyder och dicyanfenylhydrazin. III.

Af E. L. RINMAN.

[Meddeladt den 10 November 1897 genom P. T. CLEVE.]

4.

Inverkan af salicylaldehyd på dicyanfenylhydrazin.

Salicylaldehyd reagerar lätt med dicyanfenylhydrazin vid vanlig temperatur i alkohollösning efter tillsats af ett par droppar klorvätesyra. För reaktionen användes beräknade mängder aldehyd och dicyanförening, lösta i alkohol. Vid tillsats af några droppar klorvätesyra till denna lösning, utfaller efter kraftig omskakning kondensationsprodukten såsom en rödgul kristallinisk fällning. För reaktionens slutförande är uppvärmning ej nödvändig, men den kan derigenom påskyndas. Den från lösningen befriade produkten renas lämpligen genom omkristallisation ur benzol; i alkohol är den mycket lättlöslig. Den rena föreningen erhålles dervid i form af små gula kristaller, hvilka under sönderdelning smälta vid 161° C.

Analys:

1) 0,2426 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,6024 gr. CO_2 och 0,1034 gr. H_2O.

2) 0,2252 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 41,6 kbcm. qväfgas vid 16,°2 C. och 746 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet: 1.	2.
C_{15}	68,2	67,7	—
H_{12}	4,5	4,7	—
O	6,1	—	—
N_4	21,2	—	21,1
	100,0		

Analysen visar sålunda, att kondensation egt rum under utträde af 1 mol. vatten. Kondensationsproduktens formel blir således:

```
                    N—C—CN
                    ‖  ‖
  (C6H4)——CH  N
     |             |
    OH          HN—C6H5
```

Denna förening kan sedan såsom liknande oxideras till:

(1) Fenyl-(5) ortooxifenyl-(3) cyantriazol.

```
                    N—C—CN
                    ‖  ‖
  (C6H4)——C   N
     |          \ /
    OH          N—C6H5
```

Oxidationen af kondensationsprodukten kan utföras antingen med järnklorid eller silfvernitrat. Bäst är dock att använda järnklorid, då triazolföreningen dervid erhålles renare och i bättre utbyte. Vid utförandet förfares så, att till alkohollösningen af kondensationsprodukten sättes något mera än beräknad mängd järnklorid, löst i alkohol. Derefter uppvärmes på vattenbad tills reaktionen är fullständig, hvarefter lösningen afdunstas under det den bortkokande alkoholen ersättes med vatten. När alkoholen afdunstat, erhålles triazolföreningen i form af glänsande blad, hvilka noga uttvättas med varmt vatten. Kristallerna, hvilka hafva gråaktig färg, erhållas fullständigt rena genom behandling med blodlutskol i alkohollösning. Föreningen bildar små glänsande, hvita blad och nålar.

Cyantriazolföreningen är lättlöslig i eter och isynnerhet i benzol. Den är löslig i isätticka men svårlöslig i gasolja. Föreningen är något flyktig redan vid 100° C. samt smälter vid 179—180° C.

Analys:

1). 0,2098 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,0753 gr. H_2O.

2). 0,2208 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 40,2 kbcm. qväfgas vid 16,°3 C. och 759 mm. barometertryck.

	Beräknadt;	Funnet: 1.	2.
C_{15}	68,7	—	—
H_{10}	3,8	4,0	—
O	6,1	—	—
N_4	21,4	—	21,6
	100,0		

(1) Fenyl-(5) ortooxifenyl-(3) triazolkarbonsyra.

$C_{12}H_{10}O . C_2N_3 . CO_2H.$

Motsvarande karbonsyra erhålles lätt på vanligt sätt genom saponifiering af nitrilen i alkohollösning med stark kalilut. Surgöres efter reaktionens slut den från alkohol under vattentillsättning afdunstade utspädda lösningen af det så erhållna kalisaltet med klorvätesyra, utfaller karbonsyran såsom ett hvitt pulver. Sedan produkten frånskilts lösningen och torkats, erhålles den fullt ren, om man utkokar densamma i träspritlösning med blodlutskol. Det dervid erhållna filtratet afdunstas sedan från träsprit, emedan denna, på grund af föreningens lättlöslighet deri, ej är lämplig såsom kristallisationsmedel. Afdunstningen afbrytes, då träspriten i det närmaste är afdunstad, hvarefter den ersättes med vanlig alkohol, hvarur föreningen kristalliserar i hvita, små nålar, ordnade till bollar. Efter ett par omkristallisationer är föreningen ren och smälter under gasutveckling vid 196°,5 C.

Analys:

0,2128 gr. exs.-torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,4998 gr CO_2 och 0,0808 gr H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{15}	64,1	64,1
H_{11}	3,9	4,2
O_3	17,1	—
N_3	14,9	—
	100,0	

Karbonsyran är löslig i alkohol och mycket lättlöslig i träsprit. Den är svårlöslig i benzol, eter och isätticka äfven vid värme samt mycket svårlöslig i vatten. Föreningen löses lätt i 20 % klorvätesyra men är svårlöslig i varm konc. klorvätesyra. Ur den konc. syran utkristalliserar vid afsvalning ett hydroklorat, hvilket dock sönderdelas vid liggande i luft.

Karbonsyran oxideras lätt af kaliumpermanganat i alkalisk lösning. Löses den i 9 % natronlut, och behandlas denna lösning med stark permanganatlösning under uppvärmning på vattenbad, erhålles såsom produkt den af BLADIN framstälda (1) fenyl- (3,5) triazoldikarbonsyran.

Alkalisalterna äro i vatten lättlösliga.

Silfversaltet, $C_{12}H_{10}O \cdot C_2N_3 \cdot CO_2Ag$, erhålles såsom en hvit amorf fällning, då en neutral lösning af amoniumsaltet försättes med silfvernitrat. Saltet är något lösligt i varmt vatten.

Analys:

0,2167 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning 0,0620 gr. Ag.

	Beräknadt:	Funnet:
Ag	27,8 %	28,6 %.

Kopparsaltet, $(C_{12}H_{10}O \cdot C_2N_3 \cdot CO_2)_2Cu$, erhålles såsom en blekgrön fällning, om en neutral lösning af amoniumsaltet fälles med kopparsulfat. Saltet är något lösligt i varmt vatten och afskiljes derur vid afsvalning i form af ljust blågröna, mikroskopiska nålar.

Analys:

0,2034 gr. vid 150° torkad substans gaf vid förbränning 0,0262 gr. CuO.

	Beräknadt:	Funnet:
Cu	10,1 %	10,3 %.

Etrar af (1) Fenyl- (5) ortooxifenyl- (3) triazolkarbonsyra.

Etrarna erhållas bäst, om man under lindrig uppvärmning låter alkyljodider inverka på vid 100° torkadt silfversalt.

Etyletern, $C_{12}H_{10}O . C_2N_3 . CO_2C_2H_5$, framställd på ofvan angifvet sätt, skiljes från jodsilfret genom extraktion med eter. Efter eterns afdunstning renas föreningen genom omkristallisation ur alkohol. Den erhålles dervid i form af färglösa, tjocka nålar, ordnade i bollar. Smältpunkt 143°,5 C.

Analys:

0,1933 gr. vid 90° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 22,5 kbcm. qväfgas vid 16°,4 C. och 763 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{17}	66,0	—
H_{15}	4,9	—
O_3	15,5	—
N_3	13,6	13,8
	100,0	

Metyletern, $C_{12}H_{10}O . C_2N_3 . CO_2CH_3$, bildar, framställd på liknande sätt, efter extraktion från jodsilfret med eter och några omkristallisationer ur alkohol, dels hvita, glänsande nålar dels färglösa prismer, beroende på lösningens koncentration. Smältpunkt 161°,5 C.

Analys:

0,2041 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 24,6 kbcm. qväfgas vid 16°,3 C. och 764 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	65,1	—
H_{13}	4,4	—
O_3	16,3	—
N_3	14,2	14,4
	100,0	

Tiamid af (1) Fenyl- (5) ortooxifenyl- (3) triazolkarbonsyra.

$C_{12}H_{10}O . C_2N_3 . CS . NH_2$.

Tiamiden erhålles, om man till full mättning inleder svafvelväte i en lindrigt uppvärmd amonialkalisk alkohollösning af motsvarande cyantriazolförening samt låter lösningen i slutet kärl stå ungefär 24 tim., hvarvid föreningen utkristalliserar. Renad genom några omkristallisationer ur alkohol, bildar föreningen små, gula prismer. Smältpunkt 207°—208° C.

Analys:

0,2324 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning med soda och kaliumklorat 0,1912 gr. $BaSO_4$.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{15}	60,8	—
H_{12}	4,1	—
O	5,4	—
N_4	18,9	—
S	10,8	11,3
	100,0	

5.

Inverkan af vanillin på dicyanfenylhydrazin.

Äfven denna aldehyd inverkar lätt på dicyanfenylhydrazin vid rumstemperatur, om man till en alkohollösning af de båda föreningarna i beräknade mängder sätter några droppar klorvätesyra. Kondensationsprodukten, som dervid bildas, utfaller

dock först efter kraftig omröring. Den erhålles dervid i form af en gul fällning, hvilken, sedan reaktionen försiggått, skiljes från moderluten. För rening löses föreningen i benzol, försatt med litet gasolja. Derur erhålles den allt efter gasoljans mängd i form af gula kristaller eller ett gult pulver. Den smälter under sönderdelning vid 170°—171° C.

På denna förening gjordes ej analys, beroende på den ringa tillgången på material. Reaktionens likhet med de förut beskrifna borgar dock för, att här kondensation egt rum under utträde af 1 mol. vatten. Den bildade föreningen bör derför vara en kondensationsprodukt af sammansättningen:

N—C—CN
HO—C_6H_3—CH N
HN—C_6H_5
OCH_3

Denna förening kan såsom liknande oxideras till:

(1) Fenyl- (5) metametoxiparaoxifenyl- (3) cyantriazol.

N—C—CN
HO—C_6H_3—C N
N—C_6H_5
OCH_3

Oxidationen kan utföras både med silfvernitrat och järnklorid. Järnkloriden är dock att föredraga, då denna nitril, liksom den under 4 beskrifna, ur den varma, svagt alkoholiska, järnkloridhaltiga vattenlösningen afskiljes i form af kristaller, hvilka medelst tvättning med varmt vatten kunna befrias från järnsaltet. För rening omkristalliseras substansen lämpligast ur benzol, försatt med litet gasolja. Derigenom erhålles den lätt fullständigt ren i form af små färglösa prismer. Smältpunkt 151° C.

Föreningen är löslig i varm alkohol och isätticka, nästan olöslig i eter och gasolja.

Analys:

0,2110 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,3857 gr. CO_2 och 0,0820 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	65,7	65,7
H_{12}	4,1	4,3
O_2	11,0	—
N_4	19,2	—
	100,0	

(1) Fenyl- (5) metametoxiparaoxifenyl- (3) triazolkarbonsyra.

$C_{13}H_{12}O_2 . C_2N_3 . CO_2H.$

Karbonsyran erhålles genom saponifiering af nitrilen i alkohollösning med stark kalilut. Då reaktionen är fullständig, afdunstas alkoholen under det vatten så småningom tillsättes, och sedan utfälles karbonsyran ur vattenlösningen af kaliumsaltet medelst klorvätesyra. Dervid faller föreningen såsom ett hvitt pulver, hvilket vid omröring bildar flockor. Efter filtrering torkas produkten och renas genom några omkristallisationer ur alkohol. Substansen erhålles dervid i form af hvita, glänsande nålar, hvilka under gasutveckling smälta vid 188° C.

Karbonsyran är olöslig i eter, något löslig i benzol, svårlöslig i kall samt lättlöslig i varm isätticka.

Analys:

0,1696 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,3857 gr. CO_2 och 0,0624 gr. H_2O.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{16}	61,7	62,0
H_{13}	4,2	4,1
O_4	20,6	—
N_3	13,5	—
	100,0	

Alkalisalterna äro i vatten lättlösliga.

Silfver- och *Koppar*-salterna äro amorfa fällningar.

I varm koncentrerad klorvätesyra löses karbonsyran fastän med svårighet, och ur den så erhållna lösningen utkristalliserar vid afsvalning ett *hydroklorat* i form af en hvit, glänsande kristallmassa, bestående af mikroskopiska nålar.

Analys:

0,1124 gr. exsickatortorkad substans afgaf vid 100° C. 0,0166 gr. HCl.

	Beräknadt för: $C_{13}H_{12}O_2 . C_2N_3 . CO_2H + 1\frac{1}{2}HCl$.	Funnet:
$1\frac{1}{2}HCl$	15,0 %	14,8 %.

Tillägg.

Oxidation af (1) Fenyl- (5) paraisopropylfenyl- (3) triazolkarbonsyra.

Vid försök att oxidera denna karbonsyra med permanganat, fann jag snart, att oxidation kunde åstadkommas äfven i svagt alkalisk lösning. På grund häraf samt till följd af ett råd från Docenten BLADIN, beslöt jag undersöka, huruvida det var möjligt endast drifva oxidationen så långt, att i karbonsyran gruppen $(CH_3)_2CH$— öfvergick i $(CH_3)_2 . C . OH$. —. Försöken i denna rigtning ledde också, efter åtskilliga försök, till önskadt resultat. Går man tillväga på följande sätt, erhålles nämligen den sökta föreningen.

2 gr. väl renad och vid 100° torkad karbonsyra löses i 20 kbcm. 9 %-ig natronlut, och till denna lösning, uppvärmd på vattenbad, sättes beräknad mängd (0,7 gr.) kaliumpermanganat, löst i 20 kbcm. varmt vatten. Lösningen uppvärmes sedan på vattenbad, tills allt permanganatet blifvit affärgadt. Den utfälda mangansuperoxiden frånskiljes lösningen, och denna, hvilken innehåller kaliumsaltet af den sökta föreningen, surgöres efter utspädning med vatten medelst saltsyra. Därvid utfaller eller utkristalliserar karbonsyran så småningom beroende på lösningens utspädning. Produkten renas lämpligen genom omkristallisation ur 50 %-ig alkohol. Dervid erhålles karbonsyran i form af hvita nålar, hvilka hålla 1 mol. kristallvatten. Kristallvattnet bortgår fullständigt vid 100° C. Föreningen smälter under sönderdelning vid 170° C.

Analys:

1) 0,1972 gr. vid 100° torkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,4849 gr. CO_2 och 0,0880 gr. H_2O.

	Beräknadt för: $C_{18}H_{16}O . C_2N_3 . CO_2H$.	Funnet:
C_{18}	66,9	67,1
H_{17}	5,2	5,0
O_3	14,9	—
N_3	13,0	—
	100,0	

2) 0,2311 gr. lufttorkad substans gaf vid förbränning i öppet rör 0,5396 gr. CO_2 och 0,1170 gr. H_2O.

	Beräknadt för: $C_{18}H_{16}O . C_2N_3 . CO_2H + H_2O$.	Funnet:
C_{18}	63,3	63,7
H_{19}	5,6	5,6
O_4	18,8	—
N_3	12,3	—
	100,0	

Analysen visar sålunda, att den genom oxidation erhållna produkten bildats af den ursprungliga genom upptagande af 1 atom syre. Då gruppen $(CH_3)_2CH$— är den, som är lättast oxiderbar, måste den erhållna produkten vara:

(1) Fenyl- (5) paraoxiisopropylfenyl- (3) triazolkarbonsyra.

$$\begin{matrix} (CH_3)_2 . C . OH . C_6H_4 \\ C_6H_5 \end{matrix} \Big> C_2N_3 . CO_2H$$

Karbonsyran är löslig i alkohol, isätticka samt konc. klorvätesyra, mycket svårlöslig i både kallt och varmt vatten samt benzol och olöslig i eter.

Alkalisalterna äro i vatten lättlösliga.

Silfversaltet är en hvit amorf fällning.

Metyleter af (1) Fenyl- (5) paraoxiisopropylfenyl- (3) triazolkarbonsyra.

$$\begin{matrix} (CH_3)_2C . OH . C_6H_4 \\ C_6H_5 \end{matrix} \Big> C_2N_3 . CO_2CH_3.$$

Metyletern erhålles, om man behandlar vid 100° torkadt silfversalt med något öfverskott af jodmetyl. Dervid inträder

reaktion genast utan föregående uppvärmning. Föreningen skiljes från jodsilfver genom utkokning med alkohol. Metyletern bildar, efter rening med blodlutskol och omkristallisering ur alkohol, hvita, glänsande nålar, hvilka smälta vid 156°—157° C.

Analys:

0,1622 gr. vid 90° torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 17,6 kbcm. qväfgas vid 17° C. och 772 mm. barometertryck.

	Beräknadt:	Funnet:
C_{19}	67,7	—
H_{19}	5,6	—
O_3	14,2	—
N_3	12,5	13,0
	100,0	

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897. N:o 9.
Stockholm.

Till teorien för kometernas upplösning i meteorsvärmar.

Af Östen Bergstrand.

(Meddeladt den 10 November 1897 genom N. C. Dunér.)

Schiaparelli har påvisat möjligheten af kometernas upplösning i meteorsvärmar på grund af solens perturberande inverkan.[1]) Vid denna undersökning betraktar Schiaparelli en komet som bestående af en sfärisk, homogen svärm af små kroppar, hvilka ömsesidigt attrahera hvarandra och som alla äro underkastade solens attraktion; någon repulsiv kraft antages för enkelhets skull icke existera.

Vi beteckna med ξ, η, ζ de rätvinkliga koordinaterna för en till svärmen hörande partikel N i ett rörligt koordinatsystem, hvars origo är svärmens tyngdpunkt C; till $\xi\eta$-plan välja vi banplanet för punkten C i dess rörelse kring solen S; vidare låta vi ξ-axeln sammanfalla med förlängningen af radius vektor SC. Rörelseekvationerna för N kunna då skrifvas under följande form:[2])

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \dfrac{2k\sqrt{p}}{r^2}\dfrac{d\eta}{dt} - \dfrac{k^2\xi}{r^3}\left(\dfrac{p}{r} + 2\right) - \dfrac{2k\sqrt{p}}{r^3}\dfrac{dr}{dt}\eta + U\dfrac{\xi}{\varrho} = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{2k\sqrt{p}}{r^2}\dfrac{d\xi}{dt} - \dfrac{k^2\eta}{r^3}\left(\dfrac{p}{r} - 1\right) + \dfrac{2k\sqrt{p}}{r^3}\dfrac{dr}{dt}\xi + U\dfrac{\eta}{\varrho} = 0 \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + \dfrac{k^2}{r^3}\zeta + U\dfrac{\zeta}{\varrho} = 0\,, \end{cases}$$

[1]) Schiaparelli, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen (deutsche Ausgabe von Boguslawski, 1871), Cap. VIII.

[2]) Se t. ex. Tisserand, Traité de mécanique céleste, t. IV, 1896, p. 270.

där U betecknar svärmens attraktion på N och

$$(2) \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 .$$

Om vi nu antaga, att partikeln N befinner sig i det inre af svärmen, ha vi:

$$(3) \quad U = \tfrac{4}{3} \pi \varrho f \cdot D$$

eller:

$$(4) \quad U = n^2 \frac{m}{M} \left(\frac{a}{\varrho_0}\right)^3 \varrho ,$$

då D, m, ϱ_0 och a beteckna svärmens täthet, massa, radie och medelafstånd från solen samt M solmassan.

För detta fall har CHARLIER undersökt vilkoren för stabilitet under antagande att svärmens heliocentriska bana är cirkulär.[1] PICART har utsträckt undersökningen till det fall, då N befinner sig utanför eller på begränsningen af svärmen.[2] I det följande skall jag uteslutande betrakta det fall, då N är en partikel i det inre af svärmen.

Om man sätter:

$$(5) \quad \frac{m}{M} \left(\frac{a}{\varrho_0}\right)^3 = \mu$$

samt inför medelanomalien l i stället för tiden t som oberoende variabel, öfvergå ekvationerna (1) i följande:

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dl^2} + \dfrac{2a\sqrt{ap}}{r^2}\dfrac{d\eta}{dl} - \dfrac{a^3}{r^3}\left(\dfrac{p}{r} + 2\right)\xi - \dfrac{2a\sqrt{ap}}{r^3}\dfrac{dr}{dl}\eta + \mu\xi = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dl^2} - \dfrac{2a\sqrt{ap}}{r^2}\dfrac{d\xi}{dl} - \dfrac{a^3}{r^3}\left(\dfrac{p}{r} - 1\right)\eta + \dfrac{2a\sqrt{ap}}{r^3}\dfrac{dr}{dl}\xi + \mu\eta = 0 \\ \dfrac{d^2\zeta}{dl^2} + \dfrac{a^3}{r^3}\zeta + \mu\zeta = 0 . \end{cases}$$

---

[1] CHARLIER, Über die Bildung von Meteorströmen durch Auflösung der Kometen (Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, t. XXXII, n:o 3, 1888).

[2] PICART, Sur la désagrégation des essaims météoriques (Annales de l'observatoire de Bordeaux, t. V, 1894).

Om man negligerar tredje digniteten af kometbanans excentricitet e, får man genom serieutvecklingar följande system:[1])

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dl^2} + 2(1 + 2e\cos l + \frac{5}{2}e^2\cos 2l)\dfrac{d\eta}{dl} - \\ \qquad - (3 + 10e\cos l + 5e^2 + 16e^2\cos 2l)\,\xi - \\ \qquad - 2(e\sin l + \frac{5}{2}e^2\sin 2l)\,\eta + \mu\xi = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dl^2} - 2(1 + 2e\cos l + \frac{5}{2}e^2\cos 2l)\dfrac{d\xi}{dl} - \\ \qquad - (e\cos l + \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{2}e^2\cos 2l)\,\eta + \\ \qquad + 2(e\sin l + \frac{5}{2}e^2\sin 2l)\,\xi + \mu\eta = 0 \\ \dfrac{d^2\zeta}{dl^2} + (1 + 3e\cos l + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{2}e^2\cos 2l)\,\zeta + \mu\zeta = 0\,. \end{cases}$$

TISSERAND har angifvit en metod att genom integration af dessa differentialekvationer härleda stabilitetsvilkoret under antagande af en elliptisk bana. CALLANDREAU har enligt en annan metod utfört integrationen intill termerna af tredje ordningen [2]) och funnit stabilitetsvilkoret

$$\mu > 3 + 5e^2\,.$$

Detta resultat kan emellertid med användande af en af BOHLIN angifven allmän metod härledas på ett mycket enkelt sätt endast ur lefvande kraftens integral.[3]) En analog metod har för öfrigt af PICART användts vid undersökningen af det fall, då partikeln N befinner sig utanför svärmen.

Vi skrifva ekvationerna (7) under formen

$$(8)\;.\;.\;.\;.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dl^2} + 2\dfrac{d\eta}{dl} + (\mu - 3 - 5e^2)\,\xi = eX \\ \dfrac{d^2\eta}{dl^2} - 2\dfrac{d\xi}{dl} + (\mu - \frac{1}{2}e^2)\,\eta = eY \\ \dfrac{d^2\zeta}{dl^2} + (\mu + 1 + \frac{3}{2}e^2)\,\zeta = eZ\,. \end{cases}$$

[1]) Se TISSERAND, Mécanique céleste, t. IV, p. 276.

[2]) CALLANDREAU, Sur la désagrégation des comètes (Bulletin astronomique, t. XIII, p. 465, 1896). Jfr CALLANDREAU, Sur la désagrégation des comètes. Rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. CXXIV, n:o 22, 1897).

[3]) BOHLIN, Über die Bedeutung des Principes der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme (Acta mathematica, t. X, p. 109, 1887).

Härvid äro följande beteckningar införda:

$$(9) \;.\;.\; \begin{cases} X = \left[-4\dfrac{d\eta}{dl} + 10\xi\right]\cos l + 2\eta\sin l + eX' \\ Y = \left[4\dfrac{d\xi}{dl} + \eta\right]\cos l - 2\xi\sin l + eY' \\ Z = -3\zeta\cos l + eZ', \end{cases}$$

då X', Y' och Z' äro kvantiteter, som endast innehålla periodiska termer af formen

$$A\cos 2l + B\sin 2l,$$

där A och B äro koefficienter, som innehålla ξ, η och ζ samt deras derivator af första ordningen med afseende på l.

Om vi nu multiplicera ekvationerna (8) i ordning med $2\dfrac{d\xi}{dl}$, $2\dfrac{d\eta}{dl}$ och $2\dfrac{d\zeta}{dl}$, addera alla tre ekvationerna samt integrera, erhålla vi:

$$(10) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \left(\frac{d\xi}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dl}\right)^2 +$$
$$+ (\mu - 3 - 5e^2)\xi^2 + (\mu - \tfrac{1}{2}e^2)\eta^2 + (\mu + 1 + \tfrac{3}{2}e^2)\zeta^2 =$$
$$= 2e\int\left[X\frac{d\xi}{dl} + Y\frac{d\eta}{dl} + Z\frac{d\zeta}{dl}\right]dl + K,$$

där K är en konstant.

Som bekant har man:

$$(11) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \left(\frac{d\xi}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dl}\right)^2 = \frac{v^2}{n^2},$$

om v betecknar kroppens N relativa hastighet. Sätter man då enligt BOHLINS metod:

$$(12) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; v^2 = 0,$$

så följer däraf omedelbart, att

$$\frac{d\xi}{dl} = \frac{d\eta}{dl} = \frac{d\zeta}{dl} = 0,$$

och således äfven att

$$\int\left[X\frac{d\xi}{dl} + Y\frac{d\eta}{dl} + Z\frac{d\zeta}{dl}\right]dl = 0.$$

Ekvationen (12) kan alltså skrifvas:

$$(13)\quad (\mu - 3 - 5\,e^2)\,\xi^2 + (\mu - \tfrac{1}{2}\,e^2)\,\eta^2 + (\mu + 1 + \tfrac{3}{2}\,e^2)\,\zeta^2 = K\,.$$

Genom denna ekvation definieras en viss andragradsyta, hvilken uppdelar rymden i två områden; i det ena är uttrycket för v^2 positivt, i det andra negativt. Partikeln N kan endast röra sig inom det förra området.

Af ekvationen (13) ser man omedelbart, att vilkoret för att den ifrågavarande ytan skall vara ellipsoidisk, d. v. s. att partikeln N ej skall kunna obegränsadt aflägsna sig från svärmens centrum, är

$$\mu > 3 + 5\,e^2$$

eller

$$(14)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{m}{M}\left(\frac{a}{\varrho_0}\right)^3 > 3 + 5e^2\,.$$

Denna olikhet utgör just det af CALLANDREAU härledda stabilitetsvilkoret.

Af detta resultat framgår, att under de gifna förutsättningarna:

1) möjligheten för kometens sönderdelning på grund af solens perturberande inverkan är beroende af dess relativa täthet, samt att:

2) för en gifven täthet denna möjlighet till sönderdelning är större, ju mindre halfva storaxeln är hos kometens bana omkring solen och ju större banans excentricitet är.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 550.)

Tokyo. *Imperial geological survey of Japan.*
Catalogue of articles and analytical results of the specimens of soils exhib. at the 7th intern. geological congress. S:t Petersburg. 1897. 8:o.
— *Zoological society.*
Annotationes zoologicæ japonenses. Vol. 1: P. 3. 1897. 8:o.
— *Imp. university, College of sciences.*
Journal. Vol. 10: P. 2. 1897. 4:o.
Toronto. *Canadian institute.*
Proceedings. N. S. Vol. 1: P. 2. N:o 2. 1897. 8:o.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 32 (1896/97): Disp. 7—15. 8:o.
— *Musei di zoologia ed anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 12 (1897): N. 268—295. 8:o.
Utrecht. *Hoogeschool.*
Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool (4) 5: Aflevering 1. 1897. 8:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
Annual report. 1894/95. 8:o.
International exchange list. 1897. 8:o.
— *U. S. Department of agriculture.*
North American fauna. N:o 13. 1897. 8:o.
Farmers' bulletin. N:o 54. 1897. 8:o.
— *U. S. Coast and geodetic survey.*
Bulletin. N:o 36. 1897. 4:o.
Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Mittheilungen der prähistorischen Commission. Bd 1: N:o 4. 1897. 4:o.
— *K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. N. S. Bd 31—33. 1894—96. 4:o.
— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 47 (1897): H. 4—7. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Jahrbuch. Bd 46 (1896): H. 3—4; 47 (1897): 1. 8:o.
Verhandlungen. 1897: N:o 6—10. 8:o.
— *Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.*
Schriften. Bd 37 (1896/97). 8:o.
— *K. K. Universitäts-Sternwarte.*
Annalen. Bd 10—12. 1896. 4:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 42 (1897): H. 2. 8:o.
— *Schweizerische geodätische Kommission.*
Schweizerische Dreiecknetz. Bd 7: T. 1. 1897. 4:o.

Af författarne:

AGARDH, J. G., Analecta Algologica. Continuatio 4. Lund 1897. 4:o.
ADELSKÖLD, CL., John Ericsson. Sthlm 1894. 8:o.

ANDERSSON, A., Upsala universitets styresmän, lärare och tjänstemän 1872—1897. Upsala 1897. 4:o.
BENGTSSON, S., Studier öfver insektlarver. Lund 1897. 4:o.
BÄCKSTRÖM, H., Vestanåfältet. Sthlm 1897. 4:o.
CEDERSTRÖM, C., Vermlands läns fiskevatten. D. 4. Karlstad 1897. 8:o.
EKSTAM, O., Blütenbiologische Beobachtungen auf Novaja Semlja. Tromsö 1897. 8:o.
ENESTRÖM, G., Sur la méthode de Johan de Witt (1671) pour le calcul de rentes viagères. 1897. 8:o.
ERIKSSON, J., Studier öfver berberisbuskens hexqvastrost. Sthlm 1897. 8:o.
— 15 st. småskrifter. 1894—97. 8:o.
LILJE, C. A., Die Gesetze der Rotationselemente der Himmelskörper. Sthlm 1897. 8:o.
LINDVALL, C. A., Linné och Skandinaviens nivåförändringar. Sthlm 1897. 8:o.
MURBECK, S., Contributions à la connaissance de la flore du nord-ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie. Lund 1897. 4:o.
NATHORST, A. G., Zur fossilien Flora der Polarländer. Th. 1: L. 2. Sthlm 1897. 4:o.
NILSSON, A., Om Norrbottens växtlighet med särskild hänsyn till dess skogar. 1897. 8:o.
NORDENSTRÖM, G., L'industrie minière de la Suède en 1897. Sthlm 1897. 8:o.
OLSSON, P., Väderleken i Östersund 1896. Östersund 1897. 8:o.
TÖRNEBOHM, A. E., Über die Petrographie des Portland-Cements. Sthlm 1897. 8:o.
WESTERLUND, C. A., Synopsis molluscorum extramarinorum regionis Palæarcticæ. Lund 1897. 8:o.
— Synopsis molluscorum extramarinorum Scandinaviæ. Hfors 1897. 8:o
— Beiträge zur Molluskenfauna Russlands. S:t Pétersbourg 1897. 8:o.
WIJKANDER, A., Hållfasthetsprof å svenska materialier. Sthlm 1897. 4:o.
BÄTTERMANN, H., Tafeln zur Berechnung der Mondparallaxe für Vorausberechnung von Sternbedeckungen. Berlin 1897. 4:o.
BERTHOT, P., Des forces mutuelles et de leurs applications aux phénomènes mécaniques, physiques et chimiques. 1 & 2. Paris 1886. 1897. 8:o.
— 2 småskrifter 4:o.
DAMMER, U., Über die Auzucht der Raupe des Seidenspenners. Frankfurt a. d. Oder 1897. 8:o.
DOSAMANTES, J. C., Ciencia y religion del porvenir, solucion a los grandes problemas. Mexico 1897. 8:o.
— Théorie sur les rayons invisibles. Mexico 1897. 8:o.
FRITSCHE, H., Über die Bestimmung der Coefficienten der Gaussischen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus für das Jahr 1885. S:t Pétersbourg 1897. 8:o.

GANSER, A., Das Weltprincip und die transcendentale Logik. Lpz. 1897. 8:o.

GEELMUYDEN, H., Nogle magnetiske observationer i Nordmarken og Christiania. Kra 1897. 8:o.

GLASENAPP, S. DE, Mesures micrométriques d'étoiles doubles faites à St.-Pétersbourg et à Domkino. St.-Pétersbourg 1897. 8:o.

HEIBERG, HJ., Om betändelsens väsen med specielt hensyn til de kroniske indurative betändelser i hjerte, lunger, lever og nyrer. Sthlm 1897. 8:o.

— 27 småskrifter. 8:o.

HJELT, E., Ett blad ur kemins historia i Finland. Hfors 1897. 8:o.

LANGLEY, S. P., Memoir of George Brown Goode 1851—1896. Washington. 1897. 8:o.

LEBEUF, M. A., Sur une nouvelle démonstration des Polynomes. Paris. 4:o.

MANCINI, D., Odi epistole satire. 1897. 8:o.

MOORE, L. B., The death of Falstaff and other poems. Baltimore 1897. 8:o.

POTONIÉ, H., Über die fossile Pflanzen-Gattung Tylodendron. Berlin 1888. 8:o.

— 18 småskrifter. 8:o.

RABOT, C., Les variations de longueur des glaciers dans les régions arctiques et boréales. Genève 1897. 8:o.

RAMSEY, G. M., Philosophy of Phenomena. Boston 1897. 8:o.

RANCKEN, E., Undersökning af svaflets liniespektrum. Hfors 1897. 4:o.

REUTER, E., Berättelse öfver skadeinsekters uppträdande i Finland. Hfors 1897. 8:o.

RUSSELL, H. C., Current papers, N:o 2. 1896. 8:o.

SARAUW, G. F. L., Cromer-skovlaget i Frihavnen og trælevningerne i de ravförende sandlag ved Köbenhavn. Khvn 1897. 8:o.

SCHAFFERS, V., L'excitation spontanée dans les machines électrostatiques. 1897. 8:o.

SOCOLOW, S., Des planètes se trouvant vraisemblablement au delà de Mercure et de Neptune. Moscou 1897. 8:o.

STONE, E. J., Tables for facilitating the computation of star-constants. London 1897. 8:o.

THIELE, T. N., Elementær Iagttagelseslære. Khvn 1897. 4:o.

WEINEK, L., Über das feinere selenographische Detail der focalen Mond-Photographien der Mt. Hamiltoner und Pariser Sternwarte. Prag 1897. 8:o.

WOLFER, A., Astronomische Mitteilungen gegründet von Dr. Rudolf Wolf. Zürich 1897. 8:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 54. 1897. № 10.

Onsdagen den 8 December.

INNEHÅLL:

Herr THÉEL redogjorde för några märkliga former af aktinieartade djur, som lefva i symbios eller bolag med andra djur, särskildt med krabbor och eremitkräftor, samt förevisade några säregna fall af dylika bolag från såväl norra hemisferen som från södra polarhafven.

Herr MITTAG-LEFFLER refererade en i tidskriften Acta mathematica införd afhandling af G. H. DARWIN i Cambridge med titel: »Periodic Orbits». samt öfverlemnade för offentliggörande en uppsats af Fil. Licentiaten I. BENDIXSON: »Sur la convergence uniforme des séries», äfvensom en uppsats af studeranden H. GRÖNWALL: »Deux théorèmes sur les nombres transcendants».

Herr HASSELBERG förevisade och beskref en för Akademiens fysiska institution konstruerad mätningsapparat för spektralfotogrammer.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

i Handlingarne: »Vergleichende thiergeographische Untersuchungen über die Plankton-Fauna des Skageraks in den Jahren 1893—1897», af Docenten C. AURIVILLIUS;

i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Die hydrographischen Verhältnisse der oberen Wasserschichten des nördlichen Nordmeeres zwischen Spitzbergen, Grönland und der Norwegischen Küste in den Jahren 1896 und 1897», af Professor O. PETTERSSON och Ingeniör G. EKMAN; 2:o) »Ueber die photoelektrischen Erscheinungen I», af Doktor H. LUGGIN; 3:o) »Ueber die Wirkungsart der Tropfelektroden», af Docenten W. PALMÆR; 4:o) »Om praseodidymens spektra», af Lektor S. FORSLING; 5:o) »Ueber den Kohlensäuregehalt der Atmosphäre», af studeranden GERDA TROILI-PETERSSON; samt

i Öfversigten: 1:o) »Öfver katodens sönderdelning i förtunnade gaser», af Docenten G. GRANQVIST; 2:o) »Öfver en metod att bestämma fasskillnaden vid ljusets gång genom dubbelbrytande metallskikt», af densamme; 3:o) »Sur la convergeance uniforme des séries», af Fil. Licentiaten I. BENDIXSON; 4:o) »Deux théorèmes sur les nombres transcendants», af studeranden H. GRÖNWALL; 5:o) »Zur Kenntniss der Phloroglycinazofarbstoffe», af studerandena T. EKECRANTZ och A. RISING.

Genom anställda val kallades, dels till inländska ledamöter Bibliotekarien vid Kongl. universitetet i Upsala Dr. CLAËS ANNERSTEDT och Professorn vid Tekniska Högskolan PER WILHELM ALMQVIST, samt dels till utländsk ledamot Professorn vid Conservatoire des arts et métiers i Paris LOUIS NICOLAS GRANDEAU.

Det *Letterstedtska* resestipendiet tilldelades Docenten vid Stockholms Högskola Dr. OSCAR CARLGREN med uppgift att i Tyskland och Italien idka zoologiskt fysiologiska studier.

Det *Wahlbergska* resestipendiet tilldelades Docenten vid Upsala universitetet Dr. CARL W. S. AURIVILLIUS med uppgift antingen att idka zoologiska studier inom Ostindiska arkipelagen

och företrädesvis de austromalayiska ögrupperna, eller att undersöka Atlantiska hafvets planktonförhållanden från jemförande biologisk-hydrografisk synpunkt.

Det *Beskowska* stipendiet anvisades åt studeraden J. GUNNAR ANDERSSON för att vid Riksmuseets afdelning för lägre evertebrater bearbeta dess samlingar af skandinaviska och arktiska ostrakoder.

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 4 häften. 4:o.
— *K. Biblioteket.*
Handlingar. 19 (1896). 8:o.
— *K. Karolinska institutet.*
Inbjudning till prof. J. H. ÅKERMANS installation. 1897. 4:o.
» » » E. WELANDERS installation. 1897. 4:o.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. 17 (1897): 3. 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1897: n:r 10. 8:o.
Upsala. *Universitet.*
Årsskrift. 1896. 8:o.
Afhandlingar och program. 1896/97. 14 st. 8:o & 4:o.
Berlin. *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 42 (1897): H. 1—2. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 16 (1897): N:r 9—10. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 32: N:o 16—17; 33: 1—4. 1897. 8:o.
Braunschweig. *Verein für Naturwissenschaft.*
Braunschweig im Jahre 1897. Festschrift . . . hrsg. von R. BLASIUS. 1897. 8:o.
Brisbane. *Queensland branch of the R. Geographical Society of Australasia.*
Proceedings and transactions. Session 12 (1896—97). 8:o.
Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtani közlöny. K. 27 (1897): F. 5—7. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 11: H. 4: Text & Atlas; 5. 8:o.
— *Archivum comitum Károlyi de Nagy-Károly.*
Codex diplomaticus comitum Károlyi de Nagy-Károly. 2. 1897. 8:o.
Budapest. *Musée National Hongrois.*
Természetrajzi füzetek. K. 20 (1897): P. 4. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 44 (1897): Entr. 4. 8:o.

Cambridge. *Philosophical society.*
Transactions. Vol. 16: P. 2. 1897. 4:o.
Proceedings. Vol. 9: P. 6. 1897. 8:o.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 31: N:o 2–4. 8:o.
Cape Town. *Royal observatory.*
Report. Year 1896. 4:o.
Independent day-numbers for the year 1897. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 5 (1897): N:o 11. 8:o.
Chicago. *Field Columbian museum.*
Publication 21. 1897. 8:o.
Durban. *Natal observatory.*
Report of the government astronomer. Year 1896. Fol.
Emden. *Naturforschende Gesellschaft.*
Jahresbericht. 81 (1895/96). 8:o.
Firenze. *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*
Pubblicazioni. Sez. di sc. fis. e nat. Fasc. 5—6. 1897. 8:o.
Genève. *Observatoire.*
Rapport sur le concours de réglage de chronomètres. Année 1896. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 1 (1897): Livr. 2–3. 8:o.
Innsbruck. *Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg.*
Zeitschrift. (3) H. 43. 1897. — Register 1—40. 1897. 8:o.
Irkutsk. *Sous-section Troitzkossawsk-Kiakhta de la Société Imp. Russe de géographie.*
Protokol. 1895: N:o 8; 1896: N:o 1, 4—5. 8:o.
Otchet. 1896. 8:o.
TALKO-HRYNCEWICZ, J. DE, Le climat de Troïtzkossavsk-Kiakhta en rapport à l'hygiene. 1897. 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. Année 1897: N:o 8. 8:o.
Lawrence. *Kansas university.*
Quarterly. Vol. 6: N:o 3: Ser. A, B. 1897. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 24: N:o 1. 1897. 8:o.
Lille. *Société géologique.*
Annales. T. 22: Livr. 3; 23: 3. 1897. 8:o.
London. *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): 11. 8:o.
Proceedings. Sess. 1896/97: N:o 183–184. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1897: App. 3; 1898: App. 1. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 29 (1897): N:o 11. 8:o.

(Forts. å sid. 653.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1897. N:o 10.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Öfver katodens sönderdelning i förtunnade gaser.

Af G. GRANQVIST.

(Meddeladt den 8 December 1897 genom K. ÅNGSTRÖM.)

1. När en elektrisk ström i en förtunnad gas öfvergår mellan tvänne elektroder, kommer den ena af dem, katoden, för så vidt den utgöres af metall, att sönderdelas.

Denna sönderdelning har först observerats af PLÜCKER,[1]) som fann, att i geisslerska rör, der elektroderna utgjordes af platinatrådar, ett tunnt speglande lager af metall afsatte sig på urladdningsrörets väggar närmast katoden.

Sedermera har GASSIOT[2]) visat, att skikt kunna erhållas på detta sätt af alla metaller fastän mer eller mindre lätt. Sålunda erhöll han, när katoden utgjordes af platina, silfver eller koppar, ett märkbart metallskikt å urladdningsrörets väggar efter en jämnförelsevis kort tid. Svårast att på detta sätt sönderdela voro metallerna jern och aluminium.

Enligt PULUJ[3]) skulle metallstoft afsätta sig å rörets väggar endast, då trycket i detsamma varierade mellan 1,46—0,005 mm. WÄCHTER[4]) har emellertid visat, att ju närmare katoden ligger intill urladdningsrörets väggar, vid desto högre tryck kan metallbeslag bildas å detsamma. Om sålunda afståndet mellan katoden och rörväggen utgör endast 0,9 mm., så erhålles metallbeslag redan vid 30 mm. tryck.

---

[1]) PLÜCKER, Pogg. Ann. 103, p. 88, 1858.
[2]) GASSIOT, Proc. of the Royal Soc., March 4, 1828.
[3]) PULUJ, Wien. Ber. 81, II. Abth., p. 864, 1880.
[4]) WÄCHTER, Wied. Ann. 17, p. 903, 1882.

För att undersöka de optiska egenskaperna hos möjligast fint sönderdelade metaller, har man sökt förskaffa sig dylika plana metallskikt genom katodens sönderdelning i förtunnade gaser. WRIGHT[1]) har nämligen visat, att föremål t. ex. plattor. som befinna sig inuti röret i närheten af katoden, likaledes öfverdragas af ett metall-lager. Försök i denna rigtning äfvensom öfver den inverkan, som olika gaser inuti röret hafva på det bildade skiktet, hafva gjorts af WÄCHTER,[2]) WRIGHT, KUNDT,[3]) DESSAU[4]) m. fl.

Af särskildt intresse äro KUNDTS och DESSAUS undersökningar, som visa, att de sålunda erhållna metallskikten under vissa förhållanden kunna blifva optiskt dubbelbrytande. KUNDT fann nämligen, att, om katoden utgjordes af en metalltråd, och om under densamma en glasplatta insattes i röret på så sätt, att dess plan var vinkelrätt mot katoden, på glasplattan bildades ett cirkelformigt metallskikt, hvars medelpunkt låg under katoden och i dess förlängning.

Undersöktes nu detta metallskikt i polariseradt parallelt ljus, så befans det vara dubbelbrytande. Vid korsade nicoler erhölls sålunda i synfältet ett mörkt kors, kvars skärningspunkt låg i metallskiktets medelpunkt, och hvars armar sammanfalla med nicolernas polarisationsplan. Från hvarje punkt å metallskiktet fortplantas alltså tvänne strålar, hvilkas polarisationsplan respektive sammanfalla med radiens och tangentens rigtning i ifrågavarande punkt.

2. För att förklara dubbelbrytningen hos dessa metallskikt antog KUNDT, att katodpartiklarne voro laddade med negativ elektricitet, och att de följaktligen repellerade hvarandra. Till följd häraf måste deras orientering på glasplattan utefter alla radierna blifva densamma.

Angående det sätt, på hvilket partiklarne frånskiljas från katoden, hafva för öfrigt flera olika åsigter uttalats.

---

[1]) WRIGHT, Sillim. I. (3), 13, p. 49; 14, p. 169, 1787.
[2]) WÄCHTER, Wied. Ann. 17, p. 903, 1882.
[3]) KUNDT, Wied. Ann. 27, p. 59, 1885.
[4]) DESSAU, Wied. Ann. 29, p. 353, 1886.

Enligt CROOKES[1]) skulle sålunda på katodens yta och i det katoden närmast omgifvande gasskiktet en molykulär störning ega rum, som hade till följd, att från katodens yta molekyler utslungades. Det framför katoden befintliga »dunkla rummet» skulle utgöras af dylika molekyler. Detta skikts uthredning från katodens yta borde då enligt CROOKES motsvara molekylernas medelväglängd i urladdningsröret.

Emellertid har PULUJ[2]) visat, att det dunkla katodrummets utbredning är betydligt större än molekylernas medelväglängd, samt att det vid växande förtunning ej ändrar sig i samma proportion som medelväglängden. I senaste tid har för öfrigt E. GOLDSTEIN[3]) visat, att det »dunkla katodrummet» utgöres af strålar, som fortgå normalt från katodens yta och genomtränga äfven det negativa glimmljuset.

Enligt PULUJS antagande skulle de s. k. katodstrålarne utgöras af negativt laddade från katoden mekaniskt lösryckta metallpartiklar.

Ett försök, som CROOKES gjort, synes emellertid visa, att katodstrålarne icke kunna bestå af metallpartiklar utslungade från katoden. CROOKES satte nämligen framför katoden en glimmerplatta med ett hål uti. De genom hålet gående katodstrålarne fingo falla på en glasskifva. På denna erhölls icke något metallbeslag, oaktadt rörets väggar närmast katoden beslogos med metallskikt. Slutligen har E. WIEDEMANN[4]) trott sig finna, att metallpartiklarne fortgå uti urladdningsröret oberoende af katodstrålarne.

I likhet med HITTORF[5]) och WÄCHTER[6]) anser E. WIEDEMANN, att metallskiktet å rörets väggar utgöres af kondenserad metall, som afdunstat från katoden. HITTORF framhåller, att vid så lågt

---

[1]) CROOKES, Phil. Trans. 1879 pt. 2, p. 135, 641.
[2]) PULUJ, Wien. Ber. 81 (2), p. 864, 1880.
[3]) E. GOLDSTEIN, Wied. Ann. 51, p. 622, 1894.
[4]) E. WIEDEMANN, Wied. Ann. 20, p. 795, 1883.
[5]) HITTORF, Wied. Ann. 21, p. 126, 1884.
[6]) WÄCHTER, Wied. Ann. 17, p. 903, 1882.

tryck som det, som vanligtvis förefinnes i geisslerska rör, metallerna afdunsta redan före glödningstemperaturen.

BERLINER [1]) har uttalat den förmodan, att de från katoden utslungade partiklarne hafva mekaniskt lösryckts till följd af den från katoden bortgående och i densamma occluderade gasen.

3. Hvad slutligen beträffar metallpartiklarnes utbredning och de banor, utefter hvilka de föras i urladdningsröret, hafva flera olika uppgifter derom lemnats.

Enligt WÄCHTER [2]) blifva urladdningsrörets väggar belagda med metallskikt endast på de ställen, hvarest fluorescens förekommer. MOOSER [3]) tror sig hafva funnit, att partiklarnes utbredning i urladdningsröret är beroende af det negativa glimmljuset och lagra sig endast på de ställen af rörets väggar, hvarest sådant finnes. Han antager, att de åtminstone från en klotformig katod utkastas normalt från katodens yta.

Emellertid har PLÜCKER [4]) redan förut påvisat, att i urladdningsrör, som befinna sig i yttre magnetiska fält, metallskikt ej alltid bildas å de ställen på väggarne, hvarest negativt glimmljus finnes.

I det följande skall jag redogöra för några försök, som jag företagit i afsigt att bestämma de banor, utefter hvilka partiklarne fortgå från katoden, och deras utbredning å urladdningsrörets väggar.

I.

4. De vid dessa försök använda urladdningsrören äro afbildade i fig. 1. Här betecknar *a* anoden, *k* katoden och *b* rörförbindningen med luftpumpen.

Då jag vid mina försök hade för afsigt att använda katoder af olika ämnen och olika form, fastsmältes katoden vid ett

[1]) BERLINER, Wied. Ann. 33, p. 289, 1888.
[2]) WÄCHTER, Wied. Ann. 17, p. 903, 1882.
[3]) MOOSER, Wied. Ann. 42, p. 639, 1891.
[4]) PLÜCKER, Pogg. Ann. 104, p. 113, 1858.

särskildt rör, hvilket, såsom synes af figuren, var inslipadt i urladdningsröret. Då till hvarje apparat hörde flera dylika katodrör, kunde utan svårighet en katod utbytas mot en annan.

För att i urladdningsrören äfven kunna införa plattor af glas, glimmer o. d. och på desamma erhålla metallskikt, bestodo urladdningsrören, såsom äfven synes af figuren, af tvänne delar inslipade i hvarandra.

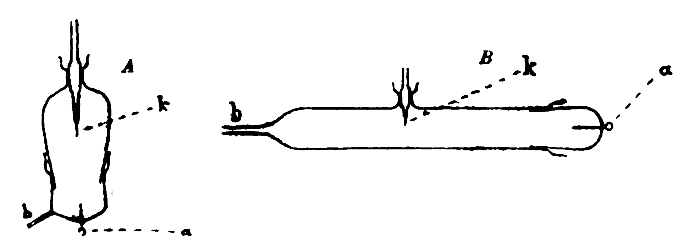


Fig. 1.

De plattor, som infördes i urladdningsröret *A* voro derstädes fästade vid ett litet stativ af koppartråd. I urladdningsröret *B* har i allmänhet icke något stativ för detta ändamål användts, utan hafva plattorna därstädes hvilat mot rörets väggar. Fig. 2 är en tvärsektion af urladdningsröret *B* och visar läget af en platta (*p*) i detsamma. I detta rör kunde flera plattor på samma

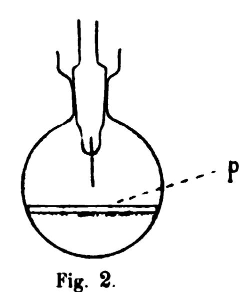


Fig. 2.

gång införas. Då urladdningsröret vidare genom »Kundtska fjädrar» var förenadt med luftpumpen, kunde plattorna genom lämplig lutning och skakning på röret efter hvarandra föras under katoden.

Vid alla förbindningar har qvicksilfver användts som tätningsmedel. För att kunna använda qvicksilfver för detta ändamål äfven vid röret *B*, inklämdes mellan dess båda delar en

tunn kautschukslang på så sätt, att den låg rundt omkring röret. Innanför densamma infördes qvicksilfver.

I ock för förtunningen af gasen i urladdningsrören har användts en qvicksilfverluftpump af PRYTZ medelst K. ÅNGSTRÖMS[1]) anordning förenad med en vattenpump.

Den elektriska induktionsströmmen har erhållits från ett större RUHMKORFFS induktorium. I den primära ledningen har användts en strömstyrka, som varierat mellan 4 och 6 ampère.

Vid mina försök har jag framstält metallskikt dels i förtunnad luft och dels i förtunnad vätgas. Denna senare gasen har vid mina första försök framstälts genom att upplösa zink i utspädd svafvelsyra men vid de senare försöken genom elektrolytisk sönderdelning af vatten.

Metallskikt, som erhållas i förtunnad luft, äro såsom framgår af DESSAUS undersökningar mer eller mindre uppblandade med metalloxid. För att framställa rena metallskikt, är det derför nödvändigt, att katoden sönderdelas i vätgas.

För att fylla urladdningsröret med vätgas, har jag derföre gått tillväga på följande sätt. Sedan den i röret befintliga luften utpumpats så mycket som möjligt, insläpptes vätgasen genom ett rör fyldt med forsforsyreanhydrid. Den nu insläppta vätgasen utpumpades och ny torkad infördes. Sedan jag på detta sätt infört och utpumpat vätgas trenne gånger, framstäldes metallskikten.

För att erhålla torr vätgas i urladdningsröret, visade det sig emellertid ej vara tillräckligt med att endast låta den införda gasen gå genom fosforsyreanhydridrör. Först sedan jag insatt i urladdningsröret ett litet kärl med fosforsyreanhydrid, kunde jag i vätgas vid högre tryck erhålla metallskikt, som, så vidt jag kunde se, ej innehöllo någon metalloxid.

Då, som bekant, det möter ytterst stora svårigheter att bortskaffa de sista resterna af luft och fuktighet ur urladdningsrören, så torde äfven vid dessa försök spår af dylikt hafva förefunnits.

[1]) K. ÅNGSTRÖM, Bolometrische Untersuchungen über die Stärke der Strahlung verdünnter Gase. Nova. Acta. Reg. Soc. Sc., Upsala, Ser. III, 1892.

Då emellertid min afsigt med dessa undersökningar har varit icke att framställa oxidfria metallskikt, utan att undersöka den rigtning, i hvilken de från katoden utslungade partiklarne röra sig inuti urladdningsröret och de punkter på detsammas väggar, hvarest metallbeslag uppkommer, så torde de ofvannämnda spåren af luft och fuktighet icke haft någon betydelse vid dessa försök.

5. Det visade sig nu framgå ur dessa försök, hvilket man redan på förhand kunde vänta, att det ämne, hvaraf katoden bestod, och det slags gas, som fanns i urladdningsröret, icke hade någon inverkan på de från katoden kommande partiklarnes rörelserigtning.

Katoder af olika ämnen (Pt, Cu, Fe) men af samma form företedde endast olikhet deruti, att de med mer eller mindre svårighet sönderdelades. Lättast att på detta sätt sönderdela voro af de af mig använda katoderna de af platina, svårast de af jern. För att t. ex. med samma strömintensitet erhålla två ungefär lika tjocka metallskikt det ena af jern och det andra af platina, måste vid framställandet af jernskiktet strömmen genomgå urladdningsröret 10 à 15 gånger längre tid än vid framställandet af platinaskiktet. Deremot erhölls i båda fallen metallbeslag på samma punkter på urladdningsrörets väggar eller på de plattor, som voro införda i detsamma.

Olika gaser (luft, vätgas) verkade olika endast deruti, att det erhållna metallskiktet var mer eller mindre fritt från inblandad metalloxid. I vätgas har jag erhållit metallskikt, som alla visat samma färg i genomgående ljus, och som antagligen voro fria från oxid. I torr luft har jag erhållit vid tryck från 10 till 2 mm. så godt som uteslutande metalloxid; vid mindre tryck hafva skikten varit en blandning af metall och oxid, och vid tryck under 0,3 mm. syntes skikten äfven i torr luft utgöras af endast metall.

Ju intensivare strömstyrkan är och ju hastigare afbrotten försiggå i den primära strömbanan, desto lättare erhållas metallskikten. Vid tillräckligt stark strömstyrka kommer katoden i glödning. Den temperatur, som katoden erhåller, kan derför

möjligtvis vara af inflytande på den lätthet, hvarmed metallskikten bildas. Emellertid är den lätthet, hvarmed katoden sönderdelas, icke ensamt beroende af dess temperatur utan äfven af det för handen varande trycket i urladdningsröret. Lättast synes man erhålla metallskikt vid omkring 1 mm. tryck.

I alla ofvan beskrifna fall erhålles emellertid under för öfrigt lika förhållanden metallskikt på samma punkter på urladdningsrörets väggar och på plattor, som befinna sig inuti detsamma.

Deremot inverkar katodens form och trycket inuti urladdningsröret i högsta grad på partiklarnes rörelserigtning. Framför allt synes vid hög förtunning katodstrålarne primärt eller sekundärt vara de afgörande för partiklarnes rörelserigtning.

Då, såsom bekant, katodstrålarne lida inverkan af yttre magnetiska fält, komma äfven partiklarne att lagra sig på olika punkter å rörets väggar, om detta befinner sig i ett magnetiskt fält eller ej.

I det följande skall derför först redogöras för partiklarnes rörelse i urladdningsrör, som icke befinna sig i magnetiska fält, och derefter den inverkan ett yttre magnetiskt fält har på deras rörelserigtning.

II.

6. Om i urladdningsröret *A* en metalltråd användes som katod, så erhålles, om trycket i urladdningsröret är mindre än 3 à 2 mm., å rörets väggar ett ofta skarpt begränsadt metallskikt i form af ett band rundt omkring röret. Bandets bredd är lika stor som katodens längd och ligger i samma plan som katoden. Metallskiktet synes härvid uppkomma alldeles, som om partiklarne utslungades vinkelrätt från katodens yta och sedermera fortginge rätlinigt till urladdningsrörets väggar. Vid längre fortsatt inledning af den elektriska strömmen genom röret tilltager emellertid skiktets bredd något.

Förutom detta band erhålles äfven å katodröret strax ofvan katoden ett metallbeslag.

Införes i urladdningsröret framför katoden något föremål t. ex. en glimmerskifva, en metalltråd o. d., så erhålles icke några partiklar på de delar af rörets väggar, som beskuggas af föremålen för strålar, som utgå från katoden.

Vid detta försök synes alltså, om vi undantaga de partiklar, som fastna på katodröret, de öfriga utslungas normalt från katodens yta.

Införes nu emellertid i urladdningsröret en platta t. ex. af glas, så blir för en del af partiklarne rörelserigtningen förändrad. Vi vilja till en början antaga, att plattans plan är vinkelrätt mot katodens längdaxel och befinner sig nära anoden. Om afståndet mellan katoden och plattan är stort i förhållande till afståndet mellan katoden och rörets väggar, inverkar glasplattan icke på partiklarnes rörelserigtning. Man erhåller nämligen samma metallbeslag som förut.

Föres nu åter plattan mot katoden, så falla partiklar på densamma, äfven om plattan befinner sig under det förut omnämnda metallbandets plan.

Den i urladdningsröret införda glasplattan har således förmågan att attrahera en del af de från katoden utslungade partiklarne.

Ju högre förtunningen i urladdningsröret är, vid desto längre afstånd från katoden bildas metallbeslag å glasplattan.

7. Det metallbeslag, som erhålles å plattan är vid olika förtunning mycket olika. Är trycket t. ex. 10 mm., så erhålles å plattan, som i detta fall måste ligga mycket nära katoden (omkr. 1 mm.) ett skikt i form af en flat kon, hvars topp ligger i katodens förlängning. Ju längre tid strömmen genomgår urladdningsröret, och ju större strömintensiteten är, desto större utbredning får metallskiktet. Framställes skiktet i förtunnad luft, så består det af metalloxid och visar särdeles praktfullt de Nobiliska ringarne.

Vid lägre tryck (5—2 mm.) försiggår katodens sönderdelning betydligt lättare. Det erhållna skiktet är nu mera flackt och,

om det framstälts i luft, ligga de NOBILISKA ringarne på större afstånd från hvarandra. Skiktet består nu för öfrigt af en blandning af metall och oxid.

Vid tryck under 1 mm. erhålles vanligtvis å metallskiktet en bar fläck omedelbart under katoden. Uppträdandet af denna fläck är icke enbart beroende af trycket utan äfven af fuktigheten i röret. Den uppträder alltid, när katodstrålar åstadkomma fluorescens å rörets väggar och, om plattan ligger nära intill katoden, äfven vid tryck, som äro något högre än det, vid hvilket grön fluorescens börjar att synas å glasväggarne.

Vid dessa senare undersökningar har röret *B* användts. Inuti röret lades då en glasskifva ungefär 10 cm. lång och 3 cm. bred. På denna glasskifva framkallades sedan en serie metallskikt vid olika förtunning. För att erhålla metallskikt på olika ställen på glasskifvan, behöfde man endast luta på urladdningsröret, som medelst Kundtska fjädrar, såsom ofvan är nämndt, var förbundet med luftpumpen, och skaka på detsamma. På en dylik glasplatta kunde sålunda ända till 4 à 6 särskilda metallskikt erhållas.

Dessa försöksserier gåfvo vidare vid handen, att den bara fläcken under katoden blef större, ju intensivare väggarne i urladdningsröret fluorescerade. I torr gas uppträdde den bara fläcken i likhet med fluorescensen vid högre tryck än i fuktig gas.

Vid högre tryck syntes det, som om nästan alla partiklarne föllo ned på glasplattan. Det erhållna skiktet är då mycket koniskt. Vid lägre tryck kommer endast en del af partiklarne på plattan. De öfriga falla på rörets väggar och bilda derstädes det ofvan omtalade bandet. Vid tryck under 0,2 mm. kommer endast en ringa bråkdel af de utslungade partiklarne på glasplattan, hvarest erhålles ett mycket flackt koniskt metallskikt.

Vid flera tillfällen observerade jag, att under katoden å det ställe på glasplattan, hvarest den bara fläcken uppkom, stark grön fluorescens förefans. Äfven vid andra tillfällen hade jag observerat, att der, hvarest glaset fluorescerade intensivt grönt, metallskikt med en viss svårighet bildades. Det synes sålunda,

som om katodljuset på de ställen, hvarest det är mera koncentreradt, inverkade på metallpartiklarnes rörelse.

Följande försök, som anställdes med konkava platinaelektroder, visa att så verkligen är förhållandet.

8. Som bekant består katodljuset af trenne olika delar. Närmast katoden hafva vi sålunda ett rödaktigt ljust skikt, hvars tjocklek i allmänhet endast är några få mm., derpå ett ljussvagt skikt, det s. k. dunkla katodrummet, och utanför detta ett starkt lysande skikt af stor utbredning, det s. k. negativa glimmljuset.

Nu har GOLDSTEIN [1]) påvisat, att de båda närmast katoden liggande skikten bestå af strålar, som utgå i det närmaste normalt från katodens yta, och som kunna hafva ganska stor utbredning i urladdningsröret. Bäst iakttages det ljus, hvaraf det dunkla katodrummet till största delen utgöres, vid användandet af konkava katoder.

Dessa katoder lämna nämligen det negativa glimmljusets form oförändrad, men hafva deremot förmågan att koncentrera det andra skiktets strålar till ett ljust strålknippe. Dessa strålar utbreda sig rätlinigt såväl inom som utom det negativa glimmljuset och sluta först, då de träffa urladdningsrörets väggar.

Vid användandet af konkava elektroder konvergera dessa strålar vid icke allt för höga förtunningar mot katodens krökningscentrum och utgå derifrån divergerande. Ökas förtunningen, blir strålarnes konvergens svagare. Der, hvarest detta strålknippe träffar urladdningsrörets väggar, kommer glaset att fluorescera och uppvärmas.

I urladdningsröret *A* insattes nu en platinakatod i form af en konkavspegel, hvars optiska axel stod vinkelrätt mot rörets axelrigtning. Jag erhöll nu beslag å rörets väggar både framför katodens konkava och konvexa yta, samt dessutom på katodröret strax ofvan om katodspegeln.

Metallskiktet på väggen framför den konvexa katodytan var mycket tunnt och hade stor utbredning; det var i det närmaste

[1]) GOLDSTEIN, Wied. Ann. 51, p. 622, 1894.

cirkelformigt och syntes uppkommet, derigenom att partiklar utslungats normalt från spegelns yta.

Framför katodens konkava yta erhölls deremot ett betydligt tjockare metallskikt och af mindre utsträckning. Äfven detta var cirkelformigt, och dess diameter ungefär lika stor, som diametern i det från katodens krökningscentrum mot glasväggen divergerande ljusknippet. Skiktet började att bildas i ljusknippets midt och utbredde sig derifrån likformigt i alla rigtningar. Att döma af det sätt, hvarpå det bildades, torde väl äfven detta skikt vara tjockast i dess medelpunkt. Vid längre fortsatt strömgenomgång syntes emellertid, som om skiktets diameter skulle kunna blifva något större än ljusknippets.

Vid ett par andra försök hade jag infört i röret strax framför katodens konkava yta en glimmerplatta, hvars plan var vertikalt. Närstående figur visar glimmerplattans (*g*) och katodens (*k*) läge. När trycket uppgick till omkring 1 mm., erhölls på glimmerplattan ett metallskikt, hvars utseende synes af figuren. På det ställe, hvarest strålarne från katoden sammanträffat finnes icke några metallpartiklar. För öfrigt synes det, som om partiklarne i det närmaste utgått normalt från katodens yta.

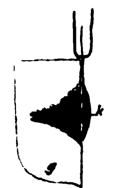


Fig. 3.

Ökades förtunningen i urladdningsröret, så aflägsnades strålarnes konvergeringspunkt från katoden, och vid omkring 0,2 mm. tryck låg konvergeringspunkten på urladdningsrörets vägg. Här fluorescerade glaset intensivt.

Det visade sig nu, att, när strömmen genomgick urladdningsröret, metallpartiklar först lagrade sig rundt omkring fluorescensfläcken, och att den sålunda erhållna ringen så småningom blef allt bredare och tätare. Inuti fluorescensfläcken kom deremot icke några partiklar. Jag har flera gånger upprepat samma försök med urladdningsröret *B*. Vid dessa försök har platinaspegelns axel varit dels parallel, dels vinkelrät mot rörets axel. Metallpartiklarne hafva uppfångats på glasplattor, som på olika afstånd placerats framför katoden.

Vid alla dessa försök blef emellertid resultatet detsamma. I strålarnes konvergeringspunkt fanns icke några metallpartiklar, men deremot erhölls alltid först metallskikt rundt omkring fluorescensfläcken. På samma sätt som dessa strålar inverka äfven, såsom nedan skall visas, de s. k. katodstrålarne.

Vid ett par andra försök, som gjorts med röret *A* och konkav platinakatod, var trycket ungefär 1 mm. och strålarnes konvergeringspunkt sammanföll ungefär med spegelns krökningscentrum. Ställdes nu framför katoden mellan urladdningsrörets vägg och katodens krökningscentrum en koppartråd, en liten glasplatta eller dylikt, så erhölls på det uppkomna metallskiktet en tydlig bild af föremålen. Der, hvarest dessa föremål beskuggade rörväggen, erhölls icke något metallskikt. Det var för öfrigt ganska lätt att se, att dessa bilder utgjorde skuggan af föremålen för strålar, som kommo från spegelns krökningscentrum. De från katoden kommande partiklarne synas alltså äfven i detta fall utslungas normalt från katodens yta.

Såsom ofvan nämnts bildas icke något metallbeslag å de ställen, hvarest koncentreradt katodljus finnes. För att undersöka katodljusets inverkan på redan befintligt metallskikt, ställdes under en trådformig katod en glasplatta belagd med ett tunnt lager af silfver. Det visade sig nu, att under katoden ett hål uppkom i silfverskiktet. För att emellertid detta försök skall lyckas, var det nödvändigt, att vid den strömintensitet, som jag använde, silfverskiktet låg ganska nära (1 à 2 mm.) intill katoden, och att förtunningen var ganska stor.

Samma försök har upprepats med konkav elektrod, och äfven då har erhållits ett hål i silfverskiktet, om detsamma befunnit sig i grannskapet af katodljusets focus.

III.

9. För undersökningen af partiklarnes rörelse i ett magnetiskt fält har användts en större elektromagnet mellan hvilkens poler urladdningsrören hafva införts.

Elektromagnetens axelrigtning har varit horisontel. Båda urladdningsrören hafva införts mellan polerna på så sätt, att deras axel stått normalt mot de magnetiska kraftlinierna. Rörets *A* axel har sålunda varit vertikal och rörets *B* axel horisontel.

Det magnetiska fältets intensitet på det ställe, hvarest katoden befunnit sig, har vid nedanstående försök varit 730 C.G.S. enheter.

Befinner sig t. ex. röret *A* mellan elektromagnetens poler, så erhålles vid höga tryck (10 à 5 mm.) metallskikt på urladdningsrörets väggar och på plattor, som befinna sig i detsamma, på samma ställen, som när detsamma icke befinner sig i ett magnetiskt fält. Först när trycket nedgått till omkring 1 mm., kan man upptäcka, att på urladdningsrörets väggar närmast elektromagnetens poler metallskiktet är något tätare. På en under en trådformig katod befintlig glas- eller glimmerplatta blir deremot metallskiktet under för öfrigt lika omständigheter detsamma.

Förtunnas nu emellertid gasen i urladdningsröret så mycket, att fluorescens börjar att uppträda å rörets väggar, blir partiklarnes rörelserigtning en annan.

De från katoden utgående katodstrålarne komma att i detta fall devieras af det magnetiska fältet på så sätt, att de alla ligga i ett plan i det närmaste vertikalt och parallelt med elektromagnetens axelrigtning. Användes nu t. ex. röret *B*, så ligger detta plan normalt mot rörets axelrigtning. Man erhåller derför rundt omkring röret ett fluorescerande smalt band. På båda sidor om detta band lagra sig metallpartiklar. Inuti det fluorescerande bandet komma deremot inga.

Införes i röret en glasplatta under en trådformig katod, så skär plattan i det närmaste vinkelrätt det plan, i hvilket katodstrålarne ligga. På glasplattan erhålles en fluorescensfigur, hvars utseende synes af vidstående figur. Det erhållna metallskiktet är, som man kunde vänta, bart på de ställen, hvarest fluorescens förefinnes. Vidstående figur visar en bild af det erhallna metallskiktet.



Fig. 4.

Användes katod af annan form än den ofvanbeskrifna, så erhållas i hufvudsak samma figurer men med mer eller mindre oregelbundenheter betingade af katodens form.

Det bör kanske här påpekas, att utseendet är detsamma på metallskikt, som bildas af katoder af jern i förtunnad vätgas, hvarest de utslungade partiklarne utgöras af metalliskt jern.

10. Af dessa försök framgick vidare, att det negativa glimmljuset icke har något inflytande på partiklarnes rörelserigtning. Enligt MOOSER skulle metallbeslag endast uppkomma på urladdningsrörets väggar och på föremål, som befinna sig i detsamma, i de punkter, hvarest negativt glimmljus finnes.

Det är lätt att visa, att så ej är förhållandet. Om man t. ex. höjer eller sänker urladdningsröret i förhållande till elektromagnetens poler, kan man ändra glimmljusets utbredning i röret. Det negativa glimmljuset inställer sig nämligen, som bekant, i de magnetiska kraftliniernas rigtning. Vare sig man nu låter urladdningsröret intaga ett sådant läge, att det negativa glimmljuset berör en under katoden befintlig platta eller ej, så erhålles fullkomligt lika metallskikt på densamma.

IV.

11. Det synes mig, som om partiklarnes rörelse och de banor, utefter hvilka de föras, lättast kunna förklaras genom antagandet, att de följa de elektrostatiska kraftlinierna från katoden till rörets väggar.

Som bekant blifva nämligen urladdningsrörets väggar laddade med statisk elektricitet. G. WIEDEMANN [1]) har visat, att denna elektrostatiska laddning ingalunda fördelar sig godtyckligt på väggarne. Vid tillräcklig förtunning blifva dessa sålunda äfven närmast katoden laddade med positiv elektricitet. Är förtunningen så långt drifven, att katodstrålar uppträda, så erhålla glasväggarne en mycket stark laddning af pos. elektricitet.

---

[1]) G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. 158, p. 69, 1876.

Det måste sålunda finnas i urladdningsröret ett kraftigt elektrostatiskt fält, hvars kraftlinier gå från väggarne till katoden, till största delen oberoende af det ställe, hvarest anoden finnes. Kraftliniernas rigtning blir naturligtvis beroende af urladdningsrörets form, och det elektrostatiska fältets styrka på förtunningen.

Om man antager, att de från katoden lösryckta partiklarne hafva samma potential som katoden sjelf, så måste de följa de elektrostatiska kraftlinierna till de positivt laddade rörväggarne. Häraf följer vidare, att de flesta partiklarne lagra sig på de delar af urladdningsrörets väggar, hvilka hafva den största elektrostatiska laddningen och som ligga närmast katoden.

Användes t. ex. i urladdningsröret *A* en trådformig katod. hvars axel sammanfaller med rörets, så böra metallpartiklarne här utgå rätlinigt från katoden till de närmast belägna delarne af rörväggarne. Man bör sålunda erhålla ett metallskikt i form af ett band rundt rörets väggar, hvilket ju äfven öfverensstämmer med verkliga förhållandet.

Införes i urladdningsröret en glasplatta, så bör äfven den laddas med pos. elektricitet, då den ju alltid kan betraktas som en del af rörets väggar. För så vidt den befinner sig på ett icke allt för stort afstånd från katoden, böra tydligen äfven partiklar föras mot densamma.

Om plattan är belägen under en trådformig katod och dess plan är vinkelrätt mot densammas axel, bör tydligen äfven det uppkomna metallskiktet till följd af symetrien blifva cirkelformigt och dess medelpunkt ligga i katodens fotpunkt; allt naturligtvis under den förutsättning, att urladdningsrörets väggar ligga på så stort afstånd från katoden, att de elektrostatiska laddningarne derstädes icke inverka på det elektrostatiska fältet mellan katoden och plattan.

Finnes vidare äfven å katodröret elektrostatisk laddning, såsom väl antagligt är, bör ju äfven derstädes metallskikt uppkomma.

Enligt JAUMAN [1]) följa katodstrålarne de elektrostatiska kraftlinierna i urladdningsröret. Dessa gå således från den fluorescerande delen af glaset till katoden. Metallpartiklarne böra alltså följa katodstrålarne till glasväggarne. Detta öfverensstämmer med det förhållandet, att metallskikt alltid först bildas rundt omkring de ställen, hvarest stark fluorescens förekommer.

Man kan nu fråga, hvarför icke äfven de ställen å glasväggarne blifva belagda med skikt, hvarest intensivare fluorescens förekommer. Detta kan icke bero derpå, att glasytan fluorescerar, ty förhållandet är detsamma på en icke fluorescerande yta t. ex. en glimmerplatta. Deremot visa de försök, som jag anstält med glasplattor öfverdragna med silfverskikt, att i de punkter, hvarest katodstrålarne äro mera koncentrerade, icke några tunna metallskikt kunna existera. Huruvida detta beror derpå, att partiklarne förgasas till följd af den stora värmeutveckling, som åstadkommes af katodstrålarne, eller möjligen derpå att de blifva laddade med pos. elektricitet och repelleras från glasytan, kan emellertid icke utan nya försök afgöras.

12. Äfven ett annat stöd för den åsigten, att partiklarne följa de elektrostatiska kraftlinierna, synes mig ligga uti den förut omnämnda upptäckten af KUNDT, att metallskikten under vissa omständigheter kunna blifva dubbelbrytande.

De metallskikt, som jag erhållit på plattor under katoden, har jag undersökt i polariseradt parallelt ljus. Det visade sig nu emellertid vid dessa undersökningar, att skikten ej alltid blefvo dubbelbrytande. För att erhålla dubbelbrytande skikt var det nödvändigt, att förtunningen af gasen i urladdningsröret var ganska långt drifven (omkr. 1 mm.), samt att glasplattan befann sig ganska nära elektroden i förhållande till rörväggarne. Det elektrostatiska fältet måste alltså hafva en ansenlig styrka, för att dubbelbrytning skall inträffa. Om urladdningsrörets väggar äro öfverdragna af metallskikt och förtunningen drifven

---

[1]) JAUMAN, Wied. Ann. 59, p. 252, 1896.

så långt, att fluorescens finnes å desamma, uteblifver ofta den kristalliniska egenskapen hos skikt, som bildas på en under katoden befintlig platta. Antagligen förorsakade dylika metallskikt å rörväggarne en störning i det elektrostatiska fältet, ty, sedan röret rengjorts, erhölls alltid dubbelbrytande skikt.

Af synnerligen stort intresse äro de metallskikt, som erhållits på plattor, när röret befunnit sig i ett magnetiskt fält. Vid tryck öfver 1 mm. voro dessa skikt, såsom ofvan nämnts, lika med dem, som framstälts i icke magnetiska fält. I detta fall ändrade icke det magnetiska fältet den elektrostatiska laddningen på plattan. De erhållna skikten voro derför dubbelbrytande och fullkomligt symetriska omkring skiktets medelpunkt. Detta inträffade, till och med om skiktet utgjordes af metalliskt jern. Den kraft, hvarmed partiklarne föras och inrigtas i det elektrostatiska fältet, är sålunda betydligt större än den kraft, hvarmed jernpartiklar påverkas i ett magnetiskt fält af 730 C.G.S.-enheter.

Är deremot förtunningen drifven så långt, att glaset fluorescerar, blir det elektrostatiska fältet i urladdningsröret ändradt af det magnetiska fältet. Detta antagligen beroende derpå att de elektriska urladdningarne genom röret taga andra vägar. Metallskikten blefvo nu icke längre symetriska i optiskt hänseende i förhållande till katoden. De plattor, som hafva det utseende, som fig. 4 visar, äro dubbelbrytande i inre kanten utefter de bara partierna. Denna kristalliniska egenskap erhålla metallskikten med all sannolikhet till följd af det elektrostatiska fältet på den fluorescerande ytan.

V.

13. Metaller, som äro glödande, utsända, som bekant, metallpartiklar. Man kan sålunda äfven på detta sätt erhålla tunna metallskikt. BERLINER har visat, att dessa metallpartiklar lös-

ryckas från den glödande metallen till följd af den från densamma bortgående occluderade gasen. Han uttalar såsom sin åsigt, att de metallpartiklar, som bortgå från katoden, lösryckas af samma orsak. HITTORF, WÄCHTER och E. WIEDEMANN hålla deremot före, att katoden till följd af dess höga temperatur och det låga trycket omkring densamma afdunstar. I afsigt att undersöka dessa förhållanden gjordes följande försök.

Vid katodröret i urladdningsapparaten *A* insmältes de båda ändarne af en 2 cm. lång och 0,3 mm. tjock platinatråd. Platinatrådens ändar voro förbundna med ledningstrådarne från ett galvaniskt batteri på så sätt, att platinatråden medelst den elektriska strömmen kunde bringas i glödande tillstånd.

Katodröret med platinaöglan infördes nu i urladdningsapparaten och under tråden placerades en glasplatta. Sedan luften i apparaten utpumpats, så att trycket derstädes var omkring 1 mm., bringades platinatråden i glödningstillstånd.

Om HITTORFS, WÄCHTERS och E. WIEDEMANNS åsigt är rigtig, så borde tydligtvis äfven i detta fall platinatråden afdunsta och man bör erhålla metallskikt, som i qvantitativt hänseende böra öfverensstämma med de ofvan erhållna. Så blef emellertid icke förhållandet. Då det sålunda behöfdes endast några få minuter för att erhålla ett ganska tjockt metallskikt, då katoden genom urladdning sönderdelades vid ofvannämnda tryck och vid glödningshetta, så erhölls deremot här efter 12 timmars glödning endast ett tunnt och obetydligt metallskikt. Samma försök har upprepats med jerntråd och resultatet har blifvit detsamma.

BERLINER har uttalat den förmodan, att den kraftiga elektriska laddning, som katoden erhåller vid urladdningarne, möjligtvis skulle kunna bidraga till partiklarnes lösryckande. Jag har derför förbundit den glödande platina- och jernöglan med induktoriets positiva pol och den förra anoden med den negativa polen. Urladdningarne hafva nu alltså genomgått röret i motsatt rigtning mot hvad förut egt rum. Någon ändring i det bildade metallskiktets tjocklek eller utbredning kunde icke konstateras.

Det sätt, på hvilket katoden sönderdelas, synes mig derför icke kunna förklaras hvarken genom det antagandet, att katoden afdunstar eller derigenom, att partiklar lösryckas af den från katoden bortgående occluderade gasen.

———

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 10.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Inst.

Öfver en metod att bestämma fasskillnaden vid ljusets gång genom dubbelbrytande metallskikt.

Af G. GRANQVIST.

[Meddeladt den 8 December 1897 genom K. ÅNGSTRÖM.]

1. Om en glasplatta införes i ett urladdningsrör på så sätt, att dess plan är vinkelrätt mot en i detsamma befintlig trådformig katod, så erhålles på glasplattan, när en elektrisk ström genomgår röret, ett cirkelformigt metallskikt, som är symmetriskt i afseende på katoden. KUNDT,[1]) som framstälde dylika skikt i i afsigt att undersöka deras optiska egenskaper, fann, att de voro optiskt dubbelbrytande.

Undersökes ett dylikt skikt i polariseradt parallelt ljus, så erhålles vid korsade nicoler i analysatorns synfält ett mörkt kors. Dess armar äro parallela med nicolens polarisationsplan. Armarnas skärningspunkt ligger alltid i metallskiktets medelpunkt. Från hvarje punkt i metallskiktet fortplantas alltså till analysatorn tvänne strålar. Den ena af dessa är polariserad utefter radiens rigtning i ifrågavarande punkt, den andra utefter tangentens rigtning,

DESSAU,[2]) som fann att äfven oxidskikt, som framställas genom katodens sönderdelning i förtunnad luft, är dubbelbrytande, har sökt bestämma den af dessa strålar, som fortplantar sig genom skiktet med den största hastigheten.

---

[1]) KUNDT, Wied Ann. 29, p. 50. 1885.
[2]) DESSAU, Wied. Ann. 29, p. 353. 1886.

För detta ändamål infördes emellan skiktet och analysatorn en rektangulär glasskifva. Denna skifva böjdes på så sätt, att dess ena långsida dilaterades, under det den andra komprimerades. Dess kristalliniska egenskaper äro för detta fall bestämda af WERTHEIM[1]) och MACH.[2]) DESSAU undersökte nu den förändring, som det ofvannämnda korset undergick vid införandet af den deformerade glasplattan, och kunde på så sätt bestämma hvilken af strålarne, som hade den största hastigheten. Han fann sålunda, att i alla metallskikt och i de flesta oxidskikt den tangentielt svängande strålen hade den största hastigheten. Undantag härutinnan gjorde emellertid skikt af jernoxid, i hvilka den tangentielt svängande strålen har den minsta hastigheten.

Fasskillnaden mellan de båda strålarne i olika punkter af skiktet kunde naturligtvis ej på detta sätt mätas. DESSAU försökte derför att bestämma den medelst en BABINETS kompensator, men äfven detta visade sig omöjligt.

I det följande skall derför en ganska enkel anordning beskrifvas, med hvilken jag uppmätt fasskillnaden mellan strålarne i dylika metallskikt. Innan jag beskrifver ofvannämnda anordning, vill jag likväl först nämna något om de båda strålarnes absorption i metallskiktet.

2. Införes ett metallskikt mellan korsade nicoler och utsättes för parallelt ljus, så erhålles, som ofvan är nämndt, ett mörkt kors i analysatorns synfält. DESSAU har nu observerat, att, om analysatorn något litet vrides, korset öfvergår till ett hyperbelpar eller rättare till en lemniscata. DESSAU påpekar detta såsom en märkvärdig egenskap hos metallskikten. Som bekant erhålles icke någon dylik figur vid analysatorns vridning, om emellan nicolen införes en enaxig dubbelbrytande kristall slipad vinkelrätt mot den optiska axeln.

Den ofvannämnda förändringen i korsets utseende vid analysatorns vridning synes mig kunna ganska enkelt förklaras, om de båda strålarne absorberas olika af metallskiktet.

[1]) WERTHEIM, Ann. d. Chim. et d. Phys. (3) 40 p. 156. 1854.
[2]) MACH, Optisch-Akustische Versuche, Prag, 1873.

Det ljus, som genomgått en punkt på metallskiktet, är nämligen uppdeladt i tvänne strålar, hvilkas svängningsplan äro respektive parallela och vinkelräta mot radien i ifrågavarande punkt. Om vinkeln mellan denna radie och polarisatorns svängningsplan är ϑ, så är det ljus, som genomgått skiktet och svänger radielt

$$i_r \cos\vartheta \sin(nt + \delta_r).$$

Det ljus, som svänger tangentielt, är af formen

$$i_t \sin\vartheta \sin(nt + \delta_t).$$

Här beteckna i_r och i_t de två strålarnes svängningsamplituder samt δ_r och δ_t deras fasförskjutning i mellanskiktet.

Låt nu vidare analysatorns svängningsplan bilda vinkeln $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ mot polarisatorns. Det genom analysatorn gångna ljuset är då

$$i_r \cos\vartheta \sin(\vartheta - \varepsilon) \sin(nt + \delta_r) - i_t \sin\vartheta \cos(\vartheta - \varepsilon) \sin(nt + \delta_t).$$

Om vi vidare antaga ε liten samt sätta

$$nt + \delta_r = N \text{ och } \delta_r - \delta_t = \varDelta,$$

så öfvergår ofvanstående uttryck till

$$i_r \cos\vartheta(\sin\vartheta - \varepsilon\cos\vartheta)\sin N - i_t \sin\vartheta(\cos\vartheta + \varepsilon\sin\vartheta)\sin(N - \varDelta),$$

som lätt kan bringas under formen

$$H \sin(N + \alpha).$$

De metallskikt, som erhållas genom en trådformig katods sönderdelning på en under densamma befintlig platta, hafva formen af en flack kon. Dessa skikt äro alltså tjockast på midten och aftaga sedan i tjocklek, ju längre bort man kommer från deras medelpunkt. Den ofvan omtalade interferensfiguren, som erhålles, när analysatorn något litet vrides, uppkommer derigenom, att de yttersta delarne af metallskiktet inom två motstående qvadranter blifva mörka. Vrides analysatorn i motsatt rigtning, blifva deremot de yttersta delarne af skiktet inom de båda andra qvadranterna mörka. Det ofvan nämnda fenomenet

uppträder alltså endast på de punkter, hvarest metallskiktet är mycket tunnt. Då fasskillnaden mellan strålarne i allmänhet är ganska liten i dessa skikt, så kunna vi utan nämnvärdt fel för de yttersta punkterna sätta $\Delta = 0$. Vi erhålla då

$$H = \frac{i_r - i_t}{2} \sin 2\vartheta - \varepsilon (i_r \cos^2\vartheta + i_t \sin^2\vartheta).$$

När $\varepsilon = 0$, så är $H = 0$ för $\vartheta = 0$ och $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Dessa linier äro det mörka korsets armar. Amplituderna i_r och i_t äro icke mycket olika. Vi kunna derför utan större fel sätta

$$i_r \cos^2\vartheta + i_t \sin^2\vartheta = \frac{i_r + i_t}{2}$$

och erhålla då

$$2H = (i_r - i_t) \sin 2\vartheta - \varepsilon (i_r + i_t).$$

De punkter å metallskiktet, som synas mörka i analysatorns synfält, äro alltså bestämda genom eqvationerna

$$\Delta = 0; \ (i_r - i_t) \sin 2\vartheta - \varepsilon (i_r + i_t) = 0.$$

Om $i_r > i_t$, så blir alltså vid en positiv vridning af analysatorn de yttersta delarne af metallskiktet, hvilka ligga inom 1:sta och 3:dje qvadranten, mörka. För öfrigt är det lätt att se, att i de punkter, som ligga nära intill det mörka korsets armar, och för hvilka alltså $\sin 2\vartheta$ är litet, skillnaden mellan de båda strålarnes amplituder måste vara större än i de punkter, som ligga midt emellan korsets armar, för att mörker derstädes skall kunna uppkomma. Dessa punkter måste alltså ligga närmare skiktets medelpunkt. Interferensfiguren får sålunda utseendet af lemniscata.

Om $i_r > i_t$, så erhålles vid en negativ vridning af analysatorn en lemniscata inom 2:dra och 4:de qvadranten. Är deremot $i_r < i_t$, så erhålles vid positiv vridning en lemniscata inom 2:dra och 4:de qvadranterna samt vid en negativ vridning inom 1:sta och 3:dje qvadranterna.

Man kan tydligtvis på detta sätt bestämma hvilken af strålarne, som absorberas mest. Jag har sålunda funnit att i skikt af platina, jern och koppar samt i skikt af deras oxider det ljus, som svänger i radiens rigtning, har större amplitud än det, som svänger i tangentens.

För att äfven experimentelt öfvertyga mig om, att de båda strålarne absorberas olika, har jag på professor K. ÅNGSTRÖM's förslag, undersökt några metallskikt med ett SAVART's polariskop Härvid gick jag tillväga på följande sätt.

På metallskiktet lades en bit svart papper, på hvilket en smal spalt var utskuren. Papperet lades nu på metallskiktet, så att spalten sammanföll med en radie. Om nu naturligt ljus får infalla mot skiktet, så skall tydligen, om absorptionen är olika för de båda strålarne, det genomgångna ljuset förhålla sig såsom delvis polariseradt ljus. Betraktas nu spalten genom polariskopet, när skiktet hölls framför en Auerlampa, så syntes i synfältet interferenslinier. Det visade sig nu, att det genom plattan gångna ljuset var polariseradt symetriskt i förhållande till skiktets medelpunkt. Interferenslinierna försvunno nämligen alltid, när polariskopets svängningsplan bildade samma vinkel med spalten oberoende af utefter hvilken radie densamma låg.

3. För bestämmandet af fasskillnaden har jag låtit polariseradt ljus falla mot en silfverspegel och med ett NICOL's prisma undersökt metallskiktet i det från spegeln reflekterade ljuset. Om det mot spegeln infallande ljusets polarisationsplan gör med infallsplanet en vinkel på t. ex. 45°, så består som bekant det från spegeln reflekterade ljuset af två strålar, af hvilka den ena är polariserad i infallsplanet och den andra vinkelrätt deremot. Vid reflektionen hafva dessa strålar erhållit en fasskillnad, hvars storlek är beroende af infallsvinkeln.

Genomgå nu dessa strålar metallskiktet, så erhålla de en ny fasdifferens, som under vissa förhållanden kan vara lika stor och motsatt den förut erhållna. Betraktas nu plattan genom en analysator, så kan man genom dess utseende bestämma fasdifferensen i vissa punkter.

I det följande skola vi antaga, att infallsplanet ligger horisontelt. Polarisatorns svängningsplan må bilda vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med infallsplanet. Om det infallande ljusets amplitud sättes lika med 1, så har det efter reflektionen vinkelrätt mot infallsplanet svängande ljuset formen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} i_1 \sin(nt + \delta_1)$$

och det parallelt med infallsplanet svängande ljuset

$$\frac{1}{\sqrt{2}} i_2 \sin(nt + \delta_2) .$$

Här beteckna i_1 och i_2 amplituderna efter reflektionen samt δ_1 och δ_2 fasförskjutningarna vid densamma. Dessa storheter äro beroende af infallsvinkeln och kunna ändras genom att förändra densamma.

Vi skola nu undersöka det ljus, som genomgår de punkter på metallskiktet, hvilka ligga på en diameter vinkelrät mot infallsplanet. Det från dessa punkter mot analysatorn fallande ljuset svänger nu dels i infallsplanet och dels vinkelrätt deremot. Vi hafva alltså ljus, som svänger vinkelrätt mot infallsplanet, af formen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} i_1 h \sin(nt + \delta_1 + \beta_1)$$

och i infallsplanet

$$\frac{1}{\sqrt{2}} i_2 k \sin(nt + \delta_2 + \beta_2) ,$$

der h och k äro konstanter, som bero af strålarnes olika absorption samt β_1 och β_2 de nya fasförskjutningarne i metallskiktet.

Genomgå dessa strålar en nicol, hvars svängningsplan må bilda vinkeln Ω med infallsplanet, så är det genomgångna ljuset

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{i_1 h \sin\Omega \sin(nt + \delta_1 + \beta_1) + i_2 k \cos\Omega \sin(nt + \delta_2 + \beta_2)\right\}$$

Om ofvanstående uttryck bringas under formen

$$C \sin(nt + \alpha),$$

så är

$$2C^2 = i_1^2 h^2 \sin^2\Omega + i_2^2 k^2 \cos^2\Omega +$$
$$+ 2 i_1 i_2 hk \sin\Omega \cos\Omega \cos(\delta_1 - \delta_2 + \beta_1 - \beta_2).$$

I de punkter å metallskiktet, hvarest $\delta_1 - \delta_2 = -(\beta_1 - \beta_2)$ är alltså

$$C\sqrt{2} = i_1 h \sin\Omega + i_2 k \cos\Omega.$$

Dessa punkter synas mörka, när

$$\operatorname{tg}\Omega = -\frac{i_2 k}{i_1 h}.$$

Den interferensfigur, som i detta fall uppkommer i analysatorns synfält, har formen af en stående lemniscata, hvars dubbelpunkt ligger i skiktets medelpunkt. Ju större infallsvinkeln är, desto mindre blifva ovalerna, och ju mera koniskt metallskiktet är, desto tydligare och skarpare framträder figuren.

Vid bestämningen af fasdifferensen i en bestämd punkt på skiktet, har man alltså först att inställa plattan så, att punkten i fråga befinner sig på skiktets vertikala diameter. Derefter ändras infallsvinkeln, till dess man vid lämplig vridning af analysatorn erhåller en lemniscata, hvars ena oval går genom ifrågavarande punkt. Då är för ifrågavarande punkt

$$\beta_2 - \beta_1 = \delta_1 - \delta_2\,;\ \operatorname{tg}\Omega = -\frac{i_2 k}{i_1 h}$$

$\delta_1 - \delta_2$ och $\frac{i_2}{i_1}$ kunna bestämmas med en BABINET's kompensator. Man kan alltså bestämma såväl fasdifferensen, som förhållandet mellan strålarnes amplituder.

Af de strålar, som reflekteras från spegeln, får den, som svänger vinkelrätt mot infallsplanet, alltså i vertikalplanet, den största fasförskjutningen. Vi hafva alltså $\delta_1 > \delta_2$. Om den radielt svängande strålen erhåller vid genomgången af metallskiktet den minsta fasförskjutningen, så är $\beta_2 > \beta_1$. I detta fall kompenseras af metallskiktet den vid reflektionen erhållna fasdifferensen. Vid lämplig vridning af analysatorn skola derför tydligen de punkter på skiktets vertikala diameter synas mörka, hvarest $\delta_1 - \delta_2 = \beta_2 - \beta_1$.

Eftersom differensen $\delta_1 - \delta_2$ växer med infallsvinkeln och $\beta_2 - \beta_1$ med metallskiktets tjocklek, skall tydligen vid liten infallsvinkel de yttersta punkterna synas mörka. Ju större infallsvinkeln är, desto närmare medelpunkten utsläckes ljuset.

Får den tangentielt svängande strålen den största förskjutningen, så erhålles en liggande lemniscata. Man kan lätt se detta, om man utför räkningar analoga med de ofvan utförda, öfver ljusintensiteten på skiktets horisontela diameter. Vi kunna således äfven afgöra hvilken af strålarne, som erhåller den största hastigheten.

Vid bestämningen af fasdifferensen i dubbelbrytande metallskikt har jag användt JAMIN's apparat, hvarest likväl polarisatorn var ersatt med ett större NICOL's prisma. Ljuset från en Auerlampa genomgick först en lins, hvarest det bringades till parallelism, och derefter polarisatorn, hvilkens svängplan på vanligt sätt injusterades så, att det bildade 45° vinkel mot infallsplanet. På apparatens bord var fastsatt en silfverspegel, hvilken följaktligen kunde vridas omkring en vertikal axel. Med en BABINET's kompensator bestämdes nu för olika infallsvinklar (hvarje 5°) fasdifferensen mellan de från spegeln kommande strålarne.

Som exempel på huru stor fasdifferensen kan vara i olika punkter på dessa dubbelbrytande skikt, skall jag här meddela några mätningar på ett platinaskikt och ett jernoxidskikt.

Med platinaskiktet erhålles en stående lemniscata; här har alltså den tangentielt svängande strålen den största hastigheten. I jernoxidskiktet är förhållandet motsatt. Här erhålles en liggande lemniscata, och den radielt svängande strålen har alltså största hastigheten. Följande observationer hafva gjorts i rödt ljus.

Platinaskikt (diameter 20 mm.).

Afstånd från skiktets medelpunkt. mm.	Fasdifferens i våglängd.
4	0,120
6	0,087
8	0,039
10	0,000

Jernoxidskikt (diameter 15 mm.).

	Fasdifferens i våglängd.
I	0,000
II	0,009
III	0,031
IV	0,124

I denna sista tabell betecknar I de punkter, som ligga på den yttersta af de Nobiliska ringarna, II de punkter, som ligga på den näst yttersta, o. s. v.

Såsom jag i en annan uppsats visat, uppkomma dessa dubbelbrytande skikt antagligen derigenom, att katodpartiklar föras utefter kraftlinierna i det elektrostatiska fält, som bildas mellan

katoden och plattan. Fasdifferensens storlek är derför antagligen icke endast beroende af skiktets tjocklek, utan äfven på det elektrostatiska fältets styrka vid skiktets bildning. Då jag ej uppmätt denna fältstyrka vid framställningen af skikten, så äro dessa ej fullt definierade. De här anförda talen afse derför endast att lemna ett begrepp om fasdifferensens storlek.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 170.

Sur la convergence uniforme des séries.

Par Ivar Bendixson.

[Communiqué par G. Mittag-Leffler.]

1. Dans son traité fondamental »Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di variabili reali» Pisa 1878 page 103, M. Dini a introduit la notion des séries »convergente in ugual grado semplicimente», de la manière suivante:

Étant donnée une série de fonctions

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

convergente dans l'intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$, *on dira que la convergence de cette série est simplement uniforme,* quand, *pour chaque nombre positif* δ, *aussi petit que l'on voudra, et pour chaque nombre* m', *il existe un nombre entier* $m \geq m'$ *tel que l'on ait*

$$\left| \sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(x) \right| < \delta$$

pour toutes les valeurs de x *de l'intervalle* (α, β).

Il prouve enfin, page 109, 110, qu'il suffit de supposer que la convergence d'une série de fonctions continues soit simplement uniforme pour savoir que la série est elle-même une fonction continue. Mais il dit qu'il ne sait pas, s'il existe des séries convergentes de cette manière, sans être en même temps uniformément convergentes dans le sens ordinaire du mot. [1])

[1]) Dini loco citato page 103, où il dit: Per quanto sò non si conoscono per ora serie che in un dato intervallo siano convergenti in ugual grado soltanto semplicimente: ma è certo permesso di *dubitare* che possono essistere anche di tali serie.

Il n'est pourtant pas difficile de former des séries dont la convergence est seulement simplement uniforme.

Envisageons à cet effet une série de fonctions continues $f_\nu(x)$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) \tag{1}$$

dont nous supposons qu'elle ne soit pas uniformément convergente dans l'intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$, mais qu'elle y soit convergente, et mettons

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x) = s_n$$

$$u_{2n} = s_n$$

$$u_{2n+1} = - s_n .$$

Il est donc évident que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

est convergente et égale à zéro pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle. Mais la série n'y est pas uniformément convergente.

Car si l'on avait

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} u_n \right| < \delta \qquad \text{pour } n \geq m, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

il s'en suivrait que

$$\left| \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} u_\nu \right| < \delta \qquad \text{pour } n \geq m, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

et l'égalité évidente

$$\sum_{\nu=2n+1}^{\infty} u_\nu = - s_n$$

nous donnerait alors

$$| s_n | < \delta \qquad \text{pour } n \geq m, \ \alpha \leq x \leq \beta$$

ce qui montrerait que la série (1) serait, contrairement à notre hypothèse, une série uniformément convergente.

Mais comme

$$\sum_{\nu=2n}^{\infty} u_\nu = 0$$

quel que soit le nombre entier n, on voit que la convergence de la série est simplement uniforme.

Soit enfin

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)$$

une série uniformément convergente dans l'intervalle (α, β), on voit aisément que la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [\varphi_\nu(x) + u_\nu]$$

est simplement uniforme, et il n'est pas difficile à prouver que la série n'est pas uniformément convergente. La série (1) n'étant pas uniformément convergente, il est en effet possible de trouver un nombre positif δ tel qu'il existe des valeurs de m pour lesquelles s_m n'est pas en valeur absolue plus petit que δ, pour toutes les valeurs de x de l'intervalle. Soient $m_1, m_2, \ldots,$ $m_\nu, \ldots$ ces valeurs de m, on sait que

$$\lim_{\nu = \infty} m_\nu = \infty .$$

Il existe alors des valeurs de x correspondantes, $x_{m_1}, x_{m_2},$ $\ldots, x_{m_\nu}, \ldots$ telles que l'on ait

$$\left| \sum_{\nu=m_\nu}^{\infty} f_\nu(x_{m_\lambda}) \right| \geq \delta .$$

Soit maintenant q un nombre entier, suffisamment grand pour que

$$\left| \sum_{\nu=m}^{\infty} \varphi_\nu(x) \right| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{pour } m \geq q,\ \alpha \leq x \leq \beta$$

et soit r un nombre entier tel que $m_\lambda > q$ pour $\lambda \geq r$, on aura

$$\left| \sum_{\nu=2m_\lambda+1}^{\infty} [\varphi_\nu(x) + u_\nu] \right| > \frac{\delta}{2} \quad \text{pour } x = x_{m_\lambda},\ \lambda \geq r.$$

c. q. f. d.

On pourrait être tenté à croire que le théorème inverse de celui démontré par M. DINI serait vrai, à savoir que, si une série de fonctions continues est elle-même une fonction continue, la convergence de la série serait simplement uniforme. Il n'en est pourtant rien. Pour le démontrer nous envisagerons les deux séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}(1-x) \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\nu(1-x)}{1+\nu(1-x)}-\frac{(\nu-1)(1-x)}{1+(\nu-1)(1-x)}\right]$$

qui sont toutes les deux égales à 1 pour $0 \leq x < 1$ et égales à zéro pour $x = 1$. Formons ensuite la série qu'on obtient en prenant la différence de ces deux séries,

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\nu(1-x)}{1+\nu(1-x)}-\frac{(\nu-1)(1-x)}{1+(\nu-1)(1-x)}-x^{\nu-1}(1-x)\right]$$

il est évident qu'elle est convergente et égale à zéro pour $0 \leq x \leq 1$.

Mais l'égalité évidente

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left[\frac{\nu(1-x)}{1+\nu(1-x)}-\frac{(\nu-1)(1-x)}{1+(\nu-1)(1-x)}-x^{\nu-1}(1-x)\right]=$$

$$=1-\frac{n(1-x)}{1+n(1-x)}-x^{n}$$

pour $0 \leq x < 1$ nous fait voir alors que le membre droit est, pour $x = 1-\frac{1}{n}$, égal à $\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} > \frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ où e désigne la base des logarithmes népériens. Si n est un nombre positif quelconque, aussi grand que l'on voudra, il existe donc toujours des valeurs de x telles que le membre gauche est en valeur absolue $> \frac{1}{2}-\frac{1}{e}$.

La série (2) représente donc une fonction continue dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, mais la convergence de la série n'est pourtant pas simplement uniforme.

2. À l'égard des séries dont la convergence est simplement uniforme, on peut établir les Théorèmes suivants:

Théorème I.

Si la convergence d'une série de fonctions

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

où toutes les f_ν sont des fonctions continues de x pour $\alpha \leq x \leq \beta$, est simplement uniforme dans le même intervalle, et si

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b f_\nu(x)\, dx$$

est convergente, a et b étant des valeurs de x de l'intervalle, on aura

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b f_\nu(x)\, dx\,.$$

Pour la démonstration on n'a besoin que d'observer, qu'étant donné un nombre positif δ, on peut déterminer m tel que

$$\left|\varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{m-1} f_\nu(x)\right| < \frac{\delta}{|b-a|} \quad \text{pour } \alpha \leq x \leq \beta\,.$$

On aura donc

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\, dx - \sum_{\nu=1}^{m-1} \int_a^b f_\nu(x)\, dx\right| < \delta\,.$$

Mais il existe un nombre infini $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ de telles valeurs de m. On conclut donc que

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\, dx - \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b f_\nu(x)\, dx\right| \leq \delta$$

ce qui prouve notre théorème.

Théorème II.

Si

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

est une série convergente pour $\alpha \leq x \leq \beta$ et telle que tous les f_ν sont des fonctions continues, possédant des dérivées f'_ν, pour ces mêmes valeurs de x, et si en outre

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f'_\nu(x)$$

est une série dont la convergence est simplement *uniforme dans l'intervalle* (α, β), *on aura*

$$\varphi'(x) = \psi(x) .$$

Soit en effet $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\lambda, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs décroissants tels que

$$\lim_{\lambda=\infty} \delta_\lambda = 0 .$$

On sait alors, d'après la supposition faite sur la convergence de $\psi(x)$, que l'on peut déterminer une suite infinie de nombres entiers croissants $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_\nu < \ldots$ tels que

$$\left|\sum_{\nu=m_\lambda}^{\infty} f'_\nu(x)\right| < \delta_\lambda \text{ pour } \alpha \leq x \leq \beta .$$

Soit maintenant δ un nombre positif aussi petit que l'on voudra, on peut toujours trouver un nombre entier q tel que

$$\delta_\lambda < \frac{\delta}{4} \text{ pour } \lambda \geq q .$$

On en conclut que

$$\left|\sum_{\nu=m_\lambda}^{\infty} f'_\nu(x)\right| < \frac{\delta}{4} \text{ pour } \lambda \geq q, \; \alpha \leq x \leq \beta$$

ce qui nous donne

$$\left|\sum_{\nu=m_q}^{m_\lambda - 1} f'_\nu(x)\right| < \frac{\delta}{2} \text{ pour } \lambda \geq q, \; \alpha \leq x \leq \beta .$$

Mais l'équation

$$\frac{1}{h}\left[\sum_{\nu=m_q}^{m_\lambda - 1} f_\nu(x+h) - \sum_{\nu=m_q}^{m_\lambda - 1} f_\nu(x)\right] = \sum_{\nu=m_q}^{m_\lambda - 1} f'_\nu(x+\theta h) \qquad 0 < \theta < 1$$

nous fait voir que le membre gauche est en valeur absolue moindre que $\frac{\delta}{2}$, si x et $x+h$ sont des valeurs de l'intervalle (α, β). En faisant λ augmenter vers l'infini, on obtient

$$\left|\frac{1}{h}\left[\sum_{\nu=m_q}^{\infty} f_\nu(x+h) - \sum_{\nu=m_q}^{\infty} f_\nu(x)\right]\right| \leq \frac{\delta}{2}$$

tant que x et $x + h$ sont des valeurs de l'intervalle (α, β).

En observant maintenant que l'on peut déterminer un nombre positif ε tel que

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m_q-1} \frac{f_\nu(x+h) - f_\nu(x)}{h} - \sum_{\nu=1}^{m_q-1} f'_\nu(x)\right| < \frac{\delta}{4} \quad \text{pour } |h| \leq \varepsilon$$

on aura

$$\frac{1}{h}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x+h) - \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\right] - \sum_{\nu=1}^{\infty} f'_\nu(x) =$$

$$= \left[\sum_{\nu=1}^{m_q-1} \frac{f_\nu(x+h) - f_\nu(x)}{h} - \sum_{\nu=1}^{m_q-1} f'_\nu(x)\right] +$$

$$+ \sum_{\nu=m_q}^{\infty} \frac{f_\nu(x+h) - f_\nu(x)}{h} - \sum_{\nu=m_q}^{\infty} f'_\nu(x)$$

où chaque terme du membre droit est en valeur absolue $< \frac{\delta}{2}$ ou $\frac{\delta}{4}$ pour $|h| \leq \varepsilon$. On en conclut que le membre droit est en valeur absolue moindre que δ. On est donc assuré que

$$\left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \psi(x)\right| < \delta \text{ pour } |h| \leq \varepsilon$$

c. q. f. d.

Mais on peut prouver un théorème beaucoup plus important.

Théorème III.

Si

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

est une série convergente pour $\alpha \leq x \leq \beta$ *et telle que les* f_ν *sont des fonctions continues, possédant des dérivées* f'_ν, *pour ces mêmes valeurs de* x, *si de plus il est possible de déterminer un nombre positif* G *tel que l'on ait*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m} f'_\nu(x)\right| < G$$

pour chaque valeur de m *et pour* $\alpha \leq x \leq \beta$, *alors la série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ *est uniformément convergente dans l'intervalle* $\alpha \leq x \leq \beta$.

Soit à cet effet g_n la limite supérieure de toutes les valeurs de la fonction

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x)\right| \quad \text{pour } \alpha \leq x \leq \beta .$$

Je dis que les quantités g_ν sont tels que

$$\lim_{\nu=\infty} g_\nu = 0 .$$

Car s'il n'en était pas ainsi, les valeurs $g_1, g_2, \ldots, g_r, \ldots$ auraient au moins une valeur limite $g > 0$. Soit alors $g_{m_1}, g_{m_2}, \ldots, g_{m_\lambda}, \ldots$ une suite infinie des quantités g_ν telle que

$$\lim_{\lambda=\infty} g_{m_\lambda} = g .$$

On peut alors déterminer un nombre positif q tel que

$$g_{m_\lambda} > \frac{g}{2} \quad \text{pour } \lambda \geq q .$$

En formant

$$\sum_{\nu=m_\lambda}^{\infty} f_\nu(x) \qquad \lambda = q, q+1, \ldots, q+\nu, \ldots$$

on sait qu'il existe au moins une valeur x_λ de x telle que

$$\left|\sum_{\nu=m_\lambda}^{\infty} f_\nu(x_\lambda)\right| > \frac{g}{2} .$$

Ces valeurs $x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{q+\nu}, \ldots$ sont toutes comprises entre α et β et ont alors au moins une valeur limite γ telle qu'il existe un nombre infini des valeurs x_λ dans chaque intervalle aussi petit que l'on voudra $\gamma - \varepsilon \leq x \leq \gamma + \varepsilon$.

Déterminons maintenant m de telle manière que l'on ait

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+m'} f_\nu(\gamma)\right| < \frac{g}{8} \quad \text{pour chaque nombre entier } m'.$$

On aura

$$\sum_{\nu=m}^{m+m'} f_\nu(\gamma+h) - \sum_{\nu=m}^{m+m'} f_\nu(\gamma) = h \cdot \sum_{\nu=m}^{m+m'} f'_\nu(\gamma+\theta h) \qquad 0<\theta<1 .$$

Mais

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+m'} f'_\nu(\gamma+\theta h)\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{m+m'} f'_\nu(\gamma+\theta h) - \sum_{\nu=1}^{m} f'_\nu(\gamma+\theta h)\right|$$
$$\leq 2G$$

d'après notre hypothèse. On aura donc

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+m'} f_\nu(\gamma+h)\right| < \frac{g}{8} + |h|\,2G .$$

En faisant alors $\varepsilon < \frac{g}{16G}$ on aura

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+m'} f_\nu(\gamma+h)\right| < \frac{g}{4} \quad \text{pour } |h| \leq \varepsilon .$$

Soit maintenant r un nombre entier tel que

$$m_\lambda > m \qquad \text{pour } \lambda > r$$

on aura

$$\left|\sum_{\nu=m_\lambda}^{m_\lambda+m'} f_\nu(\gamma+h)\right| = \left|\sum_{\nu=m}^{m_\lambda+m'} f_\nu(\gamma+h) - \sum_{\nu=m}^{m_\lambda-1} f_\nu(\gamma+h)\right|$$
$$< \frac{g}{2} \qquad \text{pour } \lambda > r,\ |h| \leq \varepsilon$$

ce qui nous donne

$$\left|\sum_{\nu=m_\lambda}^{\infty} f_\nu(\gamma+h)\right| \leq \frac{g}{2} \text{ pour } \lambda > r,\ |h| \leq \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité met en évidence qu'il n'y a pas des valeurs x_λ telles que $\lambda > r$ dans l'intervalle $\gamma-\varepsilon \ldots \gamma+\varepsilon$, et on en conclut que notre hypothèse que les g_ν ont une valeur limite $g>0$ est impossible.

Soit maintenant δ un nombre positif aussi petit que l'on voudra on pourra déterminer un nombre entier m tel que

$$g_n < \delta \qquad \text{pour } n > m$$

ce qui met en évidence l'uniformité de la convergence.

Pour les séries dont la convergence est simplement uniforme, on a un théorème analogue, mais nous préférons énoncer les cas qui sont possibles de la manière suivante.

Théorème IV.

Soit

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

une série convergente pour $\alpha \leq x \leq \beta$ *et telle que les* f_ν *sont des fonctions continues, possédant des dérivées* f'_ν, *pour ces mêmes valeurs de* x. *Soit de plus* G_n *la limite supérieure de*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f'_\nu(x)\right| \quad \text{pour } \alpha \leq x \leq \beta .$$

Les trois cas suivants sont alors à distinguer.

1) *Toutes les valeurs limites des quantités* $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ *sont finies. La série* $\varphi(x)$ *est alors uniformément convergente dans l'intervalle* (α, β).

2) *L'infini est une valeur limite des quantités* $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ *mais elles en ont au moins une autre qui est finie. La série* $\varphi(x)$ *a donc une convergence simplement uniforme dans l'intervalle.*

3) *L'infini est la seule valeur limite des quantités* $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ *La convergence de la série n'est alors pas en général simplement uniforme dans l'intervalle* (α, β).

Le cas 1) nous l'avons déjà traité dans le théorème précédent.

Nous traiterons donc ici le cas 2).

Soit donc G une des valeurs limites finies des quantités G_ν.

On peut alors trouver une suite infinie $G_{m_1}, G_{m_2}, \ldots, G_{m_\nu}, \ldots$ des quantités G_ν telle que $m_1 < m_2 < \ldots < m_\lambda < \ldots$ et que

$$\lim_{\lambda=\infty} G_{m_\lambda} = G$$

et il s'en suit qu'il existe un nombre positif G_1 tel que

$$G_{m_\lambda} < G_1 \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots.$$

Mettons maintenant

$$\sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(x) = s_m \,, \quad \sum_{\nu=1}^{m} f'_\nu(x) = s'_m$$

et envisageons la série

$$s_{m_1} + (s_{m_2} - s_{m_1}) + (s_{m_3} - s_{m_2}) + \ldots + (s_{m_\lambda} - s_{m_{\lambda-1}}) + \ldots =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} (s_{m_\lambda} - s_{m_{\lambda-1}}) \,.$$

Cette série satisfait évidemment aux conditions du théorème précédent. Car la série formée des dérivées des fonctions s_{m_λ}

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (s'_{m_\lambda} - s'_{m_{\lambda-1}})$$

est telle que

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{n} (s'_{m_\lambda} - s'_{m_{\lambda-1}})\right| = |s'_{m_n}| = \left|\sum_{\nu=1}^{m_n} f'_\nu(x)\right| < G_1 \,.$$

La série est donc uniformément convergente. Soit maintenant δ un nombre positif aussi petit que l'on voudra, on peut trouver un nombre positif q telle que

$$\left|\sum_{\lambda=n+1}^{\infty} (s_{m_\lambda} - s_{m_{\lambda-1}})\right| < \delta \text{ pour } n > q \,.$$

Mais l'équation

$$\sum_{\lambda=n+1}^{\infty} (s_{m_\lambda} - s_{m_{\lambda-1}}) = \sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

nous donne alors

$$\left|\sum_{\nu=m_n+1}^{\infty} f_\nu(x)\right| < \delta \quad \text{pour } n > q$$

c. q. f. d.

Appliquons enfin ce dernier Théorème à un exemple.

S'il sagit de déterminer si la série

$$\operatorname{Sin} x - \frac{\operatorname{Sin} 2x}{2} + \frac{\operatorname{Sin} 3x}{3} - \ldots$$

est uniformément convergente ou non, nous formons la série des dérivées

$$\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} 2x + \operatorname{Cos} 3x - \operatorname{Cos} 4x + \ldots$$

On voit donc que cette série est $= \infty$ pour $x = \pi, 3\pi, \ldots (2\nu + 1)\pi, \ldots$.

Mais dans un intervalle quelconque qui n'embrasse aucun de ces points la série

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \operatorname{Cos} \nu x$$

est toujours finie. Il s'en suit que la série donnée est uniformément convergente dans chaque intervalle qui n'embrasse pas une des valeurs $x = \pm (2\nu + 1)\pi$.

3. Ces théorèmes très simples sont d'une grande utilité, quand il s'agit du calcul des intégrales des équations différentielles. Nous traiterons ici quelques exemples de l'avantage qu'on en peut tirer.

Envisageons le système d'équations différentielles

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

où les fonctions $f_1, \ldots, f_n$, sont continues pour les valeurs de $x, y_1, \ldots, y_n$, telles que

$$|x - x_0| \leq a; \quad |y_\nu - y_{\nu 0}| \leq b; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

De plus on suppose que l'on puisse déterminer n quantités positives $A_1, \ldots, A_n$, telles que l'on ait

$$(4) \quad |f_\nu(x, y'_1, \ldots, y'_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| < A_1 |y'_1 - y_1| + \\ + A_2 |y'_2 - y_2| + \ldots + A_n |y'_n - y_n|$$

$x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n$, étant des valeurs comprises dans les intervalles indiqués. On sait alors que l'on peut, par une suite d'approximations successives, déterminer les intégrales des équations (3) qui pour $x = x_0$ prennent les valeurs $y_{10}, \ldots, y_{n0}$. [1])

[1]) Voir PICARD, Traité d'analyse, Tome II, page 301, Tome III, page 302.

Considérons en effet les équations

$$\frac{dy_{\nu 1}}{dx} = f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Nous en tirons par quadratures les fonctions $y_{\nu 1}$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour $x = x_0$ les valeurs $y_{\nu 0}$.

Ayant formé ensuite le système d'équations

$$\frac{dy_{\nu 2}}{dx} = f_\nu(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

on en détermine les $y_{\nu 2}$ par la condition que $y_\nu = y_{\nu 0}$ pour $x = x_0$. En continuant ainsi on déterminera les fonctions $y_{\nu\lambda}$ de manière qu'elles satisfassent aux équations

$$\frac{dy_{\nu\lambda}}{dx} = f_\nu(x, y_{1\lambda-1}, \ldots, y_{n\lambda-1}) \qquad \begin{matrix}\nu = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda = 1, 2, 3 \ldots\end{matrix}$$

et que $y_{\nu\lambda} = y_{\nu 0}$ pour $x = x_0$.

On sait alors que les séries

(5) $$y_\nu = y_{\nu 0} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} [y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}] \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

représentent les intégrales prenant pour $x = x_0$ les valeurs $y_{10}, \ldots, y_{n0}$, tant que l'on a

$$|x - x_0| \leq \varrho$$

ϱ désignant la plus petite des quantités a, $\frac{b}{M}$ (où M est la valeur absolue maxima des fonctions f_ν, pour les valeurs des variables $|x - x_0| \leq a$, $|y_\nu - y_{\nu 0}| \leq b$).

Supposons maintenant que *les fonctions f_ν ne soient pas assujetties à la condition de* M. LIPSCHITZ (*4*), *nous pouvons prouver que si les séries* (*5*) *sont convergentes pour $|x - x_0| \leq \varrho_1 < \varrho$ elles sont aussi uniformément convergentes pour ces valeurs de x et représentent les intégrales des équations* (*3*).

À cause de $\varrho < \frac{b}{M}$ on conclut que

$$|y_{\nu 1} - y_{\nu 0}| < b$$

et en général que

$$|y_{\nu\lambda} - y_{\nu 0}| < b \qquad \begin{matrix} \nu = 1, \ldots, n \\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

d'où l'on conclut que

$$|y_\nu - y_{\nu 0}| < b \text{ tant que } |x - x_0| \leq \varrho_1.$$

Envisageons maintenant les séries

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{d[y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}]}{dx} = f_\nu(x, y_{1m}, \ldots, y_{nm}) \quad \nu = 1, \ldots n$$

on en conclut que

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{d(y_{\nu,\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx}\right| < M \quad \begin{matrix} \text{pour } \nu = 1, 2, \ldots, n \text{ et} \\ \text{pour chaque valeur de } m. \end{matrix}$$

Le Théorème III du paragraphe précédent nous apprend donc que les séries (5) sont uniformément convergentes pour $|x - x_0| \leq \varrho_1$.

Mais à cause de la continuité des fonctions f_λ, il est possible de déterminer un nombre ε suffisamment petit pour que

$$|f_\lambda(x, y'_1, \ldots, y'_n) - f_\lambda(x, y_1, \ldots, y_n)| < \delta \qquad \lambda = 1, 2, \ldots$$

$x, y'_1, \ldots, y'_n, y_1, \ldots, y_n$ étant des valeurs quelconques des variables dans les intervalles $|y_\nu - y_{\nu 0}| < b$, $|x - x_0| < a$, n'assujetties qu'à la seule condition

$$|y'_\nu - y_\nu| < \varepsilon \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Or il est possible de déterminer un nombre m suffisamment grand pour que

$$|y_{\nu, m+m'} - y_{\nu m}| = \left|\sum_{\nu=m+1}^{m+m'+1} [y_{\nu,\lambda+1} - y_{\nu,\lambda}]\right| < \varepsilon \text{ pour } \nu = 1, 2, \ldots m$$

et pour toutes les valeurs de x telles que $|x - x_0| \leq \varrho_1$.

Mais l'équation

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+m'+1} \frac{d}{dx}[y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}] =$$

$$= f_\nu(x, y_{1, m+m'}, \ldots y_{n, m+m'}) - f_\nu(x, y_{1m}, \ldots, y_{nm}).$$

nous apprend alors que

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+m'} \frac{d}{dx}(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})\right| < \delta \quad \text{pour chaque valeur de } m' \text{ et } |x - x_0| \leq \varrho_1 .$$

Les séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}) \qquad \nu = 1, 2, \ldots n ,$$

étant alors uniformément convergentes, il est évident que les séries (5) satisfont aux équations (3).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème.

Étant donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

où nous ne faisons des fonctions f_ν d'autre supposition que celle, qu'elles sont finies, continues et positives, et vont en croissant quand l'une quelconque des quantités $y_1, \ldots, y_n$, augmente; pour les valeurs des variables assujetties aux conditions

$$|x - x_0| \leq a$$
$$|y_\nu - y_{\nu 0}| \leq b \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

il existe toujours au moins un système d'intégrales qui pour $x = x_0$ prennent les valeurs $y_{10}, \ldots, y_{n0}$. Ces intégrales sont obtenus par les approximations successives de M. PICARD. *Mais il y a aussi en général d'autres intégrales, satisfaisant aux conditions réquises.*

Des équations

$$\frac{dy_{\nu 1}}{dx} = f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

on conclut en effet que

$$y_{\nu 1} > y_{\nu 0} \quad \text{pour } x > x_0$$

ce qui nous donne

$$f_\nu(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) - f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0}) > 0 \qquad \text{pour } x > x_0 .$$

Comme on sait alors que

$$\frac{d(y_{\nu 2} - y_{\nu 1})}{dx} > 0 \quad \text{pour } x > 0$$

on aura

$$y_{\nu 2} > y_{\nu 1} \quad \text{pour } x > x_0$$

et en général

$$y_{\nu 0} < y_{\nu 1} < y_{\nu 2} \ldots < y_{\nu \lambda} < \ldots \qquad \text{pour } x > x_0 .$$

Mais tant que $x - x_0 < \frac{b}{M}$ on aura tous les $y_{\nu\lambda} < b$; ce qui fait voir que les séries

$$y_{\nu 0} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})$$

sont convergentes. Nous savons alors qu'elles représentent des intégrales, tant que l'on a

$$|x - x_0| \leq \varrho$$

où ϱ est la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$.

Pour faire voir qu'il existe en général aussi d'autres intégrales satisfaisant aux conditions réquises, nous envisageons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + 1$$

qui pour $y = 0$ ne satisfait évidemment pas à la condition (4), mais dont l'intégrale peut être obtenue par quadrature et s'écrit

$$2\sqrt{y} - 2l(\sqrt{y} + 1) = x + c .$$

En écrivant cette équation sous la forme

$$\frac{(\sqrt{y})^2}{2} - \frac{(\sqrt{y})^3}{3} + \ldots = \frac{x - x_0}{2}$$

on conclut que

$$\sqrt{y} = (x - x_0)^{\frac{1}{2}} [1 + \mathfrak{P}((x - x_0)^{\frac{1}{2}})]$$

$\mathfrak{P}$ désignant une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$ et s'annullant avec $x - x_0$. On en tire

$$y = (x - x_0) [1 + \mathfrak{P}_1((x - x_0)^{\frac{1}{2}})]$$

ce qui fait voir qu'il existe deux intégrales réelles s'annullant pour $x = x_0$.

Nous traiterons maintenant un cas plus difficile.

Envisageons à cet effet l'équation différentielle [1])

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

où nous supposons de la fonction f qu'elle soit continue, positive et aille en décroissant quand y augmente, pour les valeurs

$$|x - x_0| \leq a$$
$$|y - y_0| \leq b.$$

De l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0)$$

on conclut que $y_1 > y_0$ ce qui nous donne

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = f(x, y_1) - f(x, y_0) < 0.$$

On aura donc $y_2 < y_1$.

En continuant ainsi on aura

$$y_{2\nu} < y_{2\nu-1}$$
$$y_{2\nu} < y_{2\nu+1}.$$

Mais d'un autre côté on a

$$\frac{d(y_2 - y_0)}{dx} = f(x, y_1) > 0 \text{ ce qui donne } y_2 < y_0$$

d'où

$$\frac{d(y_3 - y_1)}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_0) < 0.$$

En continuant ainsi, on voit que les y à indices paires forment une suite croissante et les y à indices impaires une suite décroissante. Tout terme de la seconde suite étant en outre plus grande que tout terme de la première, on est assuré que

$$y_1, y_3, \ldots, y_{2\nu+1}, \ldots$$

[1]) Confer ici PICARD »Sur l'application des approximations successives», Journal de Math. Tome IX, pages 224 et suivantes.

ont une limite que nous désignerons par u_1, et de même que

$$y_2\,, y_4\,, \ldots, y_{2\nu}\,, \ldots$$

ont une limite que nous désignerons par u_2.

On sait alors que $u_2 \leq u_1$.

Maintenant on prouve aisément de la même manière que ci dessus que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(y_{2(\nu+1)} - y_{2\nu})\,,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}(y_{2\nu+1} - y_{2\nu-1})$$

sont des séries uniformément convergentes, tant que $|x - x_0| \leq \varrho$. De là on conclut que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(y_{2(\nu+1)} - y_{2\nu})\,,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(y_{2\nu+1} - y_{2\nu})$$

sont aussi uniformément convergentes pour ces mêmes valeurs des variables; ce qui met en évidence que u_1 et u_2 satisfont au système d'équations

$$\frac{du_1}{dx} = f(x\,,\ u_2)$$

$$\frac{du_2}{dx} = f(x\,,\ u_1)\,.$$

Il semble assez difficile à décider s'il existe dans ce cas une intégrale de l'équation (6), prenant la valeur y_0 pour $x = x_0$. Mais on peut affirmer que, s'il en existe une, elle est telle que l'on ait

$$u_2 < y < u_1 \qquad \text{pour } x - x_0 < \varrho\,.$$

Car si pour $x = x_1 > x_0$ on avait par exemple $y < u_2 < u_1$, les deux équations

$$\frac{d(u_1 - y)}{dx} = f(x\,,\ u_2) - f(x\,,\ y) < 0 \text{ pour } x = x_1$$

$$\frac{d(u_2 - y)}{dx} = f(x\,,\ u_1) - f(x\,,\ y) < 0 \text{ pour } x = x_1$$

nous apprennent que $u_1 - y$ et $u_2 - y$ augmentent quand x va en décroissant de x_1 à x_0. Mais alors on ne peut pas avoir

$$y = u_1 = u_2 \qquad \text{pour } x = x_0\,.$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola, N:o 171.

Deux théorèmes sur les nombres transcendants.

Par HAKON GRÖNWALL.

[Communiqué le 8 Décembre 1897 par G. MITTAG-LEFFLER.]

Par un nombre transcendant on entend un nombre qui ne satisfait à aucune équation algébrique à coefficients entiers. Je vais donner ci-dessous deux théorèmes simples dont chacun fait connaître une classe de nombres transcendants. Quant au premier de ces théorèmes, je l'ai déjà publié sous une forme un peu moins générale,[1]) mais comme quelques inexactitudes s'étaient glissées dans la démonstration, je crois utile de le reprendre ici.

1.

On démontre dans les éléments de l'arithmétique que si a est un entier plus grand que l'unité, tout nombre réel et positif peut, et cela d'une seule manière, être développé en une série

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^\nu}$$

$a_0, a_1, \ldots$ étant des entiers satisfaisant à la condition $0 \leqq a_\nu < a$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Ce développement s'écrit, en mettant en évidence les termes où a_ν est différent de zéro:

$$(1) \qquad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}} \qquad n_\nu < n_{\nu+1},\ 0 < a_\nu < a. \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

[1]) Note sur les fonctions et les nombres algébriques. Öfversigt etc. 1897, p. 199—203. J'observe à cette occasion que le théorème sur les fonctions algébriques démontré dans le § 1 de cette Note est un cas très particulier d'un théorème sur les séries entières démontré dans le mémoire de M. FABRY: Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série etc., Annales de l'École Normale 1896, p. 367—399, dont je n'ai eu connaissance qu'après l'impression de ma note citée.

Nous allons considérér la série plus générale

$$(2) \quad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}} \quad n_\nu < n_{\nu+1}, \; -a < a_\nu < a, \; a_\nu \neq 0. \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Il est clair que tout nombre réel peut, et cela d'une infinité de manières, être développé en une telle série.

D'abord, nous allons démontrer le lemme suivant:

Supposons que le nombre x représenté par la série (2) soit rationnel et égal à $\frac{g}{h}$, g et h étant deux entiers premiers entre eux. Posons

$$S_1 = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}}, \quad S_2 = \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}};$$

si alors $S_2 \gtrless 0$, on aura l'inégalité

$$(3) \qquad h \geqq a^{n_{\mu+1} - n_\mu - 1}.$$

Multiplions en effet x par $h \cdot a^{n_\mu}$, il vient, H désignant un nombre entier

$$g \cdot a^{n_\mu} = H + \frac{h}{a^{n_{\mu+1} - n_\mu}} \cdot \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu - n_{\mu+1}}}.$$

La série du second membre est par hypothèse différente de zéro; d'autre part, elle est inférieure ou égale en valeur absolue à la progression géometrique

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a-1}{a^\nu} = a.$$

On a par suite

$$(4) \qquad g \cdot a^{n_\mu} - H = \frac{h}{a^{n_{\mu+1} - n_\mu}} \cdot a\vartheta$$

où $\vartheta \gtrless 0$, $-1 \leqq \vartheta \leqq 1$. Si $h < a^{n_{\mu+1} - n_\mu - 1}$, la valeur absolue du membre droit serait comprise entre 0 et 1, tandis qu'elle doit, par l'équation (4), être au moins égale à 1; le lemme est donc démontré.

Supposons que, pour une infinité d'indices ν, $n_{\nu+1} - n_\nu > \varphi(\nu)$, où $\varphi(\nu)$ croît au delà de toute limite avec ν. *Alors le nombre x défini par la série (2) ne peut être rationnel.*

On a, d'abord, $S_2 \gtrless 0$ pour toute valeur de μ, car

$$|S_2| \geqq \frac{|a_{\mu+1}|}{a^{n_{\mu+1}}} - \left|\sum_{\nu=\mu+2}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}}\right|$$

et

$$\left|\sum_{\nu=\mu+2}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}}\right| \leqq \sum_{\nu=\mu+2}^{\infty} \frac{|a_\nu|}{a^{n_\nu}} \leqq \sum_{\nu=\mu+2}^{\infty} \frac{a-1}{a^{n_\nu}} < \frac{1}{a^{n_{\mu+2}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a-1}{a^\nu} = \frac{1}{a^{n_{\mu+2}-1}}$$

où l'on a le signe $<$ devant la dernière somme, car elle contient *toutes* les puissances de $\frac{1}{a}$ à partir de la $n_{\mu+2}$ième, tandis qu'en vertu de l'inégalité $n_{\nu+1} - n_\nu > \varphi(\nu)$ satisfaite par une infinité de valeurs de ν, certaines de ces puissances manquent dans l'avant-dernière somme. Donc

$$|S_2| > \frac{|a_{\mu+1}|}{a^{n_{\mu+1}}} - \frac{1}{a^{n_{\mu+2}-1}} \geqq \frac{1}{a^{n_{\mu+1}}} - \frac{1}{a^{n_{\mu+2}-1}} \geqq 0,$$

c'est à dire $S_2 \gtrless 0$. Maintenant le lemme est appliquable et montre que le numérateur h de la fraction irréductible qui représenterait la valeur de x surpasserait tout nombre donné, ce qui est absurde. Pour le cas où les a_ν sont positifs (et où l'on voit par suite immédiatement que $S_2 > 0$) ce théorème est dû à STERN.[1]

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le premier des théorèmes que nous avons annoncés:

Si, dans le développement

$$(5) \quad x = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}} \qquad n_\nu < n_{\nu+1},\ a_\nu \gtrless 0,\ -a < a_\nu < a\ (\nu = 1, 2, \ldots)$$

il y a une infinité d'indices ν pour lesquels

[1]) M. A. STERN, Ueber Irrationalität von Reihen, Journal de Crelle T. 95 (1883), p. 197—200.

(6) $$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} > \varphi(\nu)$$

où la fonction $\varphi(\nu)$ tend vers l'infini avec ν, x est un nombre transcendant.

Supposons en effet que le nombre (5) satisfasse à une équation algébrique à coefficients entiers, soit

(7) $$c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m .$$

Nous pouvons évidemment supposer dans (5) $-a < a_0 < a$, car cela revient à substituer à x le nombre $x + k$, k étant un entier, et nous savons que x est algébrique ou transcendant en même temps que $x + k$.

Nous pouvons, de plus, supposer que l'équation (7), que nous désignons par $G(x) = 0$, n'admet pas de racine rationelle; car sous cette hypothèse on pourrait poser $G(x) = G_1(x) \cdot G_2(x)$, G_1 et G_2 étant deux polynomes à coefficients entiers, où $G_1(x)=0$ donne toutes les racines rationelles de $G(x) = 0$ tandis que $G_2(x) = 0$ n'admet aucune racine rationelle. Or d'après le théorème que nous venons de démontrer, le nombre (5) n'est pas rationnel, car de l'inégalité $\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} > \varphi(\nu)$ s'ensuit $n_{\nu+1} - n_\nu > n_\nu(\varphi(\nu) - 1) > \varphi(\nu)$ si $n_\nu > 1$ et $\varphi(\nu) > 1$, ce qui a lieu à partir d'une certaine valeur de ν. Par suite, il nous est loisible de substituer à (7) l'équation $G_2(x) = 0$ dépourvue de racines rationelles.

En portant maintenant dans (7) l'expression (5), il vient

(8) $$c_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^\nu} \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \sum_{n_{\nu_1} + \ldots + n_{\nu_\lambda} = \nu} a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\lambda} .$$

Décomposons la série du second membre en deux parties, l'une obtenue en donnant aux $\nu_1, \ldots, \nu_\lambda$ des valeurs $\leqq \mu$ (lequel nombre est encore indéterminé), et l'autre provenant des termes où au moins un des indices $\nu_1, \ldots, \nu_\lambda$ est $\geqq \mu + 1$. Appellons la première partie S_1; son produit par $a^{m \cdot n_\mu}$ étant visiblement

un nombre entier, on aura le développement suivant de $|S_1|$ selon la formule (1)

$$|S_1| = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \ldots + \frac{\alpha_{m \cdot n_\mu}}{a^{m \cdot n_\mu}}, \quad \alpha_0 \geqq 0, \quad 0 \leqq \alpha_\nu < a \quad (\nu = 1, 2, \ldots m \cdot n_\mu)$$

c'est à dire, ε étant égal à ± 1

$$(9) \qquad S_1 = \varepsilon\alpha_0 + \frac{\varepsilon\alpha_1}{a} + \ldots + \frac{\varepsilon\alpha_{m \cdot n_\mu}}{a^{m \cdot n_\mu}}.$$

Envisageons la seconde partie S_2; elle est nécessairement différente de zéro, car si $S_2 = 0$, (7) admettrait la racine rationelle $x' = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}}$ contrairement à la supposition. Pour trouver une limite supérieure de $|S_2|$, observons que le nombre N des solutions de l'équation

$$(10) \qquad n_{\nu_1} + n_{\nu_2} + \ldots + n_{\nu_\lambda} = \nu$$

où au moins une des inconnues est plus grande ou égale à $n_{\mu+1}$, est, pour ν suffisamment grand et en vertu de (6), inférieur au nombre des solutions en entiers non négatifs de l'équation

$$(11) \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_\lambda = \nu$$

où au moins un des k est $\geqq n_{\mu+1}$. Or à tout système de nombres $k_1, \ldots, k_\lambda$ satisfaisant à ces conditions correspond au moins une solution en entiers non négatifs de l'équation

$$(12) \qquad k'_1 + k'_2 + \ldots + k'_\lambda = \nu - n_{\mu+1}$$

et, inversement, à toute solution $k'_1, \ldots, k'_\lambda$ de (12) correspondent λ solutions de (11) satisfaisant aux conditions indiquées, savoir

$$k_1 = k'_1, \ldots, k_{\varrho-1} = k'_{\varrho-1}, k_\varrho = k'_\varrho + n_{\mu+1}, k_{\varrho+1} = k'_{\varrho+1}, \ldots, k_\lambda = k'_\lambda \qquad (\varrho = 1, \ldots, \lambda),$$

toutes les solutions qu'on obtient de cette manière des différentes solutions de (12) n'étant pas d'ailleurs nécessairement distinctes. Comme le nombre des solutions entières et non négatives de

(12) est égal au coefficient de $x^{\nu - n_{\mu+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{(1-x)^\lambda}$, on trouve enfin

$$N < \lambda \cdot \frac{(\nu - n_{\mu+1} + 1) \ldots (\nu - n_{\mu+1} + \lambda - 1)}{\lfloor \lambda - 1} \leq \lambda(\nu - n_{\mu+1} + \lambda)^\lambda.$$

Comme $-a < a_\nu < a$ pour $\nu = 0, 1, \ldots$ on a $|a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\lambda}| < a^\lambda$, d'où

$$|S_2| \leq \sum_{\nu = n_{\mu+1}}^{\infty} \frac{1}{a^\nu} \sum_{\lambda=1}^{m} |c_\lambda| \sum_{n_{\nu_1} + \ldots + n_{\nu_\lambda} = \nu} |a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\lambda}| <$$

$$< \sum_{\nu = n_{\mu+1}}^{\infty} \frac{1}{a^\nu} \sum_{\lambda=1}^{m} |c_\lambda| \cdot a^\lambda \cdot \lambda(\nu - n_{\mu+1} + \lambda)^\lambda = \frac{1}{a^{n_{\mu+1}}} \cdot \sum,$$

où

$$\sum = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^\nu} \sum_{\lambda=1}^{m} |c_\lambda| \cdot a^\lambda \cdot \lambda(\nu + \lambda)^\lambda \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu + m)^m}{a^\nu} \cdot m a^m \sum_{\lambda=1}^{m} |c_\lambda|$$

a évidemment une valeur finie que nous écrivons dans le système de numération dont la base est a:

$$A_0 a^l + A_1 a^{l-1} + \ldots + A_l + \frac{A_{l+1}}{a} + \frac{A_{l+2}}{a^2} + \ldots$$

l étant un nombre positif et $0 < A_\nu < a$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), d'où

$$(13) \qquad |S_2| < \frac{A_0}{a^{n_{\mu+1} - l}} + \frac{A_1}{a^{n_{\mu+1} - l + 1}} + \ldots$$

de sorte que, si l'on développe $|S_2|$ suivant la formule (1), la première puissance de $\frac{1}{a}$ à coefficient différent de zéro est la $(n_{\mu+1} - l)^{\text{ième}}$ (ou une puissance supérieure). Écrivons donc

$$|S_2| = \frac{\alpha'_0}{a^{n_{\mu+1} - l}} + \frac{\alpha'_1}{a^{n_{\mu+1} - l + 1}} + \ldots \qquad 0 \leq \alpha'_\nu < a \ (\nu = 0, 1, \ldots)$$

de sorte que, ε' désignant ± 1

$$(14) \qquad S_2 = \frac{\varepsilon' \alpha'_0}{a^{n_{\mu+1} - l}} + \frac{\varepsilon' \alpha'_1}{a^{n_{\mu+1} - l + 1}} + \ldots.$$

En ajoutant (14) à (9), on aura d'après (8) un développement du nombre entier c_0, qui est de la forme (2) si μ est assez grand pour que $n_{\mu+1} - l > m \cdot n_\mu$. C'est ici que va apparaître une impossibilité. En appliquant la formule (3) en posant $h = 1$ parce que c_0 est un entier, on trouve

$$1 \geqq a^{n_{\mu+1} - l - m \cdot n_\mu - 1}$$

tandis qu'en vertu de (6) μ peut être choisi suffisamment grand pour que le membre droit dépasse toute limite donnée quelque grande qu'elle soit. Le nombre (5) ne peut par suite satisfaire à aucune équation algébrique à coefficients entiers.

C. Q. F. D.

II.

Soit x un nombre positif quelconque et posons

(1) $$x = a_0 + \frac{1}{x_1},\ x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},\ \ldots,\ x_\nu = a_\nu + \frac{1}{x_{\nu+1}},\ \ldots$$

où a_ν est le plus grand entier contenu dans x_ν; en éliminant successivement de ces équations $x_1, x_2, \ldots$ on obtient pour x l'expression connue sous le nom de *fraction continue normale*. Si x est rationnel, notre expression ne contient qu'un nombre fini de *quotients incomplets* $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ tandis que pour x irrationnel la fraction continue en contient une infinité en convergeant vers la limite x.

Cela rappelé, nous allons démontrer le théorème suivant.

Si, dans la fraction continue normale

(2) $$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots\cdots}},$$

il y a une infinité d'indices ν pour lesquels

(3) $$a_\nu > a^{\alpha^\nu}$$

quelque grands que soient les deux nombres a et α, x est un nombre transcendant.

Supposons en effet que x satisfasse à une équation algébrique à coefficients entiers

$$(4) \qquad f(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m = 0\,,$$

que nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer dépourvue de racines rationnelles, parce que la fraction continue (2), étant infinie, ne peut représenter un nombre rationnel.

Portons (méthode de LAGRANGE pour le calcul approximatif des racines) dans (4) la valeur de x tirée de la première des égalités (1), il vient

$$0 = f_1(x_1) = x_1^m f\left(a_0 + \frac{1}{x_1}\right) = f(a_0)\, x_1^m + f'(a_0)\, x_1^{m-1} + \ldots + \frac{f^{(m)}(a_0)}{m!}$$

et en continuant ce procédé

$$(5) \qquad 0 = f_\nu(x_\nu) = x_\nu^m f_{\nu-1}\left(a_{\nu-1} + \frac{1}{x_\nu}\right) =$$

$$= f_{\nu-1}(a_{\nu-1})\, x_\nu^m + f'_{\nu-1}(a_{\nu-1})\, x_\nu^{m-1} + \ldots + \frac{f_{\nu-1}^{(m)}(a_{\nu-1})}{m!}.$$

On a toujours $f_\nu(a_\nu) =$ nombre entier, et comme (4) n'a pas de racine rationnelle, ce nombre est différent de zéro, d'où

$$(6) \qquad |f_\nu(a_\nu)| \geq 1 \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,$$

laquelle inégalité est le fondement de la démonstration. D'après un théorème bien connu, l'on a

$$a_\nu \leq \frac{1}{|f_{\nu-1}(a_{\nu-1})|}\left(|f'_{\nu-1}(a_{\nu-1})| + \ldots + \frac{|f_{\nu-1}^{(m)}(a_{\nu-1})|}{m!}\right)$$

d'où par (6)

$$(7) \qquad a_\nu < |f'_{\nu-1}(a_{\nu-1})| + \ldots + \frac{|f_{\nu-1}^{(m)}(a_{\nu-1})|}{m!}.$$

Posons

$$(8) \begin{cases} \varphi(x) = |c_0|\, x^m + |c_1|\, x^{m-1} + \ldots + |c_m| \\ \varphi_\nu(x) = \varphi_{\nu-1}(a_{\nu-1}) x^m + \varphi'_{\nu-1}(a_{\nu-1}) x^{m-1} + \ldots + \dfrac{\varphi_{\nu-1}^{(m)}(a_{\nu-1})}{m!} \end{cases}$$

où

(9) $$\alpha_0 = a_0\,, \quad \alpha_\nu = \varphi'_{\nu-1}(\alpha_{\nu-1}) + \ldots + \frac{\varphi^{(m)}_{\nu-1}(\alpha_{\nu-1})}{|\underline{m}}\,.$$

En comparant ces formules à (7), on trouve évidemment

(10) $$a_\nu \leq \alpha_\nu \qquad (\nu = 0\,,\, 1\,,\, \ldots)\,.$$

Si $x > \dfrac{1}{2^{\frac{1}{m}} - 1}$, on a l'inégalité

$$2 \cdot x^\lambda > (x+1)^\lambda \qquad (\lambda = 0\,,\, 1\,,\, \ldots\,,\, m)$$

d'où l'on tire facilement

$$2\varphi_\nu(x) > \varphi_\nu(x+1) \qquad (\nu = 0\,,\, 1\,,\, \ldots)$$

c'est à dire

(11) $$\varphi_\nu(x) > \varphi'_\nu(x) + \ldots + \frac{\varphi^{(m)}_\nu(x)}{|\underline{m}}\,.$$

Les entiers α_ν forment, d'après leur loi de formation, une série croissante; il y a donc un indice $\nu = n$ à partir duquel $\alpha_\nu > \dfrac{1}{2^{\frac{1}{m}} - 1}$ et par suite, en vertu de (9) et (11)

(12) $$\alpha_{\nu+1} < \varphi_\nu(\alpha_\nu) \qquad (\nu = n\,,\, n+1\,,\, \ldots)\,.$$

De plus, (8) donne jointe à (11), comme $\alpha_{\nu+1} > \dfrac{1}{2^{\frac{1}{m}} - 1} \geqq 1$,

$$\varphi_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}) < \varphi_\nu(\alpha_\nu)\,\alpha^m_{\nu+1} + \varphi'_\nu(\alpha_\nu)\cdot\alpha^m_{\nu+1} + \ldots \frac{\varphi^{(m)}_\nu(\alpha_\nu)}{|\underline{m}}\,\alpha^m_{\nu+1} <$$
$$< 2\varphi_\nu(\alpha_\nu)\cdot\alpha^m_{\nu+1}\,,$$

laquelle combinée avec (12) donne

(13) $$2\varphi_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}) < 4[\varphi_\nu(\alpha_\nu)]^{m+1} \leq [2\varphi_\nu(\alpha_\nu)]^{m+1}\,.$$

Par l'application répétée de (13) on déduit

$$2\varphi_{n+\nu}(\alpha_{n+\nu}) < [2\varphi_n(\alpha_n)]^{(m+1)^\nu}$$

d'où enfin, à l'aide de (10) et (12)

(14) $$a_{n+\nu+1} < [2\varphi_n(\alpha_n)]^{(m+1)^\nu} \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \ldots)\,.$$

Il s'ensuit de là que, pour tout nombre algébrique donné sous la forme (2), il existe deux constantes a et α telles que

$$a_\nu < a^{\alpha^\nu}$$

pour toute valeur de l'indice ν, et il suffit de comparer ce résultat à la formule (3) pour démontrer notre théorème.

C. Q. F. D.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskolas kemiska laboratorium.

Zur Kenntniss der Phloroglucinazofarbstoffe.

THOR EKECRANTZ und ADOLF RISING.

(Mitgetheilt den 8 December 1897 durch L. F. NILSON.)

Die Oxyazofarbstoffe bilden eine scharf begränzte Gruppe, charakterisirt durch die chromofore Diazogruppe — N = N —, einen Phenolrest mit einem aromatischen Radikal vereinend, oder im allgemeinen, sie sind Phenolen in welchen ein oder mehrere Wasserstoffatome durch die Gruppe R — N = N — ersetzt worden sind, wenn man mit R einen einwertigen aromatischen Radikal bezeichnet.

In Übereinstimmung hiermit wird die Nomenklatur dieser Klasse von Verbindungen besonders einfach, wenn man zu dem Phenolnamen noch den Namen des eingehenden Diazorestes fügt und ausserdem die Anzahl der Substituirenden mit den Prefixen »*mono*», »*bi*»[1]) und »*tri*» angiebt.

Von diesen Azofarbstoffen sind eine grosse Anzahl bekannt, hauptsächlich solche, in welche nur ein Diazorest, der Formel R—N = N—Ph entsprechend, eingegangen ist, wenn man mit Ph den Rest einen 1- bis mehrwertigen Phenol bezeichnet.

Die Biazofarbstoffe sind von GRIESS[2]) und WALLACH[1]) dargestellt und von B. FISCHER und O. WALLACH[3]) studirt worden

[1]) Um Namenverwechslungen mit Diazoverbindungen zu vermeiden, wenden wir wie WALLACH (Ber. **15** p. 22) immer das Prefix *bi* an um die Verbindung in welche zwei Azoreste eingegangen sind, zu bezeichnen.

[2]) Ber. **9** p. 627.

[3]) Ber. **15** p. 2814.

deren Untersuchungen die Biazofarbstoffe des Resorcin und Orcin umfassen. Hierdurch konstatirten die zuletztgenannten Verfasser, dass bei Darstellung des Resorcinbiazofarbstoffes — welchen sie dadurch erhielten, dass sie ein Mol. diazotirtes Monamin in alkalischer Lösung auf ein Mol. des entsprechenden Monoazofarbstoffes einwirken liessen — immer zwei isomere Farbstoffe, von welchen der eine (α) in Natronlauge leicht löslich, der andere (β) dagegen schwerlöslich ist, gebildet werden. Dass diese Isomerie nicht darauf beruht, dass die neueintretende Diazogruppe in einem Falle in den Kern, im andern Falle in die Seitenkette eingeht, haben sie ebenfalls bewiesen.

Farbstoffe zu dieser späteren Kategorie gehörend, sogenannte sekundäre Azofarbstoffe, z. B.:

$$C_6H_5—N=N—C_6H_4—N=N—C_6H_4(OH)_2$$

sekundär Resorcinbiazobenzol,

entstehen bei dieser Reaktion nicht.

Bei Anwendung einer gleichartigen Behandlung wie auf Resorcin erhielten sie von Orcin nur eine Serie von Farbstoffen.

Aus Trioxybenzolen hat man nur eine geringe Anzahl Azofarbstoffe dargestellt, STEBBINS[1]) hat Pyrogallolazobenzol $C_6H_5—N=N—C_6H_2(OH)_3$ und aus alkalischen Phloroglucinlösung mit Sulphodiazobenzol »einen Orangenfarbstoff» erhalten.

WESELSKY und BENEDIKT[2]) haben Azobenzolphloroglucin, *p*-Azotoluolphloroglucin und *p*-Azophenolphloroglucin dadurch erhalten, dass die zwei Mol. diazotirtes Amin auf ein Mol. Phloroglucin einwirken liessen oder dass sie, in alkoholischer Lösung, Phloroglucin und Diazoamidoverbindungen, unter denselben molekylären Verhältnissen, auf einander einwirken liessen.

Sie behaupten diese Farbstoffe unter den entsprechenden Formeln

$$\begin{matrix} R—N=N \searrow \\ R—N=N \nearrow \end{matrix} C_6H(OH)_3$$

erhalten zu haben.

[1]) Ber. 13 p. 574.

[2]) Ber. 8 p. 967, Ber. 12 p. 226.

Da sonach durch Einwirkung zweier Molekylen einer Diazoverbindung auf 1 Mol. Phloroglucin, Biazofarbestoffe enstehen sollten, sa lag es nahe auf der Hand zu untersuchen, ob man nicht mittelst Anwendung von 1 und 3 Mol. einer diazotirten Aminbase, von Phloroglucin Mono- resp. Triazofarbstoffe erhalten könne.

Um einen Beitrag zu der Monographie über Phloroglucin, womit der eine von uns beschäftigt ist, liefern zu können, haben wir unsere Aufgabe so aufgefasst, dass wir als Ziel unsrer Arbeit, uns die Darstellung von Mono- und Triazofarbstoffen aus Phloroglucin, nebst eine Complettirung der Serie Biazofarbstoffe, gestellt haben.

Für das kostbare Material, welche so wohlwollend zu unsrer Disposition gestellt war, sowie für das grosse Intresse, mit welchem der Prefekt der chemischen Institution der Herr Professor OTTO PETTERSSON unsren Untersuchungen gefolgt, sprechen wir hiermit unsren tiefgefühlten ergebensten Dank aus.

Bei unsren Versuchen aus Phloroglucin Mono- und Triazofarbstoffe zu erhalten, haben wir unten angegebenes, generelles Verfahren angewandt. Um Monoazofarbstoffe zu erhalten, haben wir gleiche Volumen Lösungen von Phloroglucin (1 + 300), Natriumnitrit und Nitrat vom Monamine (1 Mol. von jedem) unter Abkühlung auf einander einwirken lassen, doch mit Beobachtung dessen, das Phloroglucin sich stets im Überschuss befand, dass zu der Phloroglucinlösung die übrigen mit einander unter Abkühlung gemischten Lösungen zugesetzt wurden.

Bei Versuchen zu Triazofarbstoffen zu gelangen, haben wir unter denselben Verhältnissen mit 3 Mol. Aminnitrat und 3 Mol. Natriumnitrit gearbeitet, doch mit der Modifikation, dass die Phloroglucinlösung so zu den diazotirten Aminnbasen gesetzt wurde, dass diese letztere sich immer im Überschuss befanden.

Bei Anwendung eines solchen Verfahrens verhalten sich die ungleichen Aminbasen stets etwas verschieden. Es gilt aber

beinah als allgemeine Regel, dass eine Mischung von Mono-, Bi- und Triazofarbstoffen erhalten wird. Der andere von WESELSKY und BENEDIKT[1]) vorgeschlagene Weg — Reaktion mit Diazoamidoverbindung in alkoholischer Lösung — hat ebenfalls Mischungsprodukte ergeben.

Einige Zahlen, welche bei Stickstoffbestimmungen aus diesen Mischungsprodukten erhalten wurden, werden weiter unten angegeben. Unsre Anstrengungen sind darauf ausgegangen, diese Mono-, Bi- und Triazofarbstoffe von einander zu trennen, eine Arbeit, die in den meisten Fällen mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist

	Gefunden.	Berechnet.		
		Monoverb.	Biverb.	Triverb.
	%	%	%	%
1 Mol. Phloroglucin + 2 Mol. diazotirtes Anilin	14,89 N	12,13 N	16,76 N	19,58 N
1 » » + 3 » » Anilin	13,85 N			
1 » » + 2 » » *o*-Toluidin	14,12 N	11,47 N	15,47 N	17,50 N
1 » » + 3 » » *o*-Toluidin	12,98 N			
1 » » + 2 » » *p*-Toluidin	14,15 N			
1 » » + 3 » » *p*-Toluidin	13,22 N			
1 » » + 2 » » *m*-Xylidin	12,12 N	10,85 N	14,36 N	16,09 N
1 » » + 3 » » *m*-Xylidin	13,04 N			
1 » » + 2 » Diazoamidobenzol .	17,58 N			
1 » » + 3 » Diazoamidobenzol .	17,41 N			
1 » » + 2 » Diazoamido-*p*-toluol	16,84 N			
1 » » + 3 » Diazoamido-*p*-toluol	16,09 N			

Für die verschiedenen Modifikationen in der Verfahrungsweise, welche bei den einzelnen Derivaten nothwendig gewesen sind, wird in dem experimentellem Theile dieser Arbeit Bescheid gegeben.

Schmelzpunktbestimmungen sind ausgeführt worden; da aber bei höherer Temperatur eine tiefgehende Zersetzung stattfindet,

[1]) Ber. 12 p. 226.

so haben diese für Bestimmmung der Reinhet der Farbstoffe keinen Wert und werden deshalb nicht angeführt.

Zu sämmtlichen Versuchen ist reines Phloroglucin angewendet worden, aus der Handelswaare durch Reinigung mittelst der von SKRAUP[1]) vorgeschlagenen Methode, hergestellt. Die Analysen auf Stickstoff sind nach DUMAS' Methode, mit der Modifikation, dass die Verbrennung in offenem Rohr, mit Natriumhydrokarbonat als Kohlensäureentwickler in besonders zugefügtem Rohr, ausgeführt worden. Kohlenstoff- und Wasserstoffbestimmungen sind in öffenem Rohr durch Verbrennung mit Kupferoxyd in Sauerstoffstrom (die Substanz im Schiff) ausgeführt worden.

Experimenteller Theil.

Phloroglucinazobenzole.

Von diesen ist Phloroglucinbiazobenzol früher schon von WESELSKY[2]) dargestellt worden. Derselbe glaubte sogar, dass die Bildung dieses Azofarbstoffes als Reaktion auf Phloroglucin dienen könne, eine Auffasssung, welche aber keinen Anklang gewonnen, da diese Reaktion auch durch andere Phenolen ausgeführt werden kann.

Um uns mit der Reaktion vertraut zu machen, haben wir zum Anfang den von WESELSKY bekannt gemachten Farbstoff dadurch dargestellt, dass wir laut seiner Anweisung 1 Mol. Phloroglucin nebst 2 Mol. Anilinnitrat und 2 Mol. Natriumnitrit haben auf einander einwirken lassen, wobei doch schon ohne Schwierigkeit konstatirt werden konnte, dass ein einheitliges Produkt nicht erlangt wird.

Bei den ausgeführten Stickstoffsbestimmungen wurden stets zu niedrige Werte erhalten, und weder die Temperaturveränderungen bei Ausführung der Reaktion, noch eine grössere Koncentration der Lösungen änderten diese Thatsache.

---

[1]) Monatsh. X, p. 697.
[2]) Ber. 8, p. 967, Ber. 12, p. 226.

Da es nahe auf der Hand lag anzunehmen, dass der geringe Stickstoffhalt auf einer glechzeitigen Bildung von Phloroglucinmonoazobenzol beruhe, so wurde diese Verfahrungsweise, mit Anwendung von gleichen Mol. Phloroglucin, Anilinnitrat und Natriumnitrit, wiederholt, aber auch hier ensteht eine Mischung, was aus dem hohen Stickstoffgeholt hervorgeht.

		Gefunden.	Berechnet für Phloroglucinmonoazobenzol
I.	Stickstoffsbestimmung . .	14,17 % N	12,13 % N
II.	» . .	14,6 % N	» N
III.	» . .	14,27 % N	» N

Obgleich die Aussichten auf diesem Wege zu einer reinen Triazoverbindung zu gelangen nicht gross waren, so haben wir die Reaktion ausgeführt, indem wir 3 Mol. Anilinnitrat und 3 Mol. Natriumnitrit auf 1 Mol. Phloroglucin einwirken liessen. Hierbei haben wir, wie oben erörtert, ebenfalls Mischungsprodukte erhalten, eigenthümlich genug, aber mit Werten auf Stickstoffhalt, welche zwischen Mono- und Biverbindungen aber nicht zwischen Bi- und Triverbindungen liegen.

Es fiel uns als wahrscheinlich vor, dass Triazoverbindungen nicht durch Ausführung der Reaktion auf oben angegebene Weise erhalten werden konnten, sondern wir haben anfänglich unsre Kräfte daraufhin koncentrirt die Mono- und Biverbindungen von einander zu trennen, und haben wir dabei auf folgende Weise verfahren.

2 Gram Phloroglucin (1 Mol.), 4 Gram Anilinnitrat (2 Mol.) und 1,8 Gram 94 % Natriumnitrit (2 Mol.) jedes in 300 $cm.^3$ Wasser gelöst, haben wir unter Abkühlung in Eiswasser auf einander einwirken lassen. Hierunter wurde die Phloroglucinlösung der Mischung der Übrigen zugesetzt. Nach Verlauf einiger Stunden, unter welchen die Mischung fortfahrend abgekühlt wurde, wurde der Niederschlag abgesaugt und gut mit Wasser gewaschen. Nach Eintrocknen auf einer porösen Platte wurde der so gewonnene Farbstoff wiederholte Male mit Chloroform ausgekocht. Die

koncentrirten Chloroformfiltrate liess man krystallisiren, wobei sich ein hübscher orangeroter Farbstoff abschied, der, mit kaltem Chloroform gewaschen, einer Stickstoffbestimmung unterworfen wurde, die einen Halt, einer reinen Biverbindung entsprechend, zeigte. Die gesammelten Chloroformfiltrate wurden hierauf mit gleichem Volumen Alkohol gefällt, wobei sich ein krystallinischer Niederschlag abschied, welcher eine Mischung von Mono- und Biverbindungen zeigte.

Durch die Behandlung des Niederschlags mit Chloroform und die erneuerte Fällung des Filtrates mit Alkohol, wurde ein Farbstoff erhalten der, einer Stickstoffbestimmung unterworfen, deutlich zeigte, dass er aus Phloroglucinmonoazobenzol bestand.

Die Methode Phloroglucinmono- und biazobenzol von einander zu trennen, gründet sich sonach auf die Schwerlöslichkeit der Biverbindung in Chloroform, aber deren relative Leichtlösligkeit in Alkohol, da die Monoverbindung im Gegensatz leichtlöslich in Chloroform, aber schwerlöslich in Alkohol ist.

Der Rückstand, der bei Auskochen mit Chloroform erhalten wurde, ergab bei der Stickstoffbestimmung für Phloroglucinbiazobenzol etwas zu hohe Werte, aber zu niedrige Werte um einer Triverbindung zu entsprechen. Wiederholte Chloroformauskochungen zeigten, dass man auf diesem Wege Phloroglucintriazobenzol schwerlich isoliren könne.

Um wenn möglich zu Phloroglucintriazobenzol zu gelangen, haben wir die Reaktion mit der Modifikation ausgeführt, dass wir eine diazotirte Lösung von 3 Mol. Anilinnitrat auf eine alkalische Lösung von 1 Mol. Phloroglucin, jedoch mit Beobachtung, dass die diazotirte Lösung sich immer in Überschuss befand, einwirken liessen — das Resultat zeigte sich aber nichts zufriedenstellend.

Ein unbedeutend abweichendes Resultat wurde bei Anwendung der von WESELSKY[1]) vorgeschlagenen Methode für Darstellung von Phloroglucinbiazobenzol aus Phloroglucin und Diazoimidobenzol[2] in alkoholischer Lösung, erhalten.

---

[1]) Ber. 8, p. 967. Ber. 12, p. 226.

[2]) Sowohl das bei diesem Versuche angewandte Diazoamidobenzol, sowie auch das später benutzte Diazoamidotoluol sind von uns auf die von B. FISCHER (Ber. 17, 641) angegebene Weise dargestellt worden.

1 Mol. Phloroglucin in warmem Alkohol gelöst wurde zu gleichem Volum alkoholischer Lösung von 3 Mol. Diazoamidobenzol zugesetzt. Das krystallinische Reaktionsprodukt zeigte bei der Analyse einen Halt von 17,41 % Stickstoff. Der oben angeführten Behandlung mit Chloroform unterworfen, erhielten wir als ungelöster Rückstand einen roten Farbstoff, welcher bei der Stickstoffbestimmung 17,83 % resp. 18,6 % N ergab, gegen die für die Triazoverbindung berechnete 19,53 % N.

Wiederholtes Auskochen mit Chloroform erhöhten den Stickstoffhalt des Rückstandes nur unbedeutend.

Versuche, welche gemacht wurden, Bi- und Triazoverbindungen durch Kochen mit Tetrachlorkohlenstoff zu trennen, gaben kein günstiges Resultat.

Phloroglucinmonoazobenzol.

OH
HO N=N
OH

Gelbroter Farbstoff unlöslich in kaltem, etwas löslich in warmem Wasser. Schwerlöslich in kaltem, leichtlöslich in warmem Alkohol; leichtlöslich in Benzol und Chloroform, beinahe unlöslich in Ligroïn. Krystallisirt aus alkoholischer Lösung, zeigte sich unter den Mikroskop, dass die Verbindung aus kleinen Prismen, zu blattähnlichen Massen zusammengefilzt, bestand. Zeigte Doppelbrechung mit paraleller Auslöschung aber nicht Pleochroismus.

Analysen:

I. 0,1644 gram lufttrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,3766 gram CO_2 (0,10268 gram C) und 0,0632 gram H^2O (0,00702 gram H).

II. 0,2532 gram gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxid 26,53 $cm.^3$ Stickstoff über 50 % Kalilauge bei 754 mm. Barometerdruck und 17° C. gemessen.

	Gefunden.		Berechnet.
	I.	II.	
C	62,45 %	—	62,6 %
H	4,27 %	—	4,35 %
N	—	12,01 %	12,13 %

Phloroglucinbiazobenzol.

OH

C_6H_5—N=N—C_6(OH)—N=N—C_6H_5

HO OH

Rotgelber Farbstoff, der sich zu den oben angeführten Lösungsmitteln, sowie die Vorige verhält, doch mit Ausname von geringerer Löslichkeit in Chloroform und wie es scheint in grösserer Löslichkeit in Alkohol. Zeigte unter dem Mikroskop grosse Ähnlichkeit mit der Monoverbindung, die Krystalle aber waren intensiver gefärbt.

Analysen:

I. 0,1446 lufttrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,3737 gram CO_2 (0,09292 gram C) und 0,0554 gram H_2O (0,00615 gram H).

II. 0,2010 gram gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 29,54 cm.³ Stickstoff bei 747 mm. Barometerdruck und 19° C. gemessen.

	Gefunden.		Berechnet.
	I.	II.	
C	64,26 %	—	64.67 %
H	4,25 %	—	4,19 %
N	—	16,53 %	16,76 %

In der Hoffnung, durch Einführung einer negativen Atomgruppe in Anilin, Azofarbstoffe, mit grösserer Neigung zu kry-

stallisiren, zu erhalten und dadurch die Möglichkeit die Reaktionsprodukte besser trennen zu können, zu erzielen, haben wir unsre Untersuchung auf Brom- und Nitrosubstituirtem Anilin ausgestreckt.

Bei Anwendung von Bromanilin ist es uns geglückt alle Wasserstoffatome in Phloroglucin durch Diazoreste zu ersetzen. Die Reaktion wurde folgendermassen ausgeführt. Zu einer diazotirten Lösung von 3 Mol. *p*-Bromanilin (1 + 300) wurde eine gleich verdünnte Lösung von 1 Mol. Phloroglucin zugesetzt, wobei sofort ein blutroter Niederschlag entstand, welcher, gesammelt und mit Wasser abgewaschen, nach Trocknen auf einer Thonplatte, eine Stickstoffbestimmung unterworfen wurde, welche 11,7 % N, gegen berechneten Halt von 12,44 % N für Phloroglucintriazobrombenzol als Resultat ergab. Der Stickstoffhalt der Biverbindung entspricht 8,24 %. Das erhaltene Produkt schien sonach nach der Stickstoffbestimmung zu urtheilen, in der Hauptsache aus Phloroglucintriazobrombenzol zu bestehen. Um wenn möglich diese rein zu erhalten, wurde derselbe aus Chloroform umkrystallisirt. Die erste Krystallfraktion hatte einen Stickstoffhalt, der den der Rohproduktes etwas unterstieg. Nach Koncentrirung der Mutterlauge wurden inzwischen eine neue Menge von Krystallen ausgeschieden, welche bei Stickstoffbestimmung einen Stickstoffhalt von 12,67 % zeigten.

Phloroglucintriazobrombenzol.

OH
Br⟨ ⟩N=N⟨ ⟩N=H⟨ ⟩Br
HO OH
N
‖
N
Br

Blutroter Farbstoff, schwerlöslich in Chloroform und Alkohol, unlöslich in Wasser und Ligroïn. Aus Chloroform kristallisirt, zeigt es in reflektirendem Licht einem schönen Metallglanz. Unter den Mikroskop zeigt es sich als intensiv gefärbte beinahe undurchsichtige kleinen Prismen. Die Auslöschung ist parallel mit der Langrichtung des Prismas, welche auch die Richtung der grössten Absorptionen ist. Die zuerst aus Chloroform auskrystallisirte Fraktion zeigte unter dem Mikroskop dasselbe Aussehen mit Ausnahme dass hier und da grössere und bedeutend hellere Prismen vorkamen, welche wahrscheinlich aus Phloroglucinbiazobrombenzol bestanden, was doch auf Grund ihrer geringen Menge nicht konstatirt werden konnte.

Analysen:

I. 0,1460 gram luftrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,2799 gram CO_2 (0,07633 gram C) und 0,0290 gram H_2O (0,00323 gram H).

II. 0,2712 gram gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 29,84 cm.^{3} Stickstoffgas, über koncentrirter Kalilauge (50,%) bei 76 mm. Barometerdruck und 18° C. gemessen.

	Gefunden.		Berechnet.
	I.	II.	
C	52,28 %	—	52,17 %
N	—	12,67 %	12,44 %
H	2,21 %	—	2,17 %

Bei den Versuchen, die mit nitrosubstituirtem Anilin ausgeführt worden, sind zu 1 Mol. Phloroglucin 2 resp. 3 Mol. diazotirtes *m*-Nitroanilin angewendet worden. Bei dieser Untersuchung ist ausschliesslich in Wasserlösung nach der von WESELSKY[1]) gegebenen Vorschrift, mit Beachtung desselben Zuwegegehens, wie bei Darstellung der unsubstituirten Farbstoffe, gearbeitet worden.

---

[1]) Ber. 8, p. 967.

Versuch I. 1 Mol. Phloroglucin + 2 Mol. diazotirtem *m*-Nitroanilin reagirten mit einander auf vorher angegebene Weise, wobei man als Produkt einen cinnoberroten Farbstoff erhielt. Mit Wasser abgewaschen, ergab das Rohprodukt nach dem Eintrocknen einen Stickstoffhalt von 18,9 %, (für Monoverbindung 15,27 % berechnet).

Durch Kochen mit Chloroform wurde relativ wenig in Lösung erhalten. Aus der erkalteten Chloroformlösung schied sich ein lebhaft cinnoberroter Farbstoff ab, welcher analysirt, zeigte dass er aus reinem Phloroglucinmononitrobenzol bestand.

Der in Chloroform unlösliche Theil gab bei Stickstoffbestimmung Werte, einer Biverbindung entsprechend. Bei wiederholtem Auskochen mit Chloroform wurde dasselbe Resultat erhalten, weshalb der Rückstand als reines Phloroglucinbiazonitrobenzol betrachtet wurde.

Versuch 2. Um zu untersuchen in wie fern sich eine Möglichkeit vorfinde zu Phloroglucinbiazonitrobenzol durch Anwendung von 3 Mol. diazotirter Aminbasen zu gelangen wurde der vorhergehende Versuch mit dieser Modifikation wiederholt. Ähnlich mit dem, was bei den Phloroglucinazobenzolen, bei Versuchen in einer Wasserlösung zu Triazoverbindungen zu gelangen, geschah, so wurde auch hier ein Rohprodukt mit niedrigerem Stickstoffhalt, als der Triazoverbindung zukommt, erhalten.

Da die Mono- und Biverbindungen durch vorhergehende Versuche isolirt waren, wurde dieses Produkt nicht näher untersucht.

Phloroglucinmonoazonitrobenzol.

OH NO_2

OH $\langle\ \rangle$ N=N $\langle\ \rangle$

OH

Cinnoberrote mikroskopiske Nadeln; ziemlich löslich in warmem Chloroform, Alkohol und Benzol, schwerlöslich in Aether, unlöslich in Ligroïn.

Analysen:

I. 0,1014 gram lufttrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,1943 gram CO_2 (0,05299 gram C) und 0,0298 gram H_2O (0,00332 gram H).

II. 0,1748 gram gaben bei der Verbrennung mit der Kuperoxyd 23,55 cm.³ Stickstoffgas über 50 % Kalilauge bei 769 mm. Barometerdruck und 20° C. gemessen.

	Gefunden. I.	Gefunden. II.	Berechnet.
C	52,26 %	—	52,36 %
H	3,27 %	—	3,27 %
N	—	15,53 %	15,27 %

Phloroglucinbiazonitrobenzol.

NO_2 OH NO_2
N=N N=N
HO HO

Ein schweres, ziegelrotes, undeutlich kristallinisches Pulver, unlöslich oder wenigstens äusserst schwerlöslich in Chloroform. Verhält sich zu den übrigen Solventien wie das vorhergehende, wenn auch weniger löslich.

Analysen:

I. 0,1112 gram Sutstanz gaben bei der Verbrennuug in Sauerstoffgas 0,2088 gram CO_2 (0,05694 gram C) und 0,0267 gram H_2O (0,00297 gram H).

II. 0,1593 gram gaben bei der Verbrennuug mit Kupferoxyd 28,5 cm.³ Stickstoffgas, über koncentrirter Kalilauge bei 736.5 mm. Barometerdruck und 18° C. gemessen.

	Gefunden. I.	Gefunden. II.	Berechnet.
C	51,21 %	—	50,94 %
H	2.67 %	—	2,60 %
N	—	19,61 %	19.81 %

———————

Phloroglucinazotoluole.

Bei den Versuchen, die gemacht worden sind aus Phloroglucin Azotoluolfarbstoff darzustellen, sind, wie bei Darstellung der entsprechenden Azobenzolfarbstoffe, die beiden von WESELSKY vorgeschlagenen Methoden angewandt worden. Hierbei zeigte sich, dass die Schwierigkeit Phloroglucintriazotoluol zu erhalten, dieselbe ist wie bei Versuchen Phloroglucintriazobenzol zu bekommen.

Bei Anwendung von 1 Mol. diazotirtem Toluidin auf 1 Mol. Phloroglucin haben wir dagegen durch Umkrystallisirung des Rohproduktes aus Alkohol so gut wie reines Phloroglucinmonoazotoluol erhalten.

Bei Anwendung von 2 resp. 3 Mol. Diozotoluolnitrat und bei Einwirkung von Diazoamido-*p*-toluol auf Phloroglucin in denselben molekylären Verhältnissen haben wir Produkte erhalten, die einen Stickstoffhalt zeigen, auf eine Mischung von Mono-, Bi- und Triazo-verbindungen hindeutend.

Auf Grund der grossen Löslichkeit der Toluolfarbstoffe in Chloroform, hat dieser nicht als Mittel die Substanzen zu trennen angewendet werden können.

Bei Behandlung mit kochendem Alkohol wird eine Lösung, aus welcher zuerst ein Mischungsprodukt auskrystallisirt wird und nachher eine reine Biverbindung, welche in Alkohol leichter löslich als die Monoverbindung ist, erhalten.

Die Versuche sind theils mit orto-Toluidin und theils mit para-Toluidin ausgeführt worden.

Phloroglucinmonoazo-p-toluol.

OH
OH⟨ ⟩N=N⟨ ⟩CH_3
OH

Blutrote mikroskopiske Prismen in Chloroform und Benzol äusserst leichtlöslich, schwerlöslich in warmem, beinahe unlöslich in kaltem Alkohol. Unlöslich in Ligroïn und Wasser.

Analysen:

I. 0,1582 gram lufttrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,3718 gram CO_2 (0,1040 gram C) und 0,0697 gram H_2O (0,00775 gram H).

II. 0,1912 gram gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 19,61 cm.[3] Stickstoffgas, über 50 % Kalilauge bei 744 mm. Barometerdruck und 18° C., gemessen.

	Gefunden.		Berechnet.
	I.	II.	
C	64,1 %	—	63,93 %
H	4,9 %	—	4,92 %
N	—	11,54 %	11,47 %

Phloroglucinbiazo-p-toluol.

$$CH_3\langle C_6H_4\rangle N{=}N-C_6(OH)_3-N{=}N\langle C_6H_4\rangle CH_3$$

Kleine, feine Nadeln mit viel intensiverer Farbe wie die Monoverbindung. Zeigten unter dem Mikroskop gut ausgebildete Prismen mit paralleler Auslöschung. Unterscheidet sich in Bezug auf Löslichkeitsverhältnisse wenig von der Monoverbindung. Ist doch in Alkohol etwas löslicher, was, wie gesagt, dazu angewandt wird, sie zu trennen.

Analysen:

I. 0,0979 gram lufttrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,2269 gram CO_2 (0,06188 gram C) und 0,0441 gram H_2O (0,00490 gram H).

II. 0,1464 gram gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 19,80 cm.[3] Stickstoffgas über koncentrirte Kalilauge bei 760 mm. Barometerdruck und 16° C. gemessen.

	Gefunden. I.	Gefunden. II.	Berechnet.
C	63,21 %	—	62,98 %
H	5,00 %	—	4,97 %
H	—	15,70 %	15,47 %

Phloroglucinazoxylole.

Für die Darstellung derselben ist die Behandlungsweise dieselbe, wie für die entsprechenden der Phloroglucinazobenzole und Phloroglucinazotoluole gewesen. Die Resultate zeigten die grösste Übereinstimmung mit den Toluolfarbstoffen, welchen sie auch, was das Aussehen betrifft, in hohem Grade gleichen. Die Farbeintensität ist jedoch etwas grösser und scheint sich mit der Anzahl neueintretender Methylgruppen zu vergrössern.

Dasselbe kann über die Löslickeit in Benzol und Chloroform gesagt werden. Die Schwierigket mit Hilfe dieser Lösungsmittel aus den Mischungsprodukten einheitlige Substanzen darzustellen, ist deshalb in diesem Falle grösser gewesen. Mono- und Biverbindungen wurden in reinem Zustand auf dieselbe Weise wie bei der entsprechenden Toluolverbindung erhalten.

Es ist nur *m*-Xylidin bei den Versuchen angewandt worden.

Phloroglucinmonoazo-m-xylol.

OH　　　CH_3

OH⟨　⟩N=N⟨　⟩

OH　　　CH_3

Analysen:

I. 0,1263 gram Substanz gaben bei Verbrennung in Sauerstoffgas 0,3078 gram CO_2 (0.08285 gram C) und 0,0627 gram H_2O (0,00697 gram H).

II. 0,2412 gram gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 23,05 cm.³ Stickstoffgas, über 50 % Kalilauge bei 758 mm. Barometerdruck und 18,5 C., gemessen.

	Gefunden. I.	Gefunden. II.	Berechnet.
C	65,6 %	—	65,62 %
H	5,52 %	—	5,47 %
N	—	10,93 %	10,85 %

Phloroglucinbiazo-m-xylol.

Analysen:

I. 0,1732 gram lufttrockne Substanz gaben bei der Verbrennung in Sauerstoffgas 0,3905 gram CO_2 (0,10650 gram C) und 0,0896 gram H_2O (0,00996 gram H).

II. 0,2830 gram gaben bei Verbrennung mit Kupferoxyd 34,83 cm.³ Stickstoffgas, über 50 % Kalilauge bei 758 mm. Barometerdruck und 18,5° C., gemessen.

	Gefunden. I.	Gefunden. II.	Berechnet.
C	61,49 %	—	61,54 %
H	5,75 %	—	5,64 %
N	—	14,08 %	14,36 %

Ausser den obenen beschriebenen Verbindungen haben wir Phloroglucinazofarbstoffe aus Sulphanilsäure und β-Naphtylamin, wobei auch Mischungsprodukte erhalten wurden, dargestellt, aus welchen wir doch manglender Zeit wegen keine einheitligen Verbindungen haben isoliren können.

Phloroglucinazobenzolsulfonsäuren

bilden hübsche rote Farbstoffe, deren Natriumsalze leicht löslich in Wasser mit kirschroter Farbe sind. Aus der Wasserlösung werden diese Salze von Alkohol gefällt, während Mineralsäuren den Farbstoff selbst ausfällen.

Phloroglucinazonaphtaline

sind in Wasser unlösliche violettbraune Farbstoffe, in kaltem Chloroform leicht und in Alkohol schwer löslich.

Die nun abgeschlossene Untersuchung hat gezeigt, dass die Reaktionsprodukte zwischen Phloroglucin und Diazoverbindungen in der Regel Mischungen von Farbstoffen, den 3 Serien Mono-, Bi- und Triazoverbindungen angehörend, aus welchen Mischungen die einheitlichen Substanzen nur mit Schwierigkeit isolirt werden konnten, ausmachen. Triazofarbstoffe von Phloroglucin können in reinem Zustand, nach unsrer Erfahrenheit, nur bei Anwendung von halogensubstituirten Aminbasen erhalten werden. Diese scheinen ebenfalls Verbindungen mit grösserer Neigung zu krystallisiren zu ergeben.

Nur Phloroglucinmonoazofarbstoffe von Toluol und Xylol konnten direkt in einigermassen reinem Zustand erhalten werden.

Phloroglucinfarbstoffe mit Anilinhomologen haben grössere Löslichkeit in den resp. Lösungsmitteln, wie auf Anilin entsprechend, gezeigt. Mit steigernder Anzahl Methylgruppen wird die Löslichket, gleichzeitig mit dem dunkler werdenden Farbstoffes, erhöht. Die vermehrte Anzahl von Diazogruppen erhöht die Farbenintisität. — Isomere Farbstoffe sind nicht aufgetreten.

In der Einleitung wurde erwähnt, dass WALLACH und FISCHER bei Darstellung von Resorcinbiazobenzol dagegen zwei isomere Farbstoffe erhielten, während Orcin nur einen Farbstoff ergab. Diese Isomerie hing nach WALLACH's und FISCHER's Untersuchungen nicht von Bildung von sekundärem Resorcinbiazobenzol ab. Diese Thatsachen scheinen ihre einfache Erklärung durch die Annahme zu erhalten, dass der eine Diazoreste immer zwischen 2 Hydroxylen steht.

Bei den Resorcinbiazofarbstoffen können die beiden Diazoresten deshalb entweder in meta- oder para-Stellung zu einander stehen, wogegen die Diazogruppen bei Orcin- und Phloroglucinbiazofarbstoffen jederzeit eine meta-Stellung zu einander einnehmen.

OH
N=N . C_6H_5
C_6H_5 . N=N OH

Resorcinparabiazobenzol.

OH
C_6H_5 . N=N N=N . C_6H_5
OH

Resorcinmetabiazobenzol.

OH
N=N . C_6H_5
CH_3 OH
N=N . C_6H_5

Orcinbiazobenzol.

OH
N=N . C_6H_5
HO OH
N=N .C_6H_5

Phloroglucinbiazobenzol.

In Übereinstimmung hiermit muss sonach Resorcin 2 isomere, Orcin und Phloroglucin nur ein Biazofarbstoff geben.

Da die Zeit uns nich erlaubt unsre gemeinschaftliche Arbeit weiter fortzusetzen, so sind wir gezwungen von den näheren Untersuchungen auf Phloroglucinfarbstoffe mit Sulphanilsäure und Naphtylamin, abzustehen.

Der von WESELSKY[1]) angegebene Farbstoff Paraazophenolphloroglucin dürfte wohl einer näheren Untersuchung bedürfen.

---

[1]) Ber. **12**, p. 226.

Von besonderem Interesse dürfte es auch sein die Untersuchungen über die mit halogensubsubstituirtem Anilin erhaltenen Triazofarbstoffe aus Phloroglucin auszusstrecken, und dürften wir späterhin vielleicht diesen Theil der Untersuchungen wieder aufnehmen, wenn man uns nicht bis dahin zuvorgekommen ist.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. fr. sid. 574.)

Luxemburg. *Institut grand-ducal.*
Publications. T. 25. 1897. 8:o.
Melbourne. *Royal society of Victoria.*
Proceedings. N. S. Vol. 10: P. 1. 1897. 8:o.
München. *Bayerische botanische Gesellschaft zur Erforschung der heimischen Flora.*
Berichte. Bd 5 (1897). 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 3 (1897): Fasc. 8—10. 8:o.
Neuchâtel. *Observatoire cantonal.*
Rapport. Année 1896. 8:o.
New York. *N. Y. Public Library.*
Bulletin. Vol. 1 (1897): N:o 11. 8:o.
Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 10 (1896): H. 5. 8:o.
Ottawa. *Royal Society of Canada.*
Proceedings and Transactions. (2) Vol. 2. 1896. 8:o.
Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1897: 2, 9—11. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1897): N:o 326. 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 22. 1897. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 17 (1896): Trim. 2. 8:o.
Comptes rendus. 1897: N:o 15. 8:o.
Philadelphia. *Academy of Natural Sciences.*
Journal. (2) Vol. 11: P. 1. 1897. 4:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze morali ... (5) P. 2 (Not. degli Scavi): Vol. 5 (1897): 8—10. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze fisiche ... (5) Vol. 6 (1897): Fasc. 6—9. 8:o.
» Cl. di scienze morali ... (5) Vol. 6 (1897): Fasc. 7—8. 8:o.
St. Louis. *Missouri Botanical Garden.*
Annual report. 8. 1897. 8:o.
St. Pétersbourg. *Académie Imp. des sciences.*
Mémoires. (8) Vol. 5: N:o 2—5. 1896—1897. 4:o.
Bulletin. (5) T. 5 (1896): N:o 3—5; 6 (1897): 4—5; 7 (1897): 1. 4:o.
— *Société Imp. Russe de géographie.*
Isvjestija. T. 33 (1897): 2—3. 8:o.
Otschet. 1896. 8:o.
— *K. mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd. 34: Lief. 2. 1896. 8:o.
Materialien zur Geologie Russlands. Bd. 18. 1897. 8:o.

São Paulo. *Commissão geographica e geologica.*
Boletim. N:o 14. 1897. 8:o.
SAMPAIO, TH., Conferencias »Anchieta». São Paulo no tempo de anchieta. 1897. 8:o.
Sydney. *Australian Museum.*
Memoir. 3: P. 4. 1897. 8:o.
— *Linnean Society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 22 (1897): P. 2. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
Boletín. T. 2: N:o 1. 1897. 4:o.
Washington. *Nautical Almanac Office.*
Astronomical papers. Vol. 8: P. 1. 1897. 4:o.
Wien. *K. K. Universitäts-Sternwarte.*
Annalen. Bd. 10—12. 4:o.
— *Gradmessungs-Commission.*
Verhandlungen. 1897. 8:o.
— *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*
Annalen. Bd. 12: N:o 1. 1897. 8:o.
— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 47 (1897): H. 8. 8:o.
Winnipeg. *Historical and Scientific Society of Manitoba.*
Transactions. N:o 49—50. 1897. 8:o.
Annual report. Year 1896. 8:o.
Würzburg. *Physik.-med. Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 31: N:o 1—7. 1897. 8:o.
Sitzungs-Berichte. Jahrg. 1897: N:o 1—2. 8:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

